Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 16**
PD Dr. T. Timmermann

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, den 28.04.16, 10 Uhr in den Briefkästen Blatt 2

Aufgabe 1. Sei die Funktion $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$, integrierbar. Zeigen Sie:

(a) Ist f ungerade, d.h. $f(x) = -f(-x)$, dann gilt $\int_{-a}^{a} dx f(x) = 0$.

(b) Ist f gerade, d.h. $f(x) = f(-x)$, dann existiert $\int_0^a dx\, f(x)$, und es gilt $\int_{-a}^{a} dx\, f(x) = 2\int_0^a dx\, f(x)$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie (durch zweifache partielle Integration) die Stammfunktionen zu folgenden Funktionen:

(a) $x^2 \sin x$

(b) $\sin(ax)\,\mathrm{e}^{bx}$, $\quad a, b \in \mathbb{R}$

Zeigen Sie mit zweifacher partieller Integration:

(c) $\displaystyle\int dx\, \sin(\ln x) = \frac{1}{2} x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C.$
(*Hinweis:* Setzen Sie $u(x) = x$ und achten Sie auf Vorzeichen.)

Aufgabe 3. Zeigen Sie mit partieller Integration:

(a) $\displaystyle\int_0^b dx\, x^n\, \mathrm{e}^x = n!(-1)^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} b^k\, \mathrm{e}^b$ für alle $b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} dx\, \ln^n x = n!(-1)^{n+1} + \mathrm{e} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(*Hinweis:* Setzen Sie $u(x) = x$.)

Aufgabe 4. (a) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung den Mittelwertsatz der Differentialrechnung in der folgenden abgeschwächten Form: *Ist eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, stetig differenzierbar, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$.*

(b) Zeigen Sie: Die Dirichlet-Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 1\,, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist auf keinem Intervall $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$ Riemann-integrierbar.