

Funktionentheorie

(Sommersemester 2017)

Raimar Wolkenhaar

In der Funktionentheorie geht es um die besonderen Eigenschaften von (in Umgebungen) komplex-differenzierbaren Funktionen. Die komplexe Differenzierbarkeit ist eine viel stärkere Eigenschaft als die reelle Differenzierbarkeit. Sie erlaubt es, die Funktion aus der Kenntnis von ganz wenigen Daten zu rekonstruieren. Daraus folgen überraschende Zusammenhänge zwischen lokalen und globalen Eigenschaften der Funktionen. Funktionentheorie spielt eine wichtige Rolle in vielen Bereichen der Mathematik, vor allem in Zahlentheorie, Funktionalanalysis und Topologie.

Inhalt

0	Einleitung	1
I	Wiederholung: Komplexe Zahlen	4
1	Komplexe Zahlen als Körper	4
2	Folgen und Reihen in \mathbb{C}	7
3	Stetigkeit	12
4	Die Exponentialfunktion	16
II	Komplexe Differenzierbarkeit und holomorphe Funktionen	21
5	Reelle Differenzierbarkeit	21
6	Einschub: Lineare Abbildungen	22
7	Komplexe Differenzierbarkeit	23
8	Holomorphe Funktionen	26
III	Der Cauchysche Integralsatz	30
9	Wiederholung: Integration im Reellen	30
10	Komplexe Kurvenintegrale	31
11	Der Cauchysche Integralsatz	35
12	Die Cauchysche Integralformel	42
13	Struktursätze	46

IV	Der Residuensatz	53
14	Isolierte Singularitäten	53
15	Laurent-Reihen und Residuum	55
16	Residuensatz	59
17	Berechnung reeller Integrale mittels Residuensatz	63
V	Ausgewählte Anwendungen	69
18	Partialbruchzerlegungen	70
19	Unendliche Produkte	73
20	Die Gamma-Funktion	75
21	Die zeta-Funktion	81
22	Der Primzahlsatz	86

Literatur

W. Fischer, I. Lieb: Funktionentheorie. Vieweg, 1985.

K. Jänich: Funktionentheorie. Springer, 1999.

R. Remmert & G. Schumacher: Funktionentheorie 1. Springer, 2002.

R. Busam & E. Freitag: Funktionentheorie 1. Springer, 2006.

0 Einleitung

“Funktionentheorie” ist ein eher unglücklicher Name für “Analysis im Komplexen”. Das Gebiet wurde entscheidend durch die Mathematik in Münster geprägt (Heinrich Behnke, Professor 1927–1967; Karl Stein, apl-Professor 1948–1955; Reinhold Remmert, Professor 1967–1995; Friedrich Hirzebruch, Habilitation 1954; Hans Grauert, Habilitation 1957; ...).

Historisch traten Wurzeln aus negativen rationalen Zahlen als nützliches Hilfsmittel bei der Lösung kubischer Gleichungen auf (ab dem 16. Jahrhundert). Die noch heute übliche Bezeichnung $i = \sqrt{-1}$ stammt von Leonard Euler (1777). Ihm verdanken wir die fundamentale Identität (1748)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x ,$$

welche die Geometrie der Ebene mit der Analysis verbindet. Die Kreiszahl π , definiert als die kleinste positive reelle Lösung der Euler-Identität $e^{i\pi} + 1 = 0$, läßt sich nur über die komplexen Zahlen verstehen. Insbesondere werden sämtliche trigonometrische Beziehungen sowie Schwingungen und Wellen, und allgemein die Fourier-Transformation, letztlich auf Eigenschaften von Funktionen im Komplexen zurückgeführt.

Im Komplexen zeigt sich ein faszinierendes Zusammenspiel von Algebra und Analysis. Das wohl wichtigste Beispiel ist der

Theorem 0.1 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten zerfällt vollständig in Linearfaktoren.*

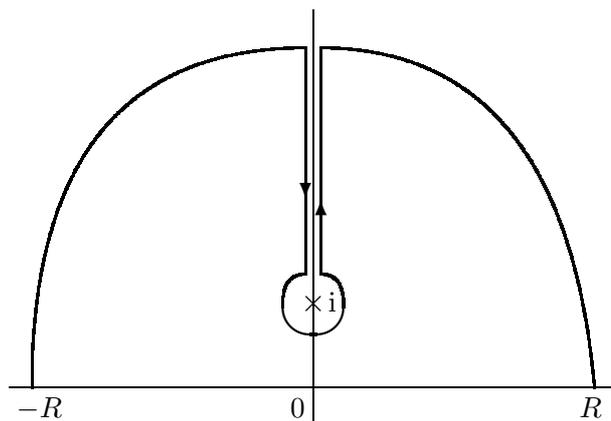
Alle Beweise benutzen an irgendeiner Stelle Stetigkeitsargumente, und dann Eigenschaften stetiger Funktionen wie Zwischenwertsatz oder Extremwertsatz, d.h. Konzepte der Analysis. Umgekehrt ist eines der Ziele der Vorlesung zu sehen, wie die Lösung analytischer Probleme (Berechnung gewisser Integrale) auf die Lösung algebraischer Gleichungen zurückgeführt wird.

Die entscheidenden Schritte, die wir erarbeiten werden, sollen hier kurz skizziert werden. Es geht um Integrale gutartiger Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $U \subseteq \mathbb{C}$. Da \mathbb{C} nicht angeordnet ist, braucht das Integral weitere Daten, nämlich eine (zumindest stetige) Kurve, über die die Funktion integriert wird. Wir werden beweisen, daß ein solches Kurvenintegral unter gewissen Bedingungen nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve abhängt, nicht aber vom genauen Verlauf der Kurve. Das bleibt im wesentlichen solange richtig, wie die Kurve keine Singularitäten der zu integrierenden Funktion trifft. Das kann man ausnutzen, um dem Integrationsweg einen Verlauf zu geben, der deutlich einfacher zu behandeln ist.

Nehmen wir $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Wählen wir als Kurve die reelle Achse, so entsteht das Integral

$$I := \int_{\mathbb{R}} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} .$$

Nach Einführung endlicher Grenzen handelt es sich um eines der Grundintegrale mit Stammfunktion $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$, aus der man sofort $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ gewinnt. Wir gehen jedoch anders vor, um auch wesentlich kompliziertere Integrale zu lösen. Der orientierte Integrationsweg \mathbb{R} wird in der komplexen Ebene nach oben deformiert, so weit wie möglich außerhalb eines Halbkreises mit Mittelpunkt 0 und Radius $R \rightarrow \infty$. Das geht nur bedingt, da die Kurve nicht über die Singularität bei $z_0 = i$, also die Lösung von $z^2 + 1 = 0$ in der oberen Halbebene, hinwegkommt. Der Weg sieht dann ungefähr so aus:



Man kann sich überlegen:

- Für $R \rightarrow \infty$ tragen die beiden großen Viertelkreise zum Integral nichts bei.
- Die Kurvenintegrale oberhalb i werden in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so daß ihre Beiträge sich gegenseitig wegheben. Vergleiche $\int_a^b dx f(x) + \int_b^a dx f(x) = 0$.

Somit verbleibt nur das Kurvenintegral über den kleinen (etwas deformierten) Kreis $\gamma_\epsilon(i)$ mit Mittelpunkt i und Radius ϵ :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\gamma_\epsilon(i)} \frac{dz}{1+z^2}$$

Nun gilt $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z+i} \cdot \frac{1}{z-i}$. Auf $\gamma_\epsilon(i)$ ist $z \approx i$, so daß wir den ersten Faktor (näherungsweise) ersetzen dürfen durch $\frac{1}{z+i} \mapsto \frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i}$, also eine Konstante, die sich vor das Integral zieht:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \int_{\gamma_\epsilon(i)} \frac{dz}{z-i}$$

(Bemerkung: Die Gleichung gilt wirklich exakt!) Im verbleibenden Integral können wir natürlich nicht $z = i$ setzen. Das Integral läßt sich aber direkt ausrechnen durch die Parametrisierung $z = i + \epsilon e^{it}$. Wenn t das Intervall $[0, 2\pi]$

durchläuft, durchläuft z den Kreis $\gamma_\epsilon(i)$. Deshalb gilt nach Substitutionsregel

$$\int_{\gamma_\epsilon(i)} \frac{dz}{z-i} = \int_0^{2\pi} \frac{d(\epsilon e^{it})}{\epsilon e^{it}} = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i .$$

Es folgt (das schon bekannte Ergebnis)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i = \pi .$$

Wichtig ist aber, daß das Verfahren identisch für alle anderen Funktionen $f(z) = \frac{1}{z-i} \cdot g(z)$ funktioniert, für die $g(z)$ keine Singularitäten in der oberen Halbebene hat. In jedem solchen Fall zieht sich $g(i)$ aus dem Integral heraus. Eine wichtige Beispielklasse ist $g(z) = \frac{e^{iaz}}{z+1}$ für $a \geq 0$, was auf die sofort lösbaren Integrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{dz e^{iaz}}{1+z^2} = 2\pi i g(i) = 2\pi i \cdot \frac{e^{ia \cdot i}}{i+i} = \pi e^{-a}$$

führt. Nach Einschränkung auf den Realteil gewinnen wir ohne zusätzlichen Aufwand das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \cos(ax)}{1+x^2} = \frac{\pi}{e^a} .$$

Dieses Ergebnis kann nicht durch partielle Integration oder Substitution erhalten werden. Hier zeigt sich die Mächtigkeit der Lokalisierung komplexer Integrale an ihren Singularitäten (welche oft algebraisch bestimmbar sind).

Ersetzt man den Punkt i durch eine beliebige komplexe Zahl z (die belanglose Integrationsvariable heiße nun w) und wiederholt alle Schritte, so wird man auf die *Cauchysche Integralformel* geführt:

$$2\pi i g(z) = \int_{\gamma_\epsilon(z)} \frac{dw g(w)}{w-z} .$$

Wieder ist Radius ϵ und sogar die Form der Kurve $\gamma_\epsilon(z)$ unerheblich, solange keine Singularitäten von $g(w)$ getroffen werden und die einzige Singularität $w = z$ von $\frac{g(w)}{w-z}$ einmal umrundet wird. Aus einer solchen Darstellung der (gutartigen!) Funktion g werden wir unzählige Konsequenzen ziehen, von denen sich viele gravierend von vertrauten Eigenschaften reeller Funktionen unterscheiden! Gelegentlich vererben sich diese Eigenschaften doch ins Reelle und erlauben so ein tieferes Verständnis mancher Merkwürdigkeiten. Letztlich sind es zwei Fakten, je einer aus Analysis und Algebra, auf denen alle Besonderheiten beruhen:

- Es handelt sich um höherdimensionale Analysis, wo Integrale über *Kurven* im \mathbb{R}^n erforderlich sind.
- Genau im \mathbb{R}^2 kann man Vektoren $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ als Elemente eines Körpers \mathbb{C} auffassen, die eine *Division durch Vektoren* $\neq 0$ erlaubt.

Teil I

Wiederholung: Komplexe Zahlen

1 Komplexe Zahlen als Körper

Die komplexen Zahlen stellen eine Erweiterung der reellen Zahlen dar, in der die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ lösbar ist. Für den zu bestimmenden Erweiterungskörper \mathbb{C} der reellen Zahlen fordern wir:

- i) $z^2 + 1 = 0$ ist lösbar, und i bezeichne eine Lösung dieser Gleichung.
- ii) Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt auch $x \in \mathbb{C}$.

Dann ist für $x, y \in \mathbb{R}$ auch $z := x + iy \in \mathbb{C}$. Die Körperaxiome (insbesondere Kommutativität und Distributivität) sowie $i^2 = -1$ liefern für $x, y, u, v \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(x + iy) + (u + iv) &= (x + u) + i(y + v) , \\ (x + iy) \cdot (u + iv) &= (xu - yv) + i(xv + yu) .\end{aligned}\tag{*}$$

Damit ist die Menge der Elemente der Form $x + iy$ abgeschlossen unter Addition und Multiplikation. Aus $(x + iy) = (u + iv)$ folgt $(x - u)^2 = -(y - v)^2$, also $x = u$ und $y = v$. Die beiden reellen Zahlen x, y in $z = x + iy$ sind durch z eindeutig definiert.

