Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 17**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: Dienstag, 11.7.2017 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 11

Aufgabe 1. Sei $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p$, $p \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die *Faulhabersche Formel*

$$\sum_{k=0}^n k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} (-1)^j B_j n^{p+1-j},$$

wobei B_j die Bernoulli-Zahlen sind. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, daß die erzeugende Funktion $G(z,n) = \sum_{p=0}^\infty S_p(n) \frac{z^p}{p!}$ dargestellt werden kann durch

$$G(z,n) = \frac{1-e^{nz}}{e^{-z}-1}. \tag{1}$$

(b) Geben Sie die Potenzreihen von $1-e^{nz}$ und $\frac{1}{e^{-z}-1}$ an.

(c) Setzen Sie die Potenzreihen in (1) ein und folgern Sie durch Koeffizientenvergleich der erzeugenden Funktion die Faulhabersche Formel.

(*Hinweis:* Verwenden Sie bei (a) die geometrische Summenformel, bei (b) die Potenreihenentwicklung von $\frac{z}{\exp(z)-1}$ und bei (c) die Cauchy-Produktformel $\Big(\sum_{j=0}^\infty a_j\Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^\infty b_k\Big) = \sum_{p=0}^\infty \sum_{j=0}^p a_j b_{p-j}$.)

Aufgabe 2. (a) Geben Sie mit Hilfe der Faulhaberschen Formel die Summen $S_p(n)$ für $p \in \{0,1,2,3\}$ an.

(b) Zeigen Sie, daß für $n \geq 1$ die Identität

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k B_{n-k} = -nB_{n-1} - (n-1)B_n$$

gilt. Betrachten Sie dazu die Potenzreihe von $\frac{z^2}{(e^z-1)^2}$.
(*Hinweis:* $z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{e^z-1}\right) = \frac{z}{e^z-1} - \frac{z^2}{e^z-1} - \frac{z^2}{(e^z-1)^2}$.)

(b.w.)

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$, $y \in \mathbb{R}^\times$ bzw. $y \in \mathbb{R}$:

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}+z\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}-z\Big) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}, \quad |\Gamma(\mathrm{i}y)|^2 = \frac{\pi}{y\sinh(\pi y)}, \quad \Big|\Gamma\Big(\frac{1}{2}+\mathrm{i}y\Big)\Big|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)}.$$

(b) Zeigen Sie

$$\Gamma'(n+1) = n!\left(-\gamma + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

wobei γ die Euler-Mascheroni-Konstante ist mit $\gamma = -\Gamma'(1)$.

(*Hinweis:* Das geht schneller über Eigenschaften von $\psi(z)$, kann aber auch mit mehrfacher partieller Integration erhalten werden unter Beachtung von $(x(\ln(x) - 1))' = \ln(x)$ und $(x^n e^{-x})' = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}$.)

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie, daß die Betafunktion ebenfalls dargestellt werden kann durch

$$B(a,b) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} dx.$$

(*Hinweis:* Finden Sie die richtige Substitution $t = \frac{ax+b}{cx+d}$, indem Sie berücksichtigen, wie sich die Grenzen des Integrals ändern.)

(b) Zeigen Sie, daß das Integral von Blatt 10 Aufgabe 1 (c) ebenfalls die Lösung besitzt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5} = \frac{1}{5}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}.$$