Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis **Mittwoch, den 04.05.16, 18 Uhr** in den Briefkästen Blatt 3

Aufgabe 1. (a) Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ mit Hilfe der Substitution $t=\sqrt{x}$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ mit Hilfe der Substitution $t=\tan\frac{x}{2}$ (vgl. Beispiel 31.13 der Vorlesung).

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \frac{\sin x}{1+\cos x} = \ln 2;$

(b) $\displaystyle\int_0^{2} dx \frac{x}{\sqrt{1+4x}} = \frac{5}{6}$ (Substitution $t=\sqrt{1+4x}$);

(c) $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (Substitution $x=2\tan z$).

Aufgabe 3. Für $n\in\mathbb{N}$ und $|x|<\pi/2$ sei $D_n(x)=\int_0^x dt\,\tan^n t$. Zeigen Sie:

(a) $D_0(x)=x$, $D_1(x)=-\ln\cos x$ und $nD_{n+1}(x)=\tan^n x - nD_{n-1}(x)$ für $n\geq 2$. (*Hinweis:* Differenzieren Sie für die letzte Gleichung $\tan^n x$.)

(b) Für $d_n := D_n(\pi/4)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$.

(c) Für alle $m\in\mathbb{N}$ ist

$$d_{2m} = (-1)^m\left(\frac{\pi}{4}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right), \qquad d_{2m+1}=(-1)^m\left(\ln\sqrt{2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k}{2k}\right).$$

(d) Folgern Sie aus (b) und (c) die Gleichungen

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2.$$

Aufgabe 4. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz in Abhängigkeit von $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\text{(a)} \int_1^\infty dx\,\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}, \qquad \text{(b)} \int_1^\infty dx\,\left(\ln\left(1+x^{-3}\right)\right)^\alpha, \qquad \text{(c)} \int_0^1 dx\,\left(\ln\left(1+x^{-3}\right)\right)^\alpha.$$

(*Hinweis:* Substituieren Sie geeignet und betrachten Sie $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}$ für (a) und $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t^\beta}$ für geeignetes β für (b) und (c).)