Satz 1.1 *Die mit der Addition und Multiplikation aus (*) versehene Menge $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ bildet einen Körper, den Körper der komplexen Zahlen.*

Beweis. Es sind die Körperaxiome zu überprüfen, nämlich:

- i) $(\mathbb{C}, +)$ ist kommutative Gruppe mit neutralem Element 0 und zu $a \in \mathbb{C}$ inversem Element $-a$.
- ii) $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist kommutative Gruppe bezüglich der Multiplikation, mit neutralem Element 1 und zu $a \in \mathbb{C}^\times$ inversem Element $a^{-1} = \frac{1}{a}$.
- iii) Es gelten alle Distributivgesetze.

Man findet:

- $0 = 0 + i0$ ist das neutrale Element der Addition.
- $1 = 1 + i0$ ist das neutrale Element der Multiplikation.
- $-z = -x - iy$ ist bezüglich der Addition das zu $z = x + iy$ inverse Element.
- Nicht so offensichtlich ist das zu $z = x + iy \neq 0$ bezüglich der Multiplikation inverse Element: Dieses ist gegeben durch $z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$. Entscheidend dabei ist $x^2 + y^2 \neq 0$ für alle $z = x + iy \neq 0$.

Durch Nachrechnen zeigt man die Distributivgesetze. □

Allerdings läßt sich in \mathbb{C} keine *Anordnung* definieren, also eine ausgezeichnete Teilmenge \mathbb{C}_+^\times positiver Elemente. Folglich sind je zwei komplexe Zahlen *nicht vergleichbar!* Gäbe es in \mathbb{C} eine Relation $>$, so wäre sowohl $1 = 1^2 > 0$ als auch $-1 = i^2 > 0$, und dann $0 = 1 + (-1) > 0$, Widerspruch. Es kann jedoch der Abstand komplexer Zahlen über den Betrag verglichen werden.

Definition 1.2 Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt

- $\operatorname{Re}(z) := x \in \mathbb{R}$ der *Realteil* von z ,
- $\operatorname{Im}(z) := y \in \mathbb{R}$ der *Imaginärteil* von z
- $\bar{z} := x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*.
- $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ der *Betrag* von z .

Die Abbildung $z \mapsto \bar{z}$ heißt *komplexe Konjugation*.

Dabei ist mit $\sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$ die eindeutig bestimmte nichtnegative Wurzel gemeint. Damit folgt für $z \neq 0$ die Identität $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w}, & \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w}, \\ z + \bar{z} &= 2\operatorname{Re}(z), & z - \bar{z} &= 2i\operatorname{Im}(z), \\ \bar{\bar{z}} &= z, & z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z = \bar{z}. \end{aligned}$$

Beispiel 1.3 Es sei $z = \frac{3+4i}{1-2i}$, gesucht sind $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ und $|z|$. Dazu schreiben wir:

$$z = \frac{3 + 4i}{1 - 2i} = \frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{1}{5}((3 \cdot 1 - 4 \cdot 2) + i(3 \cdot 2 + 4 \cdot 1)) = -1 + 2i.$$

Somit $\operatorname{Re}(z) = -1$, $\operatorname{Im}(z) = 2$ und $|z| = \sqrt{5}$. ◁

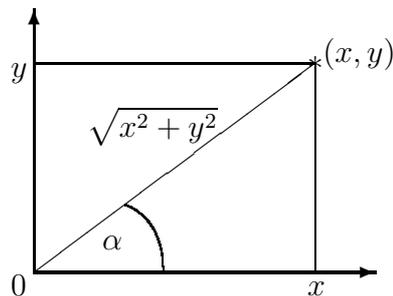
Satz 1.4 Für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

- i) $|z| > 0 \Leftrightarrow z \neq 0$,
- ii) $|\bar{z}| = |z|$,
- iii) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$,
- iv) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
- v) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (*Dreiecksungleichung*).

Beweis. i),ii),iii) sind klar. Zu iv) betrachte $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$.
Bleibt die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\stackrel{iii)}{\leq} |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Es ist nun sehr intuitiv, eine komplexe Zahl $z = x + iy$ als Punkt (x, y) in einem kartesischen Koordinatensystem in der Ebene (Gaußsche Zahlenebene) darzustellen. Nach Pythagoras ist dann $|z|$ gerade der Abstand dieses Punktes vom Ursprung $0 = (0, 0)$.

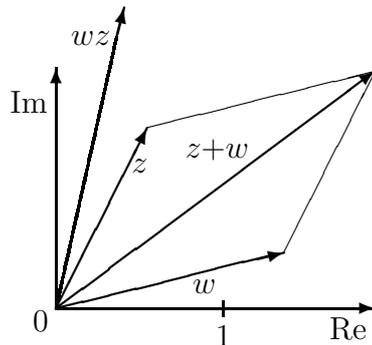


Ist $z \neq 0$, dann ergeben sich Real- und Imaginärteil in Polarkoordinaten zu $x = |z| \cos \alpha$ und $y = |z| \sin \alpha$, so daß wir folgende Darstellung einer komplexen Zahl erhalten:

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad 0 \leq \alpha < 2\pi.$$

Genau genommen ist diese Darstellung in der falschen Reihenfolge eingeführt: Als erstes wird die komplexe Exponentialfunktion eingeführt, dann muß man die Möglichkeit einer Umkehrfunktion (des Logarithmus) diskutieren, d.h. eine Darstellung $z = e^{t+i\alpha} = e^t \cdot e^{i\alpha}$. Wegen der fehlenden Monotonie ist das aufwendiger als im Reellen, insbesondere ist der Winkel α nicht eindeutig. Nun *definiert* man Sinus und Cosinus über die Eulersche Formel und setzt $r = e^t$.

Die Addition $(x, y) + (u, v) := (x+u, y+v)$ entspricht geometrisch der Addition von Vektoren:



Die Dreiecksungleichung $|z+w| \leq |z|+|w|$ entspricht der Tatsache, daß in einem Dreieck die Summe zweier Seitenlängen größer ist als die Länge der verbleibenden Seite.

Die Multiplikation schreibt man am besten in Polarkoordinaten: Ist $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ und $w = |w|(\cos \beta + i \sin \beta)$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|((\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)) \\ &= |z||w|(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) , \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Additionstheoreme verwendet wurden. Wieder ist es eigentlich umgekehrt: Man beweist die Additionstheoreme über die Multiplikation im Komplexen! Damit ergibt sich in Polarkoordinaten das Produkt zw durch Multiplikation der Radien und Addition der Winkel von z und w . Alternativ kann man sich überlegen, daß für festes $w \in \mathbb{C}$ die durch $f : z \mapsto zw$ definierte Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ wegen $|f(z_1 - z_2)| = |w| |z_1 - z_2|$ eine *Ähnlichkeitsabbildung* ist: Alle Längen werden um $|w|$ gestreckt/gestaucht, ansonsten bleiben die Winkel zwischen Vektoren erhalten. Da der Ursprung erhalten bleibt und 1 in w überführt wird, ist die Abbildung $z \mapsto wz$ für $w = |w|(\cos \beta + i \sin \beta)$ zusammengesetzt aus einer Drehung von z um den Ursprung mit Drehwinkel β und einer anschließenden Skalierung um den Faktor $|w|$.

2 Folgen und Reihen in \mathbb{C}

Es sei

$$K_\epsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \epsilon\}$$

die *offene Kreisscheibe* in \mathbb{C} mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}$ und Radius $\epsilon > 0$. Ihr Abschluß, die abgeschlossene Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und Radius ϵ wird mit $\overline{K_\epsilon(a)} := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq \epsilon\}$ bezeichnet (eine Bezeichnungskollision mit der komplexen Konjugation kommt eigentlich nicht vor).

Definition 2.1 i) Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt *Umgebung* eines Punktes $a \in \mathbb{C}$, wenn es eine offene Kugel $K_\epsilon(a) \subseteq U$ gibt. Speziell heißt $K_\epsilon(a)$ die ϵ -*Umgebung* von a .

ii) Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt *offen*, wenn jeder Punkt $x \in U$ eine in U enthaltene ϵ -Umgebung besitzt, d.h. $\forall x \in U \exists \epsilon > 0 : K_\epsilon(x) \subseteq U$.

Außerdem werden \mathbb{C} selbst und die leere Menge $\emptyset \subseteq \mathbb{C}$ als offen erklärt.

iii) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist.

iv) Sei $Y \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ heißt *Randpunkt* von Y , wenn es in jeder Umgebung von z sowohl Punkte aus Y als auch aus $\mathbb{C} \setminus Y$ gibt. Die Menge aller Randpunkte von Y heißt der *Rand* von Y und wird mit ∂Y bezeichnet.

Wir erinnern (hier ohne Beweis) an folgende Eigenschaften offener und abgeschlossener Teilmengen komplexer Zahlen:

Satz 2.2 In \mathbb{C} gilt:

- i) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.
- ii) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.
- iii) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- iv) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- v) Hausdorffsches Trennungsaxiom: Zu je zwei Punkten $w, z \in \mathbb{C}$ mit $w \neq z$ gibt es disjunkte offene Umgebungen U von w und V von z , d.h. $U \cap V = \emptyset$.

Definition 2.3 Eine Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in \mathbb{C}$ gibt mit folgenden äquivalenten Eigenschaften:

- i) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_k - a| < \epsilon$ für alle $k \geq N$.
- ii) Zu jeder Umgebung U von a gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $z_k \in U$ für alle $k \geq N$.
- iii) Es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k - a| = 0$.

Im Konvergenzfall heißt $a \in \mathbb{C}$ der *Grenzwert* der Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, und man schreibt $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = a$.

In kurzen Beweisen zeigt man: Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig. Jede konvergente Folge ist beschränkt, d.h. es gibt ein $M \geq 0$ mit $|z_k| \leq M$ für alle M .

Definition 2.4 Eine Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt *Cauchy-Folge*, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $|z_n - z_m| < \epsilon$ für alle $m, n \geq N$.

Aus der Dreiecksungleichung $|z_n - z_m| \leq |z_n - a| + |z_m - a|$ folgt sofort, daß jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist. Es gilt jedoch auch die Umkehrung, zurückgeführt auf die Vollständigkeit der reellen Zahlen:

Satz 2.5 In den reellen Zahlen sind äquivalent:

- i) Zu jeder Intervallschachtelung $\{[a_k, b_k]\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k]$ und $|b_k - a_k| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in [a_k, b_k]$ für alle k .
- ii) Jede beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum und ein Infimum in \mathbb{R} .
- iii) Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine in \mathbb{R} konvergente Teilfolge (Bolzano-Weierstraß).
- iv) Jede Cauchy-Folge in \mathbb{R} konvergiert.
- v) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(a)f(b) < 0$ hat in $]a, b[$ eine Nullstelle (Zwischenwertsatz).

Folgerung 2.6 Die komplexen Zahlen sind vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge komplexer Zahlen konvergiert.

