Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 17**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: Dienstag, 2.5.2017 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 2

Aufgabe 1. (a) Bestimmen Sie die Grenzwerte der komplexen Folgen

$$a_n = \frac{n^3 + (\mathrm{i}n^2 + 1)(6 + \mathrm{i}n)}{\sum_{k=1}^n \mathrm{i}k}, \qquad b_n = n^k \left(\frac{1}{4} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n, \quad k \in \mathbb{N}$$

(b) Zeigen Sie:

(i) Konvergiert eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gegen ein a, so konvergiert die konjugiert-komplexe Folge $(\bar{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\bar{a}$.

(ii) Ist die komplexe Reihe $\sum_{k=1}^\infty c_k$ konvergent mit Summe s, so ist $\sum_{k=1}^\infty \bar{c}_k$ konvergent mit Summe $\bar{s}$.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie, für welche $k \in \mathbb{N}$ die folgende Reihe konvergiert, und berechnen Sie Realteil, Imaginärteil sowie Betrag der Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty z_k^n \quad \text{mit} \quad z_k = \frac{3 + 4\mathrm{i}}{k + \mathrm{i}}.$$

Für welche k gilt $\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^\infty z_k^n\right) > \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^\infty z_k^n\right)$?
Für welches k ist der Betrag der Reihe maximal?

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1+n}{n}\right)^{n^2} z^{2n} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n!)^2} z^n \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{(z - \mathrm{i})^{5n}}{5n^2 3^n}$$