Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 16**
PD Dr. T. Timmermann

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, den 9.6.2016, 10 Uhr in den Briefkästen Blatt 7

Aufgabe 1. Bezeichne V den Vektorraum aller komplexen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3. Zeigen Sie, daß dann die Polynome L_0, L_1, L_2, L_3, definiert durch

$$L_n(x) = \mathrm{e}^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n \, \mathrm{e}^{-x})$$

eine Basis $\mathcal{B}$ von V bilden, und berechnen Sie die Darstellungsmatrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D)$ der linearen Abbildung $D\colon V \to V$, $P \mapsto P'$ (vgl. Aufgabe 3 von Blatt 6) bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3. (a) Bezeichne E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ *nilpotent* in dem Sinn, daß $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß dann die Matrix $1_n - A$ invertierbar ist. (*Hinweis:* Geometrische Reihe!)

(b) Bestimmen Sie für $a \in \mathbb{C}$ die zu $\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a^n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n+1, \mathbb{C})$ inverse Matrix.

(Der Eintrag an der Stelle (i, j) ist 0 im Fall $i > j$ und a^{j-i} im Fall $i \leq j$.)

Aufgabe 4. Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

ein $r \in \mathbb{N}$ und quadratische Matrizen L, R, so daß

$$A = L \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R^{-1}.$$