Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 17**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: Dienstag, 16.5.2017 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 4

Aufgabe 1. (a) Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = |z|^4 - 2|z|^2$ und $g(z) = x^3y^2 + \mathrm{i}x^2y^3$ mit $z = x + \mathrm{i}y$. Geben Sie alle Punkte an, an denen f bzw. g komplex differenzierbar oder sogar holomorph sind.

(b) Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $D^* := \{z \,|\, \bar{z} \in D\}$. Eine Funktion $h : D \to \mathbb{C}$ sei in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar. Zeigen Sie, daß $\tilde{h} : D^* \to \mathbb{C}$ definiert durch $\tilde{h}(z) := \overline{h(\overline{z})}$ in $\overline{z_0} \in D^*$ komplex differenzierbar ist. Geben Sie $\tilde{h}'(\overline{z_0})$ an.

Aufgabe 2. Sei $f = u + \mathrm{i}v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zweimal reell differenzierbar. Der Laplace-Operator ist definiert durch $\Delta = \partial_x\partial_x + \partial_y\partial_y$. Zeigen Sie:

(a) Ist f holomorph, so sind u und v harmonisch in dem Sinne, dass $\Delta u = 0 = \Delta v$.

(b) Ist $\overline{f}$ holomorph, so sind u und v harmonisch in dem Sinne, dass $\Delta u = 0 = \Delta v$.

(c) Der Laplace-Operator kann durch die Wirtinger-Ableitungen ausgedrückt werden mit $\Delta = 4\partial_z\partial_{\overline{z}} = 4\partial_{\overline{z}}\partial_z$.

(d) Seien $f, \overline{g}$ nicht-konstante holomorphe Funktionen mit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zweimal reell differenzierbar, dann ist $f \cdot g$ nicht holomorph.

Aufgabe 3. Finden Sie holomorphe Funktionen $f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ mit

(a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$

(b) $u(x, y) = -x^3 + 2x^2 + y^2(3x - 2)$

(c) $u(x, y) = \sin(x)e^{-y}$

(d) $v(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$ für $x, y > 0$.

Hinweis: Erraten erlaubt!

Aufgabe 4. Zeigen Sie:
Sind $f_1, f_2, ..., f_n$ zweimal komplex differenzierbar in $D \subset \mathbb{C}$, und die Funktion $|f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2 + ... + |f_n(z)|^2$ konstant in D, so ist bereits jede Funktion $f_1, f_2, ..., f_n$ konstant in D.