Übungen zu "Mathematische Modelle der Statistischen Physik und Quantenfeldtheorie"

Abgabe: Bis **15.07.2015, 16 Uhr** Blatt 09

Das klassische *zweidimensionale Heisenberg-Modell* für die Zuordnung von Spin-Vektoren $\vec{S}_i \in S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ zu jedem periodischen zweidimensionalen $N \times N$- Gitter wird beschrieben durch die Hamilton-Funktion $H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$. Summmiert wird über Paare $\langle i, j \rangle$ nächster Nachbarn in $\mathbb{Z}^2$.

Aufgabe 1. i) Zeigen Sie, daß die Zustandssumme aufgefaßt werden kann als

$$\mathcal{Z} = \int_{[0,2\pi]^{N^2}} \frac{d\theta_1}{2\pi} \cdots \frac{d\theta_{N^2}}{2\pi} \exp\Big(K \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \Big) .$$

Wie üblich ist $K = \frac{J}{T}$. Diese Zustandssumme definiert das XY*-Modell*.

ii) Die Hochtemperaturentwicklung des XY-Modells folgt aus der Entwicklung nach modifizierten Besselfunktionen

$$e^{K\cos\theta} = I_0(K) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(K)(e^{\mathrm{i}n\theta} + e^{-\mathrm{i}n\theta}) .$$

Es gilt

$$t_n(K) := \frac{I_n(K)}{I_0(K)} \sim \begin{cases} \frac{K^n}{2^n n!} & \text{für } K \to 0 \\ e^{-\frac{n^2}{2K}} & \text{für } K \to \infty \end{cases}$$

Für $K \to 0$ spielen diese $t_n(K)$ die Rolle von $\tanh K$ im Isingmodell. Führen Sie nach dieser Entwicklung die Winkelintegration aus, so daß die Zustandssumme eine Potenzreihe in $t_{n_{ij}}(K)$ wird.

Aufgabe 2. Das Villain-Modell ensteht aus dem XY-Modell, indem man die Besselfunktionen durch das Verhalten bei $K \to \infty$ ersetzt:

$$\mathcal{Z} = \int_{[0,2\pi]^{N^2}} \frac{d\theta_1}{2\pi} \cdots \frac{d\theta_{N^2}}{2\pi} \prod_{\langle i,j \rangle} z(\theta_i - \theta_j) , \qquad z(\theta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\frac{n^2}{2K} + \mathrm{i}n\theta \Big) .$$

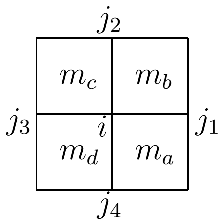
i) Beweisen Sie unter Verwendung von $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{\mathrm{i}kx} \hat{f}(k)$ die *Poissonsche Summenformel*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi p) \ .$$

ii) Geben Sie eine alternative Form von $z(\theta)$ an, die aus der Poisson-Summierung entsteht.

iii) Führen Sie in dieser Form die Winkel-Integration in der Zustandssumme aus, so daß nun summiert wird über alle Zuordnungen $n_{ij} \in \mathbb{Z}$ zu nächsten Nachbarn $\langle i, j\rangle$ mit $n_{ij} = -n_{ji}$. Welche Einschränkung gibt es für diese n_{ij}?

Aufgabe 3. i) Zeigen Sie, daß sich die Nebenbedingungen and die n_{ij} lösen lassen durch Zuordungen von ganzen Zahlen m_a zu jeder Plaquette des Gitters:



$$n_{ij_1} = m_a - m_b \ , \quad n_{ij_2} = m_b - m_c \ , \ldots$$

ii) Schlußfolgern Sie für die Zustandssumme des Villain-Modells

$$\mathcal{Z} = \sum_{m_1,\ldots,m_{N^2}=-\infty}^{\infty} \exp\Big(- \frac{1}{2K} \sum_{\langle a,b\rangle} (m_a - m_b)^2 \Big)$$

iii) Verwenden Sie die Identität

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, f(\phi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\phi - m) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, f(\phi) \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{2\pi \mathrm{i} q\phi},$$

um die Zustandssumme in ein Modell für Gaußsche Fluktuationen umzuschreiben.

Bemerkung: Die letzte Formel ist Ausgangspunkt für eine weitere Behandlung mit Renormierungsgruppenmethoden.

Aufgabe 4. Nichtwechselwirkende kontinuierliche Spinvariablen definieren durch

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} \prod_{j=1}^{N} ds_j e^{-H(s_j)} \ , \qquad \mathcal{Z} := \int \prod_{j=1}^{N} ds_j e^{-H(s_j)}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß für unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen. Die Wahrscheinlichkeit, daß diese Verteilung einen Gesamtspin $S = \sum_{j=1}^{N} s_j$ hat mit $S_0 \leq S < S_1$ ist dann gegeben durch $\int_{S_0}^{S_1} dS\; P_N(S)$ mit

$$P_N(S) := \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \prod_{j=1}^{N} ds_j e^{-H(s_j)} \delta(S - \sum_{j=1}^{N} s_j) \; .$$

Wir bestimmen die renormierte Grenzverteilung $R_\infty(S) := \lim_{N\to\infty} R_N(S)$, mit $R_N(S) := \sqrt{N} P_N(\sqrt{N} S)$, in folgenden Schritten:

i) Zeigen Sie:

$$P_{2N}(S) = \int_{-\infty}^{\infty} dT\; P_N(\tfrac{S}{2} - T) P_N(\tfrac{S}{2} + T)$$

Hinweis: $\delta\big(S - \sum_{j=1}^{2N}\big) = \int_{-\infty}^{\infty} dT\; \delta\big(\frac{S}{2} - \sum_{j=1}^{N} \sigma_j - T\big) \delta\big(\frac{S}{2} - \sum_{j=N+1}^{2N} \sigma_j + T\big)$

ii) Führen Sie die Renormierung zu R_{2N} und R_N durch sowie den Limes $N \to \infty$.

iii) Führen Sie in der entstehenden nichtlinearen Integralgleichung für R_∞ eine Fourier-Transformation $R_\infty(S) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp\; \hat{R}(p)\, e^{\mathrm{i}pS}$ durch. Zeigen Sie: $(\hat{R}(\frac{p}{\sqrt{2}}))^2 = \hat{R}(p)$.

iv) Beweisen Sie, daß $(\hat{R}(\frac{p}{\sqrt{2}}))^2 = \hat{R}(p)$ die einzige Lösung $\hat{R}(p) = c_1 e^{-\frac{\sigma p^2}{2}}$ hat. Bestimmen Sie c_1. Geben Sie zusammenfassend die Grenzverteilung $R_\infty(S) = \lim_{N\to\infty} \sqrt{N} P_N(\sqrt{N} S)$ an.