Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 15/16**
PD Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe bis Montag, den 18.4.2016, 14 Uhr in den Briefkästen Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $f\colon \mathbb{R}_+^\times \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremstellen von f, deren Art (Maximum/Minimum) sowie alle Bereiche, in denen f konvex oder konkav ist.

Aufgabe 2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Beweisen Sie die verallgemeinerte Leibniz-Regel für höhere Ableitungen

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Aufgabe 3. (a) Bezeichne $(T_n h)(x; a)$ das n-te Taylor-Polynom einer Funktion h mit Entwicklungspunkt a. Bestimmen Sie folgende Taylorpolynome:

$$(T_4 f)(x;1) \text{ für } f(x) = x + \mathrm{e}^x \quad \text{und} \quad (T_2 g)(x;0) \text{ für } g(x) = \sin(\pi\sqrt{1+x^2}).$$

(b) Berechnen Sie jeweils die ersten partiellen Ableitungen der Funktionen

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, & \phi(x,y) &= \mathrm{e}^{xy}\sin(x^2+y), \\ \psi\colon (\mathbb{R}_+^\times)^3 &\to \mathbb{R}, & \psi(x,y,z) &= (xy)^z. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Seien $f, \Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = xy\Phi(x,y) \quad \text{mit} \quad \Phi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\partial_x f(0,x), \quad \partial_y f(y,0), \quad (\partial_x\partial_y f)(0,0), \quad (\partial_y\partial_x f)(0,0).$$

Erhalten Sie einen Widerspruch zum Satz von Schwarz?