Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 17**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: Dienstag, 25.4.2017 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 1

Aufgabe 1. Geben Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der folgenden komplexen Zahlen an:

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{4+3\mathrm{i}} \qquad \text{(b)} \quad \frac{3+\sqrt{5}\mathrm{i}}{2+\sqrt{5}\mathrm{i}} + \frac{1-\sqrt{5}\mathrm{i}}{2-\sqrt{5}\mathrm{i}} \qquad \text{(c)} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 2. Skizzieren Sie folgende Punktemenge der Gaußschen Zahlenebene:

$$\text{a)} \quad \left\{ z \in \mathbb{C} \; : \; \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > \frac{1}{R} \right\} \qquad \text{b)} \quad \{ z \in \mathbb{C} \; : \; |z| < |z+1| < 1 \, , |z| < |z+\mathrm{i}| \}$$

Aufgabe 3. (a) Geben Sie sämtliche Lösungen der quadratischen Gleichungen in der Form $z = x + \mathrm{i}y$ an, indem Sie die Gleichung $\sqrt{a + \mathrm{i}b} = x + \mathrm{i}y$ lösen $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, und berechnen Sie die Beträge $|z^2|$ und $|z|$:

$$\text{(i)} \quad z^2 = 3 + 4\mathrm{i} \qquad \text{(ii)} \quad z^2 = 1 + 4\sqrt{5}\mathrm{i}$$

(b) Berechnen Sie die Lösungen der dritten Einheitswurzeln $\zeta^3 = 1$ mit $\zeta \in \mathbb{C}$. Zeigen und benutzen Sie dazu $(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)$.

Aufgabe 4. Die Normalform einer kubischen Gleichung ist

$$z^3 + pz + q = 0 \, , \qquad p, q \in \mathbb{R} \, .$$

(a) Rechnen Sie nach, dass für $D := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$ die Lösungen dieser kubischen Gleichung gegeben sind durch die Cardanischen Formeln

$$z_1 = u + v \, , \qquad z_2 = \zeta_1 u + \zeta_2 v \, , \qquad z_2 = \zeta_2 u + \zeta_1 v$$

mit $\zeta_1 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\zeta_2 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ und

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \, , \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \, .$$

Dabei ist $\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{-a}$ für $a < 0$.

(b) Man bestimme die Lösungen von $z^3 + 6z + 2 = 0$.