Beweis. Nach Satz 1.4.iii) ist die Folge der Realteile eine reelle Cauchy-Folge:

$$|\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z_m)| = |\operatorname{Re}(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m| < \epsilon,$$

d.h. es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_k) = x$. Analog konvergiert die Folge der Imaginärteile, $\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_k) = y$. Schließlich konvergiert z_k gegen $x + iy$, denn $|z_k - (x + iy)| = |\operatorname{Re}(z_k) - x + i(\operatorname{Im}(z_k) - y)| \leq |\operatorname{Re}(z_k) - x| + |\operatorname{Im}(z_k) - y| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. \square

Satz 2.7 (Bolzano-Weierstraß) i) Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine in \mathbb{C} konvergente Teilfolge.

ii) Es sei $A \subseteq \mathbb{C}$. Jede beliebige Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten aus A besitzt genau dann eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A , wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

Bewmerkungen zum Beweis. i) zeigt man mittels Zurückführung auf reelle (Teil-)Folgen. ii) verwendet zusätzlich eine nützliche Charakterisierung abgeschlossener Mengen: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede in \mathbb{C} konvergente Folge von Punkten $z_k \in A$ gilt, daß der Grenzwert in A liegt. \square

Wir erinnern an elementare Rechenregeln für konvergente Folgen:

Satz 2.8 Es seien $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$. Dann gilt:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{z_n} = \overline{z}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z)$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z)$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = z + w$

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) = zw$

iv) Ist $w \neq 0$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $w_n \neq 0$ für alle $n \geq N$, und
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_{n+N}}{w_{n+N}} = \frac{z}{w}$

Für Nullfolgen gibt es mehrere Kriterien:

Satz 2.9 i) Für eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen gebe es ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $0 < q < 1$, so daß für alle $n \geq N$ gilt $z_n \neq 0$ und $|\frac{z_{n+1}}{z_n}| \leq q$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$. Insbesondere ist $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$ für alle $z \in K_1(0)$.

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ und alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. i) klar.

ii) Betrachte $n > 2k + 1$ und $|z| = 1 + x$ mit $x > 0$. Dann ergibt die Binomialentwicklung

$$(1+x)^n > \binom{n}{k+1} x^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} x^{k+1} > n \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

also $\left|\frac{n^k}{z^n}\right| < \frac{2^k(k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{n}$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \max\left(\frac{2^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{\epsilon}, 2k+1\right)$, dann folgt $\left|\frac{n^k}{z^n}\right| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. \square

Definition 2.10 Eine Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definiert eine *Folge der Partialsummen* $(\sum_{k=0}^n z_k)_{n \in \mathbb{N}}$, welche man *Reihe* nennt, mit $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ bezeichnet und wieder auf Konvergenz untersuchen kann. Im Konvergenzfall bezeichnet man den Grenzwert mit demselben Symbol, $\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n z_k$. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergiert.

Beispiel 2.11 (Geometrische Reihe) Die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (hier mit Konvention $z^0 = 1$) führt auf die Folge $(\sum_{k=0}^n z^k)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{1-z^{n+1}}{1-z})_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen, welche genau für $|z| < 1$ (absolut) konvergiert mit Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$. \triangleleft

Die folgenden Konvergenzkriterien sollten bekannt sein:

Satz 2.12 (Konvergenzkriterien) Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ komplexer Zahlen konvergiert, falls eines der folgenden Kriterien erfüllt ist:

- (Cauchy-K., äquivalent zur Konvergenz) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\sum_{k=n}^m z_k| < \epsilon$ für alle $m \geq n \geq N$.
- (Majoranten-K., absolute Konvergenz) Es gibt eine konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $|z_k| \leq a_k$ für alle $k \geq p$. Ferner gilt die Dreiecksungleichung $|\sum_{k=p}^{\infty} z_k| \leq \sum_{k=p}^{\infty} |z_k| \leq \sum_{k=p}^{\infty} a_k$.
- (Quotienten-K., absolute Konvergenz) Es gibt ein $p \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq p$ gilt $z_n \neq 0$ und $|\frac{z_{n+1}}{z_n}| \leq q$ für ein festes $0 < q < 1$.
- (Wurzel-K., absolute Konvergenz) Es gibt ein $p \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq p$ gilt $\sqrt[n]{|z_n|} \leq q$ für ein festes $0 \leq q < 1$.

Die für uns wichtigste Beispielklasse sind die Potenzreihen:

Definition 2.13 Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n$ zu fest gewählten $w, a_n \in \mathbb{C}$ und variablem $z \in \mathbb{C}$ heißt *Potenzreihe*.

Zur Konvergenzuntersuchung stehen obige Kriterien zur Verfügung, wobei die Konvergenz im allgemeinen von z abhängen wird, und zwar:

Satz/Definition 2.14 i) Konvergiert eine Potenzreihe $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n$ in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, dann konvergiert sie absolut in jedem Punkt der offenen Kreisscheibe $K_r(w)$ mit $r = |z_0 - w|$.

ii) Die somit existierende Zahl $R(P) := \sup\{r \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ konvergiert}\} \in [0, \infty]$ heißt **Konvergenzradius** von $P(z)$.

iii) Für den Konvergenzradius gilt die Formel von Cauchy-Hadamard $R(P) = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Beweis. i) Die Folge $(a_n(z_0 - w)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge und deshalb beschränkt, $|a_n(z_0 - w)^n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $|a_n(z - w)^n| = q^n |a_n(z_0 - w)^n| \leq q^n M$ mit $q := \left| \frac{z-w}{z_0-w} \right| = \frac{|z-w|}{r} < 1$. Damit besitzt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n$ die konvergente Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} q^n M$ und konvergiert in jedem $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-w| < r$ absolut.

iii) Sei $r := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Nach Definition von \limsup gibt es unendlich viele a_n mit $\sqrt[n]{|a_n|} > r - \epsilon$, also unendlich viele a_n mit $|a_n| > (r - \epsilon)^n$. Wählen wir $z - w = \frac{1}{r - \epsilon} > R(P)$, dann kann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n |z - w|^n$ nicht konvergieren. Umgekehrt gibt es nur endlich viele a_n mit $\sqrt[n]{|a_n|} > r + \epsilon$, also mit $a_n > (r + \epsilon)^n$. Wählen wir $z - w = \frac{1}{r + \epsilon}$, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n |z - w|^n$ für jedes $\epsilon > 0$. \square

Beispiel 2.15 Wichtige Potenzreihen sind ($\alpha \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{R}$):

- Exponentialreihe $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ mit $R(\exp) = \infty$ nach Quotientenkriterium.
- Binomialreihe $B_\alpha(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ mit $R(B_\alpha) = 1$ nach Quotientenkriterium. Dabei ist $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.
- Polylogarithmus-Reihe $\text{Li}_s(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$ mit $R(\text{Li}_s) = 1$ nach Wurzelkriterium. \triangleleft

Ausblick 2.16 Wir werden uns die Exponentialreihe noch genauer ansehen und einige Identitäten erarbeiten wie $\exp(\text{Li}_1(z)) = \frac{1}{1-z}$ für $z \in K_1(0)$; deshalb gilt $\text{Li}_1(z) = -\text{Log}(1-z)$, wobei Log der sogenannte Hauptzweig des komplexen Logarithmus ist. Damit lassen sich echt komplexe Potenzen erklären über $z^w = \exp(w \text{Log}(z))$. Es wird sich dann $B_\alpha(z) = (1+z)^\alpha$ ergeben. \diamond

Solche Identitäten beruhen oft auf den folgenden beiden Sätzen:

Satz 2.17 (Umordnungssatz) Jede Umordnung $\sum_{n=0}^{\infty} z_{\sigma(n)}$ einer absolut konvergenten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert absolut und hat denselben Grenzwert. (Dabei ist $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion.)

Satz 2.18 (Cauchy-Produkt) Konvergieren die Potenzreihen $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n$ und $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-w)^n$ im Punkt $z \in \mathbb{C}$ absolut, so gilt

$$P(z) \cdot Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) (z-w)^n .$$

Für die Beweise sei auf Analysis I verwiesen.

Ausblick 2.19 Manchmal fallen (Potenz-)Reihen innerhalb des Konvergenzkreises mit schon anders bekannten Funktionen zusammen, wie z.B. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Die Funktion auf der rechten Seite hat jedoch einen größeren Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Uns wird die Frage beschäftigen, ob es verschiedene Funktionen geben kann, die eine (z.B. in einer Kreisscheibe) gegebene Funktion fortsetzen, wobei der Übergang (genügend oft) differenzierbar sein möge. Wir werden sehen, daß es im Reellen selbst bei unendlich oft differenzierbaren Funktionen keinerlei Eindeutigkeit geben kann, während im Komplexen zwei nur einmal differenzierbare Fortsetzungen immer dieselben sind! \diamond

Beispiel 2.20 Die durch die Reihe (aber keine Potenzreihe) $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ definierte Funktion heißt *Riemannsche Zeta-Funktion*. Man überlegt sich, daß die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 1$ konvergiert. Man kann die Zeta-Funktion jedoch (eindeutig!) fortsetzen zu $\zeta : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, d.h. die harmonische Reihe ist die einzige dieser Klasse, der man keinen Sinn geben kann. Dagegen findet man so überraschende Werte $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ und $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ (wo die Reihe sinnlos ist). An allen negativen geraden ganzen Zahlen verschwindet ζ . Die berühmte *Riemannsche Vermutung*, deren Beweis mit 10⁶ \$ belohnt wird, besagt, daß für sämtliche anderen Nullstellen $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2, -4, -6, \dots\}$ mit $\zeta(z) = 0$ gilt $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$. \triangleleft

3 Stetigkeit

Sei abkürzend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{K}$, wobei der Definitionsbereich D eine beliebige Menge ist, heißt *Funktion*. Uns interessieren Definitionsbereiche $D \subseteq \mathbb{K}$. Diese verstehen wir mit der *Teilraumtopologie*, in der die offenen Teilmengen von D genau die Schnitte $D \cap U$ mit offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{K}$ sind. In diesem Sinn ist $D = D \cap \mathbb{K}$ stets offen, auch wenn es als Teilmenge von \mathbb{K} das nicht sein muß! Entsprechend sind Umgebungen von Punkten aus D erklärt.

Definition 3.1 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ oder $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *stetig* im Punkt $a \in D$, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- i) Zu jeder Umgebung $U \subseteq \mathbb{K}$ von $f(a)$ gibt es eine Umgebung $V \subseteq D$ von a mit $f(V) \subseteq U$.
- ii) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $z \in D$ mit $|z - a| < \delta$ gilt: $|f(z) - f(a)| < \epsilon$.
- iii) Für jede gegen a konvergente Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten $z_n \in D$ gilt: $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f(a)$.

Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ heißt stetig auf ganz D , wenn sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist. Das ist äquivalent zu:

- iv) Das Urbild $f^{-1}(U)$ jeder offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{K}$ ist offen in D .
- v) Das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq \mathbb{K}$ ist abgeschlossen in D .

Die Äquivalenzen sollen hier nur kurz skizziert werden.

i) \Rightarrow ii) Wähle $U = K_\epsilon(f(a))$; es gibt $K_\delta(a) \subseteq V$.

ii) \Rightarrow i) Betrachte $K_\epsilon(f(a)) \subseteq U$ und setze $V = K_\delta(a)$.

ii) \Rightarrow iii) Zu ϵ , damit δ , und wegen Konvergenz der Folge gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - a| < \delta$ für alle $n \geq N$. Dann ist aber $|f(z_n) - f(a)| < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

iii) \Rightarrow ii) durch Widerspruch zur Unstetigkeit: Es gibt ein $\epsilon > 0$, so daß für alle $\delta > 0$ gilt: Aus $|z - a| < \delta$ folgt $|f(z) - f(a)| \geq \epsilon$. Damit konstruiert man eine gegen a konvergente Folge, deren Funktionswerte nicht gegen $f(a)$ konvergieren.

(globale Stetigkeit) \Rightarrow iv) Im Fall $f^{-1}(U) = \emptyset$ ist alles klar. Ansonsten nehme $a \in V := f^{-1}(U)$ beliebig. Da $f(a) \in U$ und U offen, insbesondere Umgebung von $f(a)$ ist, gibt es $K_\delta(f(a)) \subseteq U$. Dann ist aber $K_\delta(a) \subseteq V$, und V offen.

iv) \Rightarrow (globale Stetigkeit) In Umgebung U von $f(a)$ wähle $K_\epsilon(f(a)) \subseteq U$ und setze $V := f^{-1}(K_\epsilon(f(a)))$. Wegen $a \in V$ und V offen ist V Umgebung von a mit $f(V) \subseteq U$.

iv) \Leftrightarrow v) durch Komplementbildung.

