Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann **SS 16**

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, den 2.6.2016, 10 Uhr in den Briefkästen Blatt 6

Aufgabe 1. Bestimmen Sie, welche der folgenden Abbildungen linear ist:

(a) $F\colon \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int_0^1 dx\, f(x)x^2$, wobei $\mathcal{C}([0,1])$ als Vektorraum bezüglich der punktweise definierten Addition sowie Multiplikation mit Skalaren aufgefaßt wird;

(b) $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x+y)^2 - (x-y)^2$;

(c) $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 2x + 3y - 1$;

(d) $K\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto |x-y| + |x+y|$.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie, daß die Vektoren $b_1 = (2,3,-1)$, $b_2 = (-4,5,0)$ und $b_3 = (6,-2,2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Durch $F(b_1) = (1,0)$, $F(b_2) = (0,1)$, $F(b_3) = (1,-1)$ werde eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert. Bestimmen Sie $\ker(F)$.

(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix der in 2b) definierten linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis (b_1, b_2, b_3) von $\mathbb{R}^3$ und der Basis $(e_1, e_1 - e_2)$ von $\mathbb{R}^2$, wobei $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$.

Aufgabe 3. Sei $V = W = \mathbb{C}^3$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der Abbildung $F\colon V \to W$, $x \mapsto Ax$, bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ (von V und W), wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Bezeichne V_n den komplexen Vektorraum aller Polynome $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ vom Grad kleiner gleich n und Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Wir definieren Abbildungen $D, T_a\colon V_n \to V_n$ durch

$$(DP)(x) := P'(x) \qquad \text{und} \qquad (T_a P)(x) := P(x+a) \text{ für ein festes } a \in \mathbb{C}.$$

Bestimmen Sie für diese Abbildungen jeweils (a) den Kern, (b) das Bild, (c) die Darstellungsmatrix bezüglich der Basis $x^0, \ldots, x^n$.