Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann

SS 16

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, den 30.6.2016, 10 Uhr in den Briefkästen — Blatt 10

Aufgabe 1. (a) Schreiben Sie den Shift $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ als Produkt von Transpositionen und bestimmen Sie sein Signum.

(b) Berechnen Sie die Determinanten folgender 3×3-Matrix A und $n \times n$-Matrix B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t^2 & 1 & t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (a) *(Vandermonde-Determinante)* Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ und

$$B(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie per Induktion, daß $\det B(n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

(b) Für $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A(n) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: $\det A(n) = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$.

(b.w.)

Aufgabe 3. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ und sei $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ die $n \times (n+1)$-Matrix mit den Zeilen $a_1, \ldots, a_n$. Für $k = 1, \ldots, n+1$ sei $A(k)$ die $n \times n$-Matrix, die man erhält, wenn man die k-te Spalte von A streicht. Zeigen Sie, daß für den Vektor

$$b = (b_1 \ldots b_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{mit } b_k = (-1)^{k-1} \det A(k)$$

folgende Aussagen gelten:

(a) $b = a_1 \times a_2$ im Fall $n = 2$;

(b) $\langle a_k, b \rangle = \det \begin{pmatrix} a_k \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ für $k = 1, \ldots, n$;

(c) b ist orthogonal zu $a_1, \ldots, a_n$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -18 & 9 \\ 6 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) das charakteristische Polynom,

(b) die Eigenwerte,

(c) die Eigenräume,

(d) eine Matrix S so, daß $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.