Am einfachsten über das Folgenkriterium beweist man:

Satz 3.2 i) *Summen, Produkte und Kompositionen stetiger Funktionen sind stetig.*

ii) *Die Bildung des Inversen $\mathbb{C}^\times \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ ist stetig.*

Beispiel 3.3 Folgende Funktionen sind stetig:

- Komplexe Konjugation $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
- Betrag sowie Bildung von Real- und Imaginarteil $|\cdot|, \operatorname{Re}, \operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$
- Polynome $\sum_{k=0}^n a_k z^k$

- Das Inverse $\frac{1}{f}$ einer stetigen nullstellenfreien Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
- rationale Funktionen $\frac{\sum_{k=0}^n a_k z^k}{\sum_{l=0}^m b_l z^l}$ außerhalb der Nullstellen des Nennerpolynoms

Satz 3.4 Jede Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n$ ist im Inneren ihres Konvergenzkreises stetig.

Beweis. Es sei $R(P)$ der Konvergenzradius von $P(z)$ und $|z_0 - w| < r < R(P)$. Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n < \frac{\epsilon}{3}$. Da das Polynom $\sum_{n=0}^{N-1} a_n(z-w)^n$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $\left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n(z-w)^n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n(z_0-w)^n \right| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$. Gegebenenfalls durch weitere Verkleinerung von δ erreichen wir $\delta < r - |z_0 - w|$. Dann ist $|z - w| \leq |z - z_0| + |z_0 - w| < \delta + |z_0 - w| < r$, so daß

$$|P(z) - P(z_0)| \leq \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n(z-w)^n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n(z_0-w)^n \right| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n(z-w)^n| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n(z_0-w)^n| < \epsilon. \quad \square$$

Stetige Funktionen haben folgende wichtige Vererbungseigenschaften:

Satz 3.5 Stetige Funktionen bilden

- kompakte Mengen in kompakte Mengen ab,*
- zusammenhängende Mengen in zusammenhängende Mengen ab,*
- wegzusammenhängende Mengen in wegzusammenhängende Mengen ab.*

Wir erinnern an diese topologischen Strukturen:

Satz 3.6 Sei V ein endlich-dimensionaler reeller oder komplexer normierter Vektorraum, z.B. $V = \mathbb{R}$ oder $V = \mathbb{C}$ zusammen mit dem Betrag. Dann sind für eine Teilmenge $A \subseteq V$ äquivalent:

- A ist kompakt, d.h. zu jeder Überdeckung $\bigcup_{i \in I} U_i \supseteq A$ durch offene Teilmengen $U_i \subseteq V$ (mit I einer beliebigen Indexmenge) gibt es endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $A \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.*
- A ist folgenkompakt, d.h. jede Folge von Punkten aus A besitzt eine in A konvergente Teilfolge.*

iii) A ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweisskizze. i) \Rightarrow ii) Gäbe es keine Häufungspunkte, so hat jeder Punkt $x \in A$ eine Umgebung U_x , die nur endlich viele Punkte der Folge enthält. Aber $A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x$ läßt sich auf $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ reduzieren, so daß die Folge nur endlich viele Punkte enthielte, Widerspruch. Aus den $\frac{1}{n+1}$ -Umgebungen eines somit existierenden Häufungspunkts wählt man die Teilfolge aus.

ii) \Rightarrow iii) klar.

iii) \Rightarrow i) Man zeigt zunächst, daß abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen selbst kompakt sind. Es genügt dann, die Kompaktheit abgeschlossener Rechtecke (allgemein: Quader) zu zeigen, was mittels Intervallschachtelungsprinzip gelingt. \square

Beweis von Satz 3.5.i) Sei $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von $f(A)$. Aus der Stetigkeit von f folgt, daß $V_i := f^{-1}(U_i)$ offen ist. Dann ist $A \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$, aber tatsächlich genügen endlich viele V_i zur Überdeckung: $A \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$, also $f(A) \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. \square

Ausblick 3.7 Hier eine Warnung. Wir sehen, daß für stetige Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die Bilder *beschränkter abgeschlossener Mengen* wieder beschränkt und abgeschlossen sind. Ohne die Beschränktheit wäre die Aussage falsch. Die durch $f(z) = \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}}$ definierte Funktion ist stetig auf ganz \mathbb{C} und bildet die abgeschlossene Menge \mathbb{C} auf die offene Kreisscheibe $K_1(0)$ ab.

Auch offene Mengen werden unter stetigen Funktionen nicht notwendig auf offene Mengen abgebildet. Ein Gegenbeispiel ist die konstante Funktion $f(z) = 1$, die eine beliebige Menge auf eine abgeschlossene Menge schickt. Wir werden später sehen, daß die konstanten Funktionen im wesentlichen die einzigen Gegenbeispiele in der Klasse der gutartigen komplexwertigen Funktionen sind. \diamond

Der Begriff ‘zusammenhängend’ ist nicht sehr anschaulich. ‘Wegzusammenhängend’ ist einfacher zu verstehen (daraus folgt zusammenhängend). Für offene Mengen ist beides äquivalent. Ebenso für Teilmengen von \mathbb{R} : hier sind die (weg)zusammenhängenden Mengen genau die Intervalle.

Definition 3.8 Eine Teilmenge X eines metrischen Raumes heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $a, b \in X$ eine stetige Kurve $c : [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit $c(0) = a$ und $c(1) = b$.

Satz 3.5.iii) ist völlig klar, denn $f \circ c : [0, 1] \rightarrow f(X)$ ist ein stetiger Weg zwischen $f(a)$ und $f(b)$.

Definition 3.9 Eine Teilmenge X eines metrischen Raumes heißt *nicht zusammenhängend*, wenn es offene nichtleere Teilmengen U, V gibt mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$.

Beweis von Satz 3.5.ii) Wäre $f(X)$ nicht zusammenhängend, so gäbe es disjunkte nichtleere offene Mengen U, V mit $f(X) = U \cup V$. Wegen der Stetigkeit von f sind $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offen, nichtleer und disjunkt, denn $f(x)$ liegt entweder in U oder in V . Somit wäre $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, Widerspruch. \square

Für stetige Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, wobei X (weg-)zusammenhängend ist, ergibt sich als Spezialfall der Zwischenwertsatz: Zu jedem $a, b \in X$ und jedem $\gamma \in [f(a), f(b)]$ oder $\gamma \in [f(b), f(a)]$ gibt es ein $c \in X$ mit $f(c) = \gamma$.

4 Die Exponentialfunktion

Satz 4.1 Die für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergente Exponentialreihe $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat folgende Eigenschaften:

i) $\exp(w) \cdot \exp(z) = \exp(w + z)$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$.
 Insbesondere existiert $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

ii) $\left| \exp(z) - \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{2|z|^{N+1}}{(N+1)!}$ für alle $|z| < 1 + \frac{N}{2}$.

Insbesondere gilt $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z)-1}{z} = 1$.

iii) $\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, insbesondere die Eulersche Zahl $e = \exp(1)$.

Beweis. i) Cauchy-Produkt für Potenzreihe in $t \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \exp(wt) \cdot \exp(zt) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \frac{z^k}{k!} \right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w^{n-k} z^k \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w+z)^n t^n}{n!} = \exp((w+z)t). \end{aligned}$$

ii) Für $|z| \leq \frac{N+2}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \exp(z) - \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \\ &= \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{|z|}{N+2} + \frac{|z|^2}{(N+2)(N+3)} + \dots \right) \\ &\leq \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{N+2} \right)^k \leq \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2|z|^{N+1}}{(N+1)!}. \end{aligned}$$

Für $N = 1$ folgt $\left| \frac{\exp(z)-1-z}{z} \right| < |z|$ für alle $0 < |z| < \frac{3}{2}$ und damit der Grenzwert.

iii) Mit $\exp(z) = \left(\exp\left(\frac{z}{n}\right)\right)^n$ folgt

$$\begin{aligned} \left| \exp(z) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| &= \left| \left(\exp\left(\frac{z}{n}\right)\right)^n - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \\ &= \left| \left(\exp\left(\frac{z}{n}\right) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\exp\left(\frac{z}{n}\right)\right)^k \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n-k-1} \right| \\ &\leq \left| \exp\left(\frac{z}{n}\right) - \left(1 + \frac{z}{n}\right) \right| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\exp\left(\frac{|z|}{n}\right)\right)^k \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt $1 + \frac{|z|}{n} \leq \exp\left(\frac{|z|}{n}\right)$ und deshalb

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\exp\left(\frac{|z|}{n}\right)\right)^k \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^{n-k-1} \leq n \left(\exp\left(\frac{|z|}{n}\right)\right)^{n-1} \leq n \left(\exp\left(\frac{|z|}{n}\right)\right)^n = n \exp(|z|).$$

Nach ii) gilt $\left|\exp\left(\frac{z}{n}\right) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)\right| \leq 2\frac{|z|^2}{2n^2}$ für $\left|\frac{z}{n}\right| < \frac{3}{2}$, also $n \geq \frac{3}{2}|z|$ und damit insgesamt $\left|\exp(z) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \frac{|z|^2}{n^2} \cdot n \exp(|z|)$. Für $n \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung. \square

Definition 4.2 Wichtige Linearkombinationen sind:

- i) $\cosh z = \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
- ii) $\sinh z = \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- iii) $\cos z = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
- iv) $\sin z = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Diese sind definiert für alle $z \in \mathbb{C}$, nicht nur für reelle Argumente. Es gelten

$$\begin{aligned} \exp(\pm iz) &= \cos(z) \pm i \sin(z), & \exp(\pm z) &= \cosh(z) \pm \sinh(z), \\ 1 &= \cos^2(z) + \sin^2(z) = \cosh^2(z) - \sinh^2(z), \\ \cosh(w+z) &= \cosh(w) \cosh(z) + \sinh(w) \sinh(z), \\ \sinh(w+z) &= \sinh(w) \cosh(z) + \cosh(w) \sinh(z), \\ \cos(w+z) &= \cos(w) \cos(z) - \sin(w) \sin(z), \\ \sin(w+z) &= \sin(w) \cos(z) + \cos(w) \sin(z). \end{aligned}$$

Außerhalb der Nullstellen der Zähler, welche wir gleich diskutieren, definiert man

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Wir können nun die Kreiszahl π definieren:

Satz 4.3 *Eingeschränkt auf reelle Zahlen hat der Cosinus im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle, die mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet wird. Es gilt $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, bzw. $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ und damit $e^{i\pi} = -1$, $e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$ und $e^{2\pi i} = 1$.*

Beweis. Wir zeigen, daß $\cos : [0, 2] \rightarrow [-1, 1]$ streng monoton fallend ist mit $\cos 0 = 1 > 0$ und $\cos 2 < 0$. Der Zwischenwertsatz liefert dann die Existenz einer Nullstelle, aus der Monotonie folgt ihre Eindeutigkeit. Insbesondere ist $0 < \pi < 4$.

Für $x > 0$ sind die Reihen für $\cos(x)$ und $\sin(x)$ alternierend, und für $x \in]0, 2]$ bilden die Beträge der Summanden a_k in der Cosinusreihe bzw. der Sinusreihe eine streng monoton fallende Nullfolge ab $k = 1$ bzw. $k = 0$. Nach der Fehlerabschätzung im Leibniz-Kriterium für solche Reihen gilt damit für $x \in]0, 2]$

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x,$$

insbesondere ist $\cos 2 < -\frac{1}{3}$ und $\sin x > 0$ für $x \in]0, 2]$. Wegen $\cos(0) = 1$ und Zwischenwertsatz (Potenzreihen sind stetig) hat \cos eine Nullstelle in $]0, 2[$. Diese ist eindeutig: Die Additionstheoreme liefern

$$\cos x - \cos y = \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}.$$

Für $0 \leq y < x \leq 2$ ist die rechte Seite negativ, damit der Cosinus streng monoton fallend in $[0, 2]$ und kann dort höchstens eine Nullstelle besitzen. \square

Aus $e^{i(x+\frac{\pi}{2})} = ie^{ix}$ folgt nach Zerlegung nach Real- und Imaginärteil

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x, \quad \sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

und dann nach wiederholter Anwendung Verschiebungen um beliebige Vielfache von $\frac{\pi}{2}$. Es folgt, daß der reelle Cosinus genau die Nullstellen $x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hat, und der reelle Sinus genau die Nullstellen $x_k = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Weiter gilt $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ und $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, und 2π ist die kleinste Periode beider Funktionen.

