Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 2015**

Übungen zu "Mathematische Modelle der Statistischen Physik und Quantenfeldtheorie"

Abgabe: Bis **08.07.2015, 16 Uhr** Blatt 08

Das klassische *Heisenberg-Modell* für die Zuordnung von Spin-Vektoren $\vec{S}_i \in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ zu jedem Gitterpunkt $i \in \mathbb{Z}^D$ wird beschrieben durch die Hamilton-Funktion

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \; .$$

Summmiert wird über Paare $\langle i,j \rangle$ nächster Nachbarn, und $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ meint das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$. Für $D = 1$ und Übergang zu Spin-$\frac{1}{2}$-*Operatoren* lautet der Hamilton-Operator (mit $\sigma_{N+1} = \sigma_1$)

$$H = -J \sum_{n=1}^{N} (\tfrac{1}{2}(\sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+) + \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z \; .$$

Dabei ist $[\sigma_n^+, \sigma_m^-] = 2\sigma_n^z \delta_{mn}$ und $[\sigma_n^z, \sigma_m^\pm] = \pm \sigma_n^\pm \delta_{mn}$.

Aufgabe 1. i) Geben Sie eine Darstellung von $\sigma_n^+, \sigma_n^-, \sigma_n^z$ als 2×2-Matrizen an.

ii) Wir betrachten, für jedes n, die kanonische Basis $\big(e_n^+ = \binom{1}{0}, e_n^- = \binom{0}{1}\big)$ von $\mathbb{C}^2$ und dann die Basis $(e_1^{j_1} \dots e_N^{j_N})_{j_k = \pm}$ des Hilbert-Raums $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2^N}$. Geben Sie die Wirkung von $\sigma_n^+, \sigma_n^-, \sigma_n^z$ auf $(e_1^{j_1} \dots e_N^{j_N})$ an.

iii) Sei $S^z = \sum_{n=1}^N \sigma_n^z$. Zeigen Sie durch Lösen des Eigenwertproblems für S^z: Es gibt $N+1$ verschiedene Eigenräume V_r von S^z, mit $r = 0, 1, \dots, N$, und $\dim(V_r) = \binom{N}{r}$.

iv) Zeigen Sie: $[H, S^z] = 0$ und $HV_r \subseteq V_r$.

Aufgabe 2. i) Sei Ω (das Vakuum) der (bis auf Phasenfaktor) eindeutige Basisvektor von V_0. Berechnen Sie $H\Omega$.

ii) Geben Sie Operatoren T_i an, so daß $(T_1\Omega, \dots, T_N\Omega)$ eine ONB von V_1 ist. Geben Sie unter Verwendung dieser T_i eine ONB von V_2 an.

iii) Zeigen Sie: Eine andere ONB von V_1 ist gegeben durch $(\psi_0, \dots, \psi_{N-1})$ mit

$$\psi_k := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} e^{\frac{2\pi \mathrm{i} jk}{N}} T_j \Omega \, , \qquad k = 0, 1, \dots, N-1 \; .$$

iv) Zeigen Sie: ψ_k ist Eigenvektor von H. Bestimmen Sie den Eigenwert.

Aufgabe 3. Die in Aufgabe 2.ii) bestimmte ONB von V_2 kann als $(\phi_{n_1 n_2})_{1 \leq n_1 < n_2 \leq N}$ aufgefaßt werden. Der Bethe-Ansatz zur Bestimmung eines Eigenvektors in V_2 von H lautet

$$\psi := \sum_{n_1 < n_2} \Big(A_{12} e^{\mathrm{i}(K_1 n_1 + K_2 n_2)} + A_{21} e^{\mathrm{i}(K_1 n_2 + K_2 n_1)} \Big) \phi_{n_1 n_2} \;,$$

wobei K_i zunächst beliebig ist (und nicht $\frac{2\pi k_1}{N}$ wie für V_1 gesetzt ist).

i) Zeigen Sie: Für ein geeignetes Verhältnis $\frac{A_{12}}{A_{21}} =: e^{\mathrm{i}\Theta_{12}}$ ist ψ Eigenvektor von H. Geben Sie $\Theta_{12} = -\Theta_{21}$ an.

ii) Nach i) gilt bis auf Normierung

$$\psi = \sum_{n_1 < n_2} \Big(e^{\mathrm{i}(K_1 n_1 + K_2 n_2 + \frac{\Theta_{12}}{2})} + e^{\mathrm{i}(K_1 n_2 + K_2 n_1 + \frac{\Theta_{21}}{2})} \Big) \phi_{n_1 n_2} \;.$$

Bestimmen Sie den Eigenwert E von H als Funktion von K_1, K_2.

iii) Zeigen Sie: Translationsinvarianz $n_1 \mapsto n_1 + N$ und $n_2 \mapsto n_2 + N$ führt auf

$$K_1 = \frac{2\pi l_1 + \Theta_{12}}{N} \;, \qquad K_2 = \frac{2\pi l_2 + \Theta_{21}}{N}$$

mit $l_2 = 0, 1, \dots, N-1$ und $l_1 = 0, 1, \dots, l_2$.

Aufgabe 4. Es sei N ein Vielfaches von 4. Diese Aufgabe untersucht die Bestimmungsgleichungen für den Eigenwert E aus Aufgabe 3.ii) in Abhängigkeit von l_1, l_2 aus 3.iii).

i) Bestimmen Sie E für $l_1 = 0$. Wieviele Lösungen sind das in Abhängigkeit von N?

ii) Sei $l_2 - l_1 \geq 2$. Wieviele Lösungen sind das in Abhängigkeit von N? Zeigen Sie, daß in diesem Fall alle Lösungen K_1, K_2 reell sind und sich aus

$$0 = 2\cot(N\tfrac{K_1}{2}) - \cot\tfrac{K_1}{2} + \cot(\tfrac{\pi(l_1+l_2)}{N} - \tfrac{K_1}{2}) \tag{1}$$

ergeben. In diese Klasse fällt auch die Lösung $l_1 = l_2 = \frac{N}{4}$.

iii) Zeigen Sie: (1) hat auch reelle Lösungen für $l_2 = l_1 + 1 \geq 2$, falls $l_1 + l_2 \in \{3, 5, \dots, L-2\}$ ist oder $l_1 + l_2 \in \{2N - L + 2, \dots, 2N-3\}$, mit L der zu $\frac{\sqrt{N}}{\pi}$ nächsten ungeraden natürlichen Zahl.

iv) Weitere Lösungen für $l_1 = l_2 > 0$ und $l_2 = l_1 + 1$ sind komplex und ergeben sich aus dem Ansatz $K_1 = \frac{\pi(l_1+l_2)}{N} + \mathrm{i}v$, $K_2 = \frac{\pi(l_1+l_2)}{N} - \mathrm{i}v$, der (1) in

$$\cos\frac{\pi(l_1+l_2)}{N} \sinh(Nv) = \sinh((N-1)v) + (-1)^{l_1 - l_2} \sinh v \tag{2}$$

überführt. Zeigen Sie, daß diese Gleichung Lösungen hat

- im Fall $l_1 = l_2$ falls $l_1 + l_2 \in \{2, 4, \ldots, \frac{N}{2} - 2\}$ oder $l_1 + l_2 \in \{\frac{3N}{2} + 2, \ldots, 2N - 2\}$
- im Fall $l_2 = l_1 + 1 \geq 2$ falls $l_1 + l_2 \in \{L, L + 2, \ldots, \frac{N}{2} - 1\}$ oder $l_1 + l_2 \in \{\frac{3N}{2} + 3, \ldots, 2N - L + 2\}$ und L wie in 4.iii).