Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 17**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: Dienstag, 20.6.2017 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 8

Aufgabe 1. (a) Seien f, g ganze Funktionen und $|g(z)| \leq a|f(z)|$ für ein festes $a > 0$, sowie $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Zeigen Sie, daß dann ein $b \in \mathbb{C}$ existiert mit $g(z) = bf(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Sei f eine ganze Funktion mit beschränktem Realteil, d.h. $\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}\big(f(z) - \overline{f(z)}\big) < C$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und ein $C > 0$.
Zeigen Sie, daß dann f konstant ist.
(*Hinweis:* Zeigen Sie zuerst, daß $\exp(f(z))$ konstant ist. Folgern Sie daraus, daß dann auch f konstant ist.)

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$. Entwickeln Sie $f(z)$ in eine Laurent-Reihe auf dem Kreisring $K_{0,R}(0)$ mit $R > 0$. Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen (Folgerung 15.4 aus der Vorlesung), daß $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ und $a_{-1} = 1$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$.

(a) Entwickeln Sie $f(z)$ in eine Laurent-Reihe auf dem Kreisring $K_{0,1}(0)$.

(b) Entwickeln Sie $f(z)$ in eine Laurent-Reihe auf dem Kreisring $K_{1,2}(0)$.

(*Hinweis:* Nutzen Sie die Partialbruchzerlegung. In beiden Fällen können die Koeffizienten a_n entweder explizit berechnet werden oder mit Hilfe der geometrischen Reihe bestimmt werden. Nutzen Sie, falls Sie mit der geometrischen Reihe arbeiten, bei (b) $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$.)

Aufgabe 4. Berechnen Sie die folgenden Residuen:

$$\text{(a)} \quad \mathrm{res}_{\mathrm{i}}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\pi z}}{z^4 - 1}\right) \qquad \text{(b)} \quad \mathrm{res}_1\left(\frac{e^{\mathrm{i}\pi z}}{z^4 - 1}\right)$$

$$\text{(c)} \quad \mathrm{res}_1\left(\frac{z^n}{(z-1)^{k+1}}\right) \qquad \text{(d)} \quad \mathrm{res}_{\mathrm{k}}\left(\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right), \qquad k, n \in \mathbb{N}$$