Satz 4.4 $e^z = 1 \iff z = 2i\pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. (\Leftarrow) ist klar. Umgekehrt sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt $1 = |e^z| = e^x |e^{iy}| = e^x$, also $x = 0$ und dann $1 = e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Folglich ist $\cos y = 1$ und $\sin y = 0$, der Sinus liefert zunächst $y = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, wegen $\cos(0 + \pi) = -\cos(0) = -1$ und der 2π -Periodizität sind aber nur $y = 2\pi k$ Lösungen. \square

Folglich besitzt jede komplexe Zahl $z \neq 0$ eine Darstellung

$$z = r \exp(i\phi) = \exp(\ln r + i\phi)$$

mit $r \in \mathbb{R}_+^\times$ und $\phi \in \mathbb{R}$, wobei ϕ nur bis auf Addition eines Vielfachen von 2π bestimmt ist. Deshalb kann es im Komplexen keine (eindeutige) Umkehrfunktion der Exponentialfunktion geben. Man kann sich aber konsistent einschränken:

Satz 4.5 Es seien $S := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ und $\hat{S} := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi\}$ Streifen in der komplexen Ebene. Dann sind $\exp : S \rightarrow \mathbb{C}_-$ und $\exp : \hat{S} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ bijektiv, wobei $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ die geschlitzte Ebene ist (mit $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$). Die somit existierende Umkehrfunktion $\operatorname{Log} : \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{C}$ mit Bild S bzw. $\operatorname{Log} : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$ mit Bild \hat{S} heißt **Hauptzweig des komplexen Logarithmus**. Dieser ist stetig auf \mathbb{C}_- , aber nicht auf \mathbb{C}^\times . Auf \mathbb{C}_- gilt $\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i \operatorname{Arg}(z)$ mit dem **Argument** $\operatorname{Arg}(x+iy) := \operatorname{sign}(y) \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ und dem reellen Logarithmus $\ln : \mathbb{R}_+^\times \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis. Aus $\exp(z) = \exp(w)$ folgt $z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Für $z, w \in S$ oder $z, w \in \hat{S}$ ist aber $\operatorname{Im}(w - z) < 2\pi$ und dann $z = w$ als einzige Lösung von $\exp(z) = \exp(w)$ in S oder \hat{S} . Also ist \exp injektiv auf S und \hat{S} . Surjektivität folgt aus der zuvor für $z \neq 0$ gegebenen Darstellung $z = \exp(\ln r + i\phi)$, wobei $\ln r + i\phi$ für $-\pi < \phi \leq \pi$ bzw. $-\pi < \phi < \pi$ bzw. genau die Punkte in \hat{S} bzw. S parametrisiert.

Die Unstetigkeit von Log auf \mathbb{C}^\times ergibt sich z.B. daraus, daß das Bild der zusammenhängenden Menge $K_1(-2)$ unter Log nicht zusammenhängend ist. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}_-$ sind $z \mapsto \ln|z|$ (klar!) sowie Arg stetige Funktionen: Für $z = x + iy \in \mathbb{C}_-$ gilt $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \in]-1, 1]$, und $\arccos :]-1, 1] \rightarrow [0, \pi[$ ist stetig. Zwar ist sign unstetig in 0, was aber nur für $x > 0$ und $y \rightarrow 0$ zum Tragen kommt. Dann konvergiert aber $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ gegen $+1$ und $\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ gegen 0, somit auch $\operatorname{sign}(y) \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$ gegen 0. Damit ist Arg und schließlich $\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i \operatorname{Arg}(z)$ stetig auf \mathbb{C}_- . \square

Gegebenenfalls setzen wir Arg auf \mathbb{C}^\times fort durch $\operatorname{Arg}(-x) := \pi$ für $-x < 0$. Diese Fortsetzung ist dann aber nicht stetig. Die bekannte Reihendarstellung des reellen Logarithmus verallgemeinert sich genau auf den Hauptzweig:

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1.$$

Wir holen den Beweis später nach, wenn Differenzierbarkeit bereitsteht.

Jeder andere Logarithmus ergibt sich aus dem Hauptzweig durch Verschiebung $\log_{(k)}(z) := \operatorname{Log}(z) + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, und für alle k gilt $\exp(\log_{(k)}(z)) = z$ (mit $z \in \mathbb{C}^\times$ oder $z \in \mathbb{C}_-$). Diese Mehrdeutigkeit vererbt sich zur Mehrdeutigkeit komplexer Potenzen

$$(z^w)_{(k)} := \exp(w \log_{(k)}(z)) = \exp(w \operatorname{Log}(z) + 2k\pi i w) = \exp(w \operatorname{Log}(z)) e^{2k\pi i w}.$$

Wieder kann $z \in \mathbb{C}^\times$ gewählt werden; dann sind die komplexen Potenzen jedoch nicht stetig auf \mathbb{C}^\times . Schränkt man auf $z \in \mathbb{C}_-$ ein, so hat man Stetigkeit für jedes k . Bleibt man innerhalb eines Zweiges, so gilt im allgemeinen nicht die Relation $((z_1 \cdot z_2)^w)_{(k)} = ((z_1)^w)_{(k)} ((z_2)^w)_{(k)}$! Die Möglichkeit des Wechsels in andere Zweige ist zu berücksichtigen.

Für $w = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ist

$$\{e^{2k\pi iw} : k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{\frac{2k\pi i}{q}} : k \in \{0, 1, \dots, q-1\}\}$$

eine endliche Menge. Es folgt:

Satz 4.6 Sei $n \in \mathbb{N}^\times$ und $z \in \mathbb{C}$. Dann gibt es genau n paarweise verschiedene komplexe Zahlen z_0, \dots, z_{n-1} mit $z_k^n = z$, nämlich $z_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\text{Arg}(z) + 2\pi k}{n}}$. Insbesondere gibt es genau n verschiedene n -te Einheitswurzeln $\zeta_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ mit $\zeta_k^n = 1$ für alle $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Die Möglichkeit, $z_k^n = z$ stets zu lösen, erlaubt (zusammen mit der Stetigkeit von Polynomen) einen ersten Beweis des

Theorem 4.7 (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 mit komplexen Koeffizienten besitzt in \mathbb{C} mindestens eine Nullstelle.

Beweis. Es genügt, das Polynom $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ zu betrachten.

i) Wir zeigen: $|f|$ nimmt auf \mathbb{C} ein Minimum an. Für $|z| \geq 1$ gilt:

$$f(z) = z^n(1 + r(z)), \quad r(z) := \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n},$$

$$|r(z)| \leq \frac{A}{|z|} \text{ mit } A := |a_{n-1}| + \dots + |a_0|.$$

Wir erreichen $|r(z)| \leq \frac{1}{2}$ für $|z| \geq R := \max(1, 2A)$ und dann $|f(z)| \geq \frac{|z|}{2} \geq A$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$. Auf der kompakten Kreisscheibe $\overline{K_0(R)}$ um 0 mit Radius R nimmt die stetige Funktion $|f(z)|$ ein Minimum an, wegen $|P(0)| = |a_0| \leq A$ ist dieses dann das Minimum in ganz \mathbb{C} .

ii) Wir zeigen: In jedem Punkt $z \in \overline{K_0(R)}$ mit $f(z) \neq 0$ hat $|f(z)|$ kein Minimum. (Also wird das Minimum in einem Punkt $z_0 \in \overline{K_0(R)}$ angenommen mit $|f(z_0)| = 0$.)

Sei also $f(z) \neq 0$. Wir betrachten das Polynom $g(w) := \frac{f(w+z)}{f(z)}$ in w . Wegen $w(0) = 1$ gilt $g(w) = 1 + b_1w + \dots + b_nw^n$. Da f und somit g nicht konstant ist, verschwinden nicht alle b_i . Sei $1 \leq k \leq n$ der kleinste Index mit $b_k \neq 0$. Durch Skalieren $w \mapsto \beta w$ mit einer in \mathbb{C} stets existierenden Wurzel $\beta = (-\frac{1}{b_k})^{\frac{1}{k}}$ erreicht man $g(\beta w) = 1 - w^k + w^{k+1}h(w)$. Das so konstruierte Polynom $h(w)$ ist auf $\overline{K_0(R)}$ beschränkt, $|h(w)| \leq c$ mit $c > 0$. Somit gilt $|w^{k+1}h(w)| < |w|^k$ für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $0 < |w| < \min(1, \frac{1}{c}, R)$. Wählt man $w_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < w_0 < \min(1, \frac{1}{c}, R)$, so ergibt sich

$$|g(\beta w_0)| \leq 1 - w_0^k + |w_0^{k+1}h(w_0)| < 1,$$

also $|f(z + \beta w_0)| < |f(z)|$. □

Teil II

Komplexe Differenzierbarkeit und holomorphe Funktionen

5 Reelle Differenzierbarkeit

Definition 5.1 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *differenzierbar* im Punkt $x_0 \in I$, wenn es eine Zahl $f'(x_0) \in \mathbb{C}$ (die Ableitung) gibt mit folgenden äquivalenten Eigenschaften:

$$\text{i) } f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ d.h. } \phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases} \text{ ist} \\ \text{stetig in } x_0.$$

$$\text{ii) } f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r(x) \text{ mit } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0.$$

Die Funktion f heißt *differenzierbar in I* , wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist.

Die Äquivalenzen ergeben sich aus der Umstellung $\frac{r(x)}{x - x_0} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$. Insbesondere ist jede in x_0 differenzierbare Funktion dort auch stetig. In höherer Dimension (mit Ausnahme von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$) kann nicht mehr durch $x - x_0$ dividiert werden, so daß nur noch die lineare Approximierbarkeit ii) verbleibt:

Definition 5.2 Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen heißt (*total*) *differenzierbar* in $x_0 \in U$, falls es eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $(Df)(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (das Differential von f) gibt mit

$$f(x) = f(x_0) + (Df)(x_0) \circ (x - x_0) + r(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Daneben gibt es mit den partiellen Ableitungen und den Richtungsableitungen Versionen, in denen man sich auf Kurven in U einschränkt und dann die eindimensionale Ableitung betrachtet. Für $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ gelten folgende Implikationen:

$$\begin{array}{l} \text{stetig partiell differenzierbar} \\ \Downarrow \\ \text{differenzierbar} \quad \Rightarrow \quad \text{stetig} \\ \Downarrow \\ \text{es existieren Richtungsableitungen in jede Richtung} \\ \Downarrow \\ \text{partiell differenzierbar} \end{array}$$

aber im allgemeinen keine der Umkehrungen.

Ausblick 5.3 Ableitung f' bzw. Differential Df bilden selbst wieder auf Teilmengen von U definierte Funktionen. Im allgemeinen müssen diese nicht einmal stetig sein: Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist überall differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

die in 0 nicht stetig ist. Wir werden sehen, daß das bei komplexer Differenzierbarkeit in Umgebungen nicht passieren kann. \diamond

Liegt mehrfache *stetige* Differenzierbarkeit vor, so vertauschen nach dem Satz von Schwarz die partiellen Ableitungen: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$.

6 Einschub: Lineare Abbildungen

Das Differential war eine lineare Abbildung $(Df)(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Sind allgemein endlich-dimensionale \mathbb{K} -Vektorräume V, W gegeben mit Basen $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$ von W , dann ordnet man einer linearen Abbildung $F : V \rightarrow W$ die *darstellende Matrix*

$${}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{A}} = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K}), \quad F(v_j) =: \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

zu. Die Definition sichert Kompatibilität zwischen Komposition linearer Abbildungen und Matrixmultiplikation, ${}_c[G \circ F]_{\mathcal{A}} = {}_c[G]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{A}}$.

Beispiel 6.1 Die darstellende Matrix des Differentials $(Df)(x_0)$ einer Abbildung $f = (f_1, \dots, f_m)^t : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ bezüglich der kanonischen Basen in \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m ist durch die partiellen Ableitungen gegeben (der Punkt x_0 werde zur besseren Übersicht weggelassen):

$$[(Df)] = (\partial_j f_i)_{ij} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \dots & \partial_n f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \partial_2 f_m & \dots & \partial_n f_m \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix nennt man auch die Jacobi-Matrix. \triangleleft

Beispiel 6.2 Wir betrachten \mathbb{C} als reellen Vektorraum mit Basis $(1, i)$. Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ hat dann bezüglich dieser Basis eine darstellende Matrix

$$[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad T(1) = a + ic, \quad T(i) = b + id.$$

Somit gilt mit $z = x + iy$

$$T(z) = x(a + ic) + y(b + id) = \frac{z + \bar{z}}{2}(a + ic) + \frac{z - \bar{z}}{2i}(b + id) = \lambda z + \mu \bar{z}$$

mit $\lambda = \frac{1}{2}(a + d + i(c - b))$ und $\mu = \frac{1}{2}(a - d + i(c + b))$.

Ist nun $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sogar eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, so ist sie erst recht \mathbb{R} -linear, und die darstellende Matrix als \mathbb{R} -lineare Abbildung hat eine spezielle Form: Denn sei $T(1) = a + ic$, dann ist $T(i)$ bereits vorgegeben durch $T(i) = iT(1) = -c + ia$, also $[T] = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$. In der obigen Darstellung bedeutet das $\lambda = a + ic = T(1)$ und $\mu = 0$, d.h. $T(z) = \lambda z$. Die einzigen \mathbb{C} -linearen Abbildungen von \mathbb{C} nach \mathbb{C} sind also die Skalierungen $z \mapsto \lambda z$. \triangleleft

7 Komplexe Differenzierbarkeit

Die komplexe Ableitung einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $U \subseteq \mathbb{C}$ kann, da \mathbb{C} ein Körper ist, identisch wie die reelle Ableitung definiert werden. Faßt man sie als reelles Differential von $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ auf, dann ist dieses sogar \mathbb{C} -linear und hat deshalb eine sehr spezielle Form. Genauer gilt:

Definition 7.1 Sei $U \subseteq \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ offen. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ heißt im Punkt $z_0 \in U$ *komplex differenzierbar*, wenn eine (und dann jede) der folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist:

i) Der Grenzwert $f'(z_0) := \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert, d.h. die Funktion

$$\phi(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{für } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{für } z = z_0 \end{cases} \text{ ist stetig in } z_0.$$

ii) $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist in $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ reell differenzierbar, und das Differential $(Df)(x_0, y_0)$ ist \mathbb{C} -linear.

iii) $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist in $z_0 = (x_0, y_0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ reell differenzierbar, und die partiell differenzierbaren Funktionen $u := \operatorname{Re}(f)$ und $v := \operatorname{Im}(f)$ erfüllen die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v.$$

Beweis der Äquivalenzen. i) \Rightarrow ii) Definiere $r : U \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + r(z)$$

und eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $(Df)(z_0)$ durch $(Df)(z_0) \circ \zeta := f'(z_0) \cdot \zeta$. Nach Definition des Grenzwertes ist $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} = 0$, somit auch $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(z)}{|z - z_0|}$. Damit ist f in z_0 reell differenzierbar, aber das Differential $(Df)(z_0)$ ist sogar \mathbb{C} -linear.

ii)⇒i) Es gilt $f(z) = f(z_0) + Df(z_0) \cdot (z - z_0) + r(z)$ mit $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(z)}{|z - z_0|}$ und einer sogar \mathbb{C} -linearen Abbildung $(Df)(z_0)$. Dann gilt aber $Df(z_0) \circ (z - z_0) = (z - z_0) \cdot Df(z_0) \circ 1$. Setzt man $f'(z_0) := Df(z_0) \circ 1$, so folgt der in i) geforderte Grenzwert.

ii)⇔iii) Das Differential $(Df)(z_0)$ hat nach Beispiel 6.1 bezüglich der reellen Basis (1, i) die Jacobi-Matrix

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}.$$

Nach Beispiel 6.2 definiert diese Matrix genau dann eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, wenn die Diagonalelemente identisch sind und die Summe der beiden anderen Matricelemente identisch Null ist. \square

Beispiel 7.2 i) $f(z) = z^n$ ist in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit $f'(z_0) = n z_0^{n-1}$. Denn $\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-k-1}$, so daß im Limes $z \rightarrow z_0$ sich n Summanden z_0^{n-1} ergeben.

ii) \exp ist in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit $\exp'(z_0) = \exp(z_0)$. Denn $\frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0} = \exp(z_0) \frac{\exp(z - z_0) - 1}{z - z_0}$, und nach Satz 4.1.ii) gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\exp(z - z_0) - 1}{z - z_0} = 1$. \triangleleft

Wie im Reellen beweist man Linearität, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel:

Satz 7.3 Die Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen seien in $x_0 \in U$ komplex differenzierbar. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$ und für $g(z_0) \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ komplex differenzierbar in z_0 , und es gilt

$$\begin{aligned} (f + g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0) \\ (f \cdot g)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0) && \text{(Produktregel bzw. Leibniz-Regel)} \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2} && \text{(Quotientenregel)} \end{aligned}$$

Beispiel 7.4 i) Polynome $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ sind komplex differenzierbar in

$$\text{jedem Punkt } z_0 \in \mathbb{C}, \text{ und es gilt } f'(z_0) = \sum_{k=1}^n k a_k z_0^{k-1}.$$

ii) Rationale Funktionen $f(z) = \frac{\sum_{k=0}^n a_k z^k}{\sum_{l=0}^m b_l z^l}$ sind komplex differenzierbar außerhalb der Nullstellen des Nennerpolynoms, und es gilt $f'(z_0) = \frac{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m (k-l) a_k b_l z_0^{k+l-1}}{\left(\sum_{l=0}^m b_l z_0^l\right)^2}$. Insbesondere gilt für die in der Partialbruchzerlegung entstehenden elementaren Funktionen $g(z) = \frac{1}{(z-a)^k}$, daß $g'(z_0) = \frac{-k}{(z_0-a)^{k+1}}$.

iii) \cos , \sin , \cosh und \sinh sind als Linearkombinationen von Exponentialfunktionen komplex differenzierbar in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, und es gilt

$$\begin{aligned}\cos'(z_0) &= -\sin(z_0), & \sin'(z_0) &= \cos(z_0), \\ \cosh'(z_0) &= \sinh(z_0), & \sinh'(z_0) &= \cosh(z_0).\end{aligned}$$

iv) \tan , \cot , \tanh , \coth sind als Quotienten komplex differenzierbarer Funktionen komplex differenzierbar außerhalb der Nullstellen der Nenner, und es gilt

$$\begin{aligned}\tan'(z_0) &= \frac{\sin'(z_0)\cos(z_0) - \sin(z_0)\cos'(z_0)}{\cos^2(z_0)} = \frac{1}{\cos^2(z_0)}, \\ \cot'(z_0) &= \frac{\cos'(z_0)\sin(z_0) - \cos(z_0)\sin'(z_0)}{\sin^2(z_0)} = -\frac{1}{\sin^2(z_0)}, \\ \tanh'(z_0) &= \frac{\sinh'(z_0)\cosh(z_0) - \sinh(z_0)\cosh'(z_0)}{\cosh^2(z_0)} = \frac{1}{\cosh^2(z_0)}, \\ \coth'(z_0) &= \frac{\cosh'(z_0)\sinh(z_0) - \cosh(z_0)\sinh'(z_0)}{\sinh^2(z_0)} = -\frac{1}{\sinh^2(z_0)} \quad \triangleleft\end{aligned}$$

Satz 7.5 (Kettenregel) Die Funktion $f : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ sei komplex differenzierbar in $z_0 \in U$, und die Funktion $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ sei komplex differenzierbar in $f(z_0) \in V$. Dann ist auch die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z_0 , und es gilt $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.

Beispiel 7.6 Wir werden später beweisen, daß der Hauptzweig $\text{Log} : \mathbb{C}_- \rightarrow S \subseteq \mathbb{C}$ des komplexen Logarithmus komplex differenzierbar in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}_-$ ist. Setzt man das voraus, so läßt sich die Ableitung leicht berechnen, indem man beide Seiten der Identität $z = \exp(\text{Log}(z))$ differenziert: $1 = \exp'(\text{Log}(z_0)) \cdot \text{Log}'(z_0) = z_0 \text{Log}'(z_0)$. Somit gilt $\text{Log}'(z_0) = \frac{1}{z_0}$ und dann auch $\log'_{(k)}(z_0) = \frac{1}{z_0}$ für jeden anderen Zweig. \triangleleft

Anderen Beispielen sieht man die komplexe Differenzierbarkeit nicht so leicht an. Hier helfen oft die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen weiter.

Beispiel 7.7 Sei $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ oder $u(x, y) = x^2 + y^2$ und $v(x, y) = 0$. Dann ist f reell differenzierbar mit $\partial_x u = 2x$ und $\partial_y u = 2y$, aber $\partial_x v = \partial_y v = 0$. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten genau in $x = y = 0$, d.h. f ist nur in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$. \triangleleft

Beispiel 7.8 Sei $f(z) = |z|$ oder $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $v(x, y) = 0$. Sei zunächst $x^2 + y^2 \neq 0$. Wegen $\partial_x u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ und $\partial_y u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, aber $\partial_x v = \partial_y v = 0$ kann f höchstens in $z = 0$ komplex differenzierbar sein. Dort ist aber $\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{|z|}{z}$. Der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{z}$ existiert nicht, was man am einfachsten

durch Wahl der gegen 0 konvergenten Folgen $z_n = \frac{1}{n+1}e^{i\phi}$ sieht, für die $\frac{|z_n|}{z_n}$ gegen verschiedene $e^{i\phi}$ konvergiert. Somit ist die auf ganz \mathbb{C} stetige Funktion $|z|$ nirgends komplex differenzierbar! \triangleleft

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ nur reell differenzierbar, also mit allgemeiner Jacobi-Matrix $Df(z_0) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$, so gilt nach Beispiel (6.2)

$$Df(z_0) \circ (z - z_0) = \frac{1}{2}(\partial_x u + \partial_y v + i(\partial_x v - \partial_y u))(z_0) \cdot (z - z_0) + \frac{1}{2}(\partial_x u - \partial_y v + i(\partial_x v + \partial_y u))(z_0) \cdot \overline{(z - z_0)}.$$

Nach Zusammenfassung zu $f = u + iv$ ist gezeigt:

Satz 7.9 i) *Das Differential einer reell-differenzierbaren Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ erfüllt*

$$Df(z_0) \circ (z - z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \cdot (z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \cdot \overline{(z - z_0)}$$

mit den beiden Wirtinger-Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f).$$

ii) *Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, wenn sie in z_0 reell differenzierbar ist und dort die Wirtinger-Ableitung nach \bar{z} verschwindet, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. In diesem Fall gilt $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.*

Beim Rechnen im Wirtinger-Kalkül betrachtet man z, \bar{z} als formal unabhängige Variablen. Im Beispiel 7.7 mit $f(z) = z\bar{z}$ ergibt sich $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$ und damit komplexe Differenzierbarkeit genau in $z = 0$.

8 Holomorphe Funktionen

Definition 8.1 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *holomorph* im Punkt $z_0 \in U$, falls f in einer Umgebung (d.h. in jedem Punkt der Umgebung) von z_0 komplex differenzierbar ist. Wir nennen f *holomorph auf U* , wenn f in jedem Punkt von U komplex differenzierbar (bzw. holomorph) ist.

Ausblick 8.2 Hier wird nicht gefordert, daß die komplexe Ableitung $f'(z)$ stetig ist. Es wird sich nämlich zeigen, daß Stetigkeit automatisch ist; mehr noch, holomorphe Funktionen sind beliebig oft komplex (und reell) differenzierbar. \diamond

Für eine auf U holomorphe Funktion gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in jedem Punkt von U .

Beispiel 8.3 Wir suchen Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen $f(z) = |z|^4 - 2|z|^2 = z^2 \bar{z}^2 - 2z \bar{z}$ holomorph ist. Die Wirtinger-Ableitung ergibt (formal und tatsächlich) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 2z^2 \bar{z} - 2z = 2z(|z|^2 - 1)$. Damit ist f komplex differenzierbar in $z = 0$ und auf dem Einheitskreis $|z| = 1$, aber in keiner Umgebung, deshalb nirgends holomorph. \triangleleft

Weiter ergibt sich aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, daß eine holomorphe Funktion, bis auf Addition einer Konstanten, bereits durch ihren Realteil allein charakterisiert ist, oder durch ihren Imaginärteil allein. Man benötigt dazu folgenden:

Satz 8.4 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) = 0$ für alle $z \in U$. Dann ist f konstant.

Der analoge reelle Satz sollte bekannt sein; er ergibt sich aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Der Satz gilt auch im Komplexen, erfordert zum Beweis aber Kurvenintegrale, die erst später eingeführt werden. Setzen wir ihn an dieser Stelle voraus, so ergibt sich sofort:

Satz 8.5 Sei $U \subseteq \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend und $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ reell differenzierbar. Dann gibt es, bis auf Addition einer Konstanten, höchstens eine reell differenzierbare Funktion $v : U \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $u + iv$ holomorph auf U ist.

Beweis. Angenommen, $u + iv_1$ und $u + iv_2$ sind holomorph auf U , und damit auch $0 + i(v_1 - v_2)$. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen liefern $0 = \partial_y(v_1 - v_2)$ und $0 = \partial_x(v_1 - v_2)$ mit einziger Lösung $v_1 - v_2$ konstant. \square

Beispiel 8.6 Sei $u(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$, dann folgt

$$\partial_x u = 2x + 2y = \partial_y v, \quad \partial_y v = 2x - 2y = -\partial_x v.$$

Wir können die erste Gleichung formal nach y integrieren zu $v = 2xy + y^2 + g(x)$ für eine beliebige Funktion $g(x)$. Analog integriert sich die zweite Gleichung zu $v = 2xy - x^2 + h(y)$ für eine beliebige Funktion $h(y)$. Beide Gleichungen sind kompatibel für $g(x) = -x^2 + c$ und $h(y) = y^2 + c$ für eine Konstante c . Es folgt

$$\begin{aligned} u + iv &= x^2 + 2xy - y^2 + i(2xy - x^2 + y^2 + c) = (1 - i)(x + iy)^2 + ic \\ &= (1 - i)z^2 + ic. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Nicht jede reell-differenzierbare Funktion kann Realteil einer holomorphen Funktion sein. Wichtige Bedingungen (f muß notwendig harmonisch sein) werden in den Übungen diskutiert.

Wir kommen nun zur wichtigsten Quelle für holomorphe Funktionen:

Satz 8.7 Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n$ ist im Inneren ihres Konvergenzkreises holomorph. Für die Ableitung gilt $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-w)^{n-1}$, mit gleichem Konvergenzradius wie f .

Beweis. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ haben beide Reihen $f(z)$ und $f'(z)$ den Konvergenzradius $R := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|}}$. Zu $|z_0 - w| < r < R$ und $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} < \frac{\epsilon}{3}$. Dann gilt für alle $|z - w| < r$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - w)^{n-1} \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{(z-w)^n - (z_0-w)^n}{z-z_0} - n(z-w)^{n-1} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} (z-w)^k (z_0-w)^{n-1-k} - n(z-w)^{n-1} \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^N a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} (z-w)^k (z_0-w)^{n-1-k} - n(z-w)^{n-1} \right) \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| 2nr^{n-1}. \end{aligned}$$

Wegen der Differenzierbarkeit des Polynoms $\sum_{n=0}^N a_n(z-w)^n$ gibt es ein $\delta > 0$, das wir kleiner $r - |z_0 - w|$ wählen können, so daß für alle $|z - z_0| < \delta$ gilt: $\left| \sum_{n=1}^N a_n \left(\frac{(z-w)^n - (z_0-w)^n}{z-z_0} - n(z-w)^{n-1} \right) \right| < \frac{\epsilon}{3}$. \square

Ausblick 8.8 Wir werden später als eine der zentralen Aussagen der Funktionentheorie beweisen, daß auch die Umkehrung des letzten Satzes richtig ist: Jede in z holomorphe Funktion läßt sich in einer Umgebung von z als Potenzreihe darstellen. \diamond

Wir können nun den Beweis der Reihendarstellung von Log nachholen.

Satz 8.9 Für alle $|z| < 1$ gilt $\text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.

Beweis. Sei $L(z)$ die fragliche Reihe. Dann gilt

$$L'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}.$$

Eine weitere auf $K_1(0)$ komplex differenzierbare Funktion mit derselben Ableitung ist nach Beispiel 7.6 der (verschobene) komplexe Logarithmus $\log_{(k)}(1+z)$ (wobei die komplexe Differenzierbarkeit noch zu zeigen ist). Nach Satz 8.5 unterscheiden sich $\log_{(k)}(1+z)$ und $L(z)$ nur durch eine Konstante; wegen $L(1) = 0 \in]-\pi, \pi[$ führt diese Konstante genau auf den Hauptzweig. \square

Satz 8.10 (Binomialreihe) Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt $B_\alpha(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = \exp(\alpha \operatorname{Log}(1+z))$. Insbesondere gilt $B_\alpha(z)B_\beta(z) = B_{\alpha+\beta}(z)$.

Beweis. Die Ableitung der Binomialreihe ist

$$B'_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n z^{n-1} = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} z^{n-1} = \alpha B_{\alpha-1}(z).$$

Die Binomialkoeffizienten erfüllen

$$\binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha+1}{n+1} \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}.$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}$ mit $\alpha \geq n$ ist das die definierende Relation des Pascalschen Dreiecks, die per Induktion gezeigt wird. Andererseits stellt diese Gleichung eine Identität zwischen Polynomen $(n+1)$ -ten Grades in $\alpha \in \mathbb{C}$ dar, die an mehr als $n+1$ Punkten identisch erfüllt ist. Nach dem Identitätssatz für Polynome gilt sie dann für alle α . Es folgt

$$\begin{aligned} B_\alpha(z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} z^n \\ &= z \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} z^n = (1+z)B_{\alpha-1}(z) \end{aligned}$$

und dann

$$B'_\alpha(z) = \frac{\alpha}{1+z} B_\alpha(z).$$

Betrachte die Funktion $f(z) = B_\alpha(z) \exp(-\alpha \operatorname{Log}(1+z))$. Produkt- und Kettenregel führen auf $f'(z) = 0$, also $f(z) = f(0) = 1$ und somit $B_\alpha(z) = \exp(\alpha \operatorname{Log}(1+z))$. \square

Teil III

Der Cauchysche Integralsatz

9 Wiederholung: Integration im Reellen

Die Integration im Komplexen wird mittels Kurven auf die bekannte Riemann-Integration von komplexwertigen Funktionen auf $[\alpha, \beta]$ zurückgeführt. Wir können uns darauf beschränken, nur (stückweise) stetige Funktionen zu integrieren, was die allgemeinen Definitionen und Sätze stark vereinfacht:

Satz/Definition 9.1 Sei $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gibt es genau eine komplexe Zahl $I(f)$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für eine beliebige Unterteilung $\alpha = t_0 < t_1 \cdots < t_n = \beta$ von $[\alpha, \beta]$ mit $|t_{k+1} - t_k| < \delta$ und beliebige Wahl von Stützstellen $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ gilt

$$\left| I(f) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)(t_{k+1} - t_k) \right| < \epsilon.$$

Diese Zahl $I(f)$ heißt das *Riemann-Integral* von f und wird mit $\int_{\alpha}^{\beta} dt f(t) := I(f)$ bezeichnet.

Satz 9.2 Das Riemann-Integral ist

- i) linear, d.h. $\int_{\alpha}^{\beta} dt (c_1 f_1 + c_2 f_2)(t) = c_1 \int_{\alpha}^{\beta} dt f_1(t) + c_2 \int_{\alpha}^{\beta} dt f_2(t)$,
- ii) monoton, d.h. $\int_{\alpha}^{\beta} dt f(t) \leq \int_{\alpha}^{\beta} dt g(t)$ falls $f(t) \leq g(t)$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$
- iii) und erfüllt die Dreiecksungleichung $|\int_{\alpha}^{\beta} dt f(t)| \leq \int_{\alpha}^{\beta} dt |f(t)|$.

Die Berechnung von Integralen geschieht meist über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Ausgangspunkt ist:

Satz 9.3 Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\alpha \in J$. Für $t \in J$ werde durch $F(t) := \int_{\alpha}^t ds f(s)$ eine Funktion $F : J \rightarrow \mathbb{C}$ definiert. Dann gilt: $F : J \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig differenzierbar mit $F'(t) = f(t)$.

Eine Funktion F mit $F'(t) = f(t)$ heißt *Stammfunktion* von f . Die Menge aller Stammfunktionen zu $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ heißt das *unbestimmte Integral* zu f , geschrieben $\int dt f(s)$. Zwei Stammfunktionen auf J unterscheiden sich nur um eine Konstante.

Satz 9.4 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) Es sei $F : J \rightarrow \mathbb{C}$ eine beliebige Stammfunktion zu einer stetigen Funktion $f : J \rightarrow \mathbb{C}$. Dann gilt für beliebige $\alpha, \beta \in J$

$$\int_{\alpha}^{\beta} dt f(t) = F(\beta) - F(\alpha) =: F(t) \Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

Aus den bekannten Ableitungen elementarer Funktionen ergeben sich Formeln für Standardintegrale. Zwei wichtige Rechenmethoden gewinnt man durch die Umkehrung der Produkt- und Kettenregeln für die Ableitung.

Satz 9.5 (partielle Integration) *Es seien $u, v : J \rightarrow \mathbb{C}$ Stammfunktionen zu stetigen Funktionen $f = v' : J \rightarrow \mathbb{C}$ und $g = u' : J \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist auch uv eine Stammfunktion, und es gilt*

$$\int dt (uv')(t) = (uv)(t) - \int dt (u'v)(t) ,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} dt (uv')(t) = (uv)(\beta) - (uv)(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} dt (u'v)(t) .$$

Satz 9.6 (Substitutionsregel) *Sei $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $F : J \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion zu f und $s : [\alpha, \beta] \rightarrow J$ eine stetig differenzierbare und streng monotone Funktion. Dann ist $F \circ s : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion zu $(f \circ s) \cdot s' : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, und es gilt*

$$\int_{\alpha}^{\beta} dt f(s(t)) \cdot s'(t) = \int_{s(\alpha)}^{s(\beta)} ds f(s) .$$

10 Komplexe Kurvenintegrale

Definition 10.1 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Unter einer (stetigen, differenzierbaren) *Kurve* in U versteht man eine (stetige, differenzierbare) Abbildung $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$. Die Menge $\text{sp}(\gamma) := \{\gamma(t) : t \in [\alpha, \beta]\} \subseteq U$ heißt *Spur* der Kurve γ , und $\Gamma(\gamma) := \{(t, \gamma(t)) \in [\alpha, \beta] \times U : t \in [\alpha, \beta]\}$ heißt *Graph* von γ .

Die Kurve heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn γ stetig ist und es eine Unterteilung $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$ gibt, so daß γ auf jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$ stetig differenzierbar ist.

Für eine stückweise stetig differenzierbare Kurve heißt $\gamma'(t) \in \mathbb{C}$ der *Tangentialvektor* von γ im Punkt $\gamma(t)$. Dabei ist die Ableitung innerhalb der Intervalle $[t_{i-1}, t_i]$ bzw. $[t_i, t_{i+1}]$ zu bilden, so daß $\gamma'(t_i)$ verschiedene Werte auf $[t_{i-1}, t_i]$ und $[t_i, t_{i+1}]$ annehmen darf.

Beispiel 10.2 i) $[0, 1] \ni t \mapsto \gamma(t) = a + t(b - a) \in \mathbb{C}$ hat als Spur die Gerade (Strecke) zwischen $a, b \in \mathbb{C}$. Hier ist $\gamma'(t) = b - a$.

ii) $[0, 2\pi] \ni t \mapsto \gamma(t) = a + re^{it}$ hat als Spur die Kreislinie mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}$ und Radius r . Hier ist $\gamma'(t) = ire^{it} = -r \sin t + ir \cos t$. Der Tangentialvektor zeigt in Richtung der Tangente an den Kreis in positiver Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn). \triangleleft

Definition 10.3 Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ stückweise stetig differenzierbar. Dann ist das *Kurvenintegral von f längs γ* erklärt als

$$\int_{\gamma} dz f(z) := \int_{\alpha}^{\beta} dt f(\gamma(t))\gamma'(t) \equiv \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt f(\gamma(t))\gamma'(t) .$$

Das folgende Beispiel ist von fundamentaler Bedeutung für die gesamte Funktionentheorie:

Beispiel 10.4 Sei $f(z) = \frac{1}{z}$ definiert auf $U := \mathbb{C}^{\times}$ und $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$ gegeben durch $\gamma(t) = re^{it}$ für ein $r > 0$. Dann ist $\gamma'(t) = ire^{it} = i\gamma(t)$ und folglich

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} dz f(z) := \int_0^{2\pi} dt f(\gamma(t))\gamma'(t) = \int_0^{2\pi} dt \frac{i\gamma(t)}{\gamma(t)} = 2\pi i . \quad \triangleleft$$

Alle reellen Integrale können als komplexe Kurvenintegrale über die Kurve $\gamma(t) = t$ aufgefaßt werden:

Beispiel 10.5 Für $\gamma(t) = t$ und $f(z) = f(x + iy)$ stetig fällt das Kurvenintegral $\int_{\gamma} dz f(z) := \int_{\alpha}^{\beta} dt f(t)$ zusammen mit dem reellen Integral. \triangleleft

Die komplexen Kurvenintegrale sind allein eine Eigenschaft der Spur der Kurve (sowie ihrer Orientierung) und unabhängig von der konkreten Parametrisierung:

Satz 10.6 Sei $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U \subseteq \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar und $\phi : [\sigma, \tau] \rightarrow [\alpha, \beta]$ ein Diffeomorphismus, d.h. eine stetig differenzierbare Funktion mit $\phi'(s) \neq 0$ für alle $s \in [\sigma, \tau]$. Dann gilt für das Kurvenintegral einer beliebigen stetigen Funktion f über die Kurve $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi : [\sigma, \tau] \rightarrow U$

$$\int_{\tilde{\gamma}} dz f(z) = \text{sign}(\phi') \int_{\gamma} dz f(z) .$$

Beweis. Mit Kettenregel und Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} dz f(z) &:= \int_{\sigma}^{\tau} ds f(\gamma(\phi(s)))(\gamma \circ \phi)'(s) \\ &= \int_{\sigma}^{\tau} ds f(\gamma(\phi(s)))\gamma'(\phi(s))\phi'(s) \\ &= \int_{\phi(\sigma)}^{\phi(\tau)} dt f(\gamma(t))\gamma'(t) . \end{aligned}$$

Dabei sind die Integrale jeweils in die Teilintervalle mit Grenzen $\{\phi^{-1}(t_i)\}$ aufzuspalten. Ist $\phi'(s) > 0$, d.h. ϕ' streng monoton wachsend, dann ist $\phi(\sigma) = \alpha$ und $\phi(\tau) = \beta$, und die Behauptung folgt direkt. Im umgekehrten Fall $\phi'(s) < 0$, d.h. ϕ' streng monoton fallend, ist $\phi(\sigma) = \beta$ und $\phi(\tau) = \alpha$. Die dann notwendige Umkehrung der Integrationsgrenzen von \int_{β}^{α} zu \int_{α}^{β} liefert ein Vorzeichen, das allgemein durch $\text{sign}(\phi')$ erfaßt wird. \square

Beispiel 10.7 Ein Spezialfall ist die umgekehrt orientierte Kurve mittels $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$, $\phi(s) = \alpha + \beta - s$. Für den in negative Richtung durchlaufenen Kreis ist dann $[0, 2\pi] \mapsto \tilde{\gamma}(t) = e^{-it}$ mit $\int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z} = -2\pi i$. \triangleleft

Definition 10.8 Die *Bogenlänge* $L(\gamma)$ einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U \subseteq \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$L(\gamma) := \int_{\alpha}^{\beta} dt |\gamma'(t)| \equiv \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt |\gamma'(t)|.$$

Völlig analog zum vorigen Satz zeigt man, daß die Bogenlänge invariant unter Re-parametrisierung und (wegen des Betrags) invariant unter Orientierungsumkehr ist.

Satz 10.9 (Standardabschätzung) *Es gilt*

$$\left| \int_{\gamma} dz f(z) \right| \leq L(\gamma) \sup_{z \in \text{sp}(\gamma)} |f(z)| = L(\gamma) \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f(\gamma(t))|.$$

Beweis. Folgt direkt aus der Dreiecksungleichung für Integrale sowie $|f(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq |\gamma'(t)| \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f(\gamma(t))|$. \square

Wie im Reellen definiert man:

Definition 10.10 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Eine komplex-differenzierbare (somit holomorphe) Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* zu f , falls $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in U$.

Im gravierenden Unterschied zum Reellen hat jedoch nicht jede stetige Funktion f eine Stammfunktion! Nur *falls* es eine Stammfunktion gibt, übertragen sich die Eigenschaften.

Satz 10.11 *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Eine stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ besitze eine Stammfunktion F . Dann gilt*

$$\int_{\gamma} dz f(z) = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)).$$

Insgesondere gilt $\int_{\gamma} dz f(z) = 0$ für jede geschlossene Kurve γ mit $\gamma(\beta) = \gamma(\alpha)$.

Beweis. Nach Definition der Stammfunktion und Kettenregel gilt

$$\int_{\gamma} dz f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} dt F'(\gamma(t))\gamma'(t) = \int_{\alpha}^{\beta} dt (F \circ \gamma)'(t) = (F \circ \gamma)(\beta) - (F \circ \gamma)(\alpha).$$

Hier ist F' die komplexe Ableitung und γ' sowie $(F \circ \gamma)'$ die reelle. Der letzte Schritt ist der reelle Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. \square

Beispiel 10.12 Betrachte die stetige Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ auf der offenen Teilmenge $U = \mathbb{C}^\times$. Nach Beispiel 10.4 verschwindet *nicht* das Kurvenintegral über die geschlossene Kurve $[0, 2\pi] \ni t \mapsto re^{it}$. Damit kann die stetige (sogar holomorphe) Funktion $\frac{1}{z}$ keine Stammfunktion auf \mathbb{C}^\times haben!

Den Grund sieht man wie folgt ein: Ein Kandidat für die Stammfunktion wäre der komplexe Logarithmus $\text{Log}(z)$ wegen $\text{Log}'(z) = \frac{1}{z}$. Jedoch ist dieser auf der negativen reellen Achse nicht stetig und dann auch nicht komplex differenzierbar. Die Kreislinie trifft aber den Punkt $-r$, so daß die Voraussetzungen von Satz 10.11 nicht erfüllt sind. \triangleleft

Definition 10.13 Eine offene und zusammenhängende Teilmenge $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt *Gebiet*.

Folgerung 10.14 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

- i) Eine holomorphe Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F'(z) = 0$ für alle $z \in G$ ist konstant.
- ii) Falls existent, unterscheiden sich zwei Stammfunktionen zu einer stetigen Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ nur um eine Konstante.

Beweis. i) Je zwei Punkte in G können durch eine Kurve γ verbunden werden, längs der das Integral $\int_\gamma dz F'(z)$ verschwindet. ii) folgt aus i). \square

Nach Satz 10.11 können stetige Funktionen mit Stammfunktionen auf Gebieten wegunabhängig integriert werden. Auch die Umkehrung ist richtig, und das verschafft uns die Möglichkeit, eine Stammfunktion wie im Reellen zu gewinnen:

Satz 10.15 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:

- i) f besitzt eine holomorphe Stammfunktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in G$.
- ii) f kann in G wegunabhängig integriert werden, d.h. für zwei beliebige stückweise stetig differenzierbare Kurven $\gamma_k : [\alpha_k, \beta_k] \rightarrow G$, $k = 1, 2$, mit $\gamma_k(\alpha_k) = a$ und $\gamma_k(\beta_k) = b$ gilt $\int_{\gamma_1} dz f(z) = \int_{\gamma_2} dz f(z)$.
- iii) $\int_\gamma dz f(z) = 0$ für jede geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve in G .

Eine Stammfunktion ist dann gegeben durch $F(z) = \int_a^z dw f(w)$, womit das Kurvenintegral über eine beliebige Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow G$ zwischen dem beliebigen, aber festen Startpunkt $\gamma(\alpha) = a$ und $\gamma(\beta) = z$ bezeichnet wird.

Beweis. i) \Rightarrow ii) und i) \Rightarrow iii) ergeben sich sofort aus Satz 10.11. ii) \Leftrightarrow iii) folgt nach Aufspalten der geschlossenen Kurve an einem Zwischenpunkt und Orientierungsumkehr einer der Teilkurven.

ii) \Rightarrow i) Wegen der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals ist $F(z) = \int_a^z dw f(w)$ für jedes $z \in G$ eindeutig definiert. Zu $z_0 \in G$ gibt es eine offene Kugel $K_r(z_0) \subseteq G$. Sei $z \in K_r(z_0)$ beliebig, ferner γ_z bzw. γ_{z_0} eine beliebige Kurve von a nach z bzw. von a nach z_0 . Sei $[0, 1] \ni t \mapsto \gamma_0(t) := z_0 + (z - z_0)t \in K_r(z_0)$ die Gerade von z_0 nach z . Zusammengesetzt mit dem Weg von a nach z_0 ergibt sich ein weiterer Weg von a nach z . Die Wegunabhängigkeit des Integrals führt auf

$$\int_{\gamma_{z_0}} dw f(w) + \int_{\gamma_0} dw f(w) = \int_{\gamma_z} dw f(w) \quad \text{bzw.}$$

$$F(z_0) + \int_0^1 dt f(z_0 + (z - z_0)t)(z - z_0) = F(z) .$$

Es folgt

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| = \left| \int_0^1 dt (f(z_0 + (z - z_0)t) - f(z_0)) \right|$$

$$\leq \sup_{t \in [0,1]} |f(z_0 + (z - z_0)t) - f(z_0)| .$$

Wegen der Stetigkeit von f ist $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z_0 + (z - z_0)t) - f(z_0)| = 0$ für alle $t \in [0, 1]$, d.h. $F'(z_0) = f(z_0)$. \square

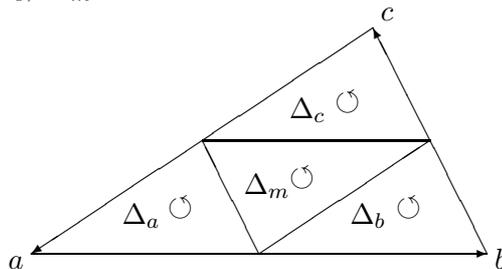
11 Der Cauchysche Integralsatz

Wir untersuchen in mehreren Teilschritten, ob wir $\int_{\gamma} dz f(z) = 0$ haben für eine stetige Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ und einen geschlossenen Integrationsweg γ . Im ersten Schritt ist der Integrationsweg der Rand eines Dreiecks, und die Funktion f wird sogar holomorph gewählt.

Satz 11.1 (Lemma von Goursat) *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und Δ ein offenes Dreieck mit $\bar{\Delta} = \Delta \cup \partial\Delta \subseteq U$. (Sind $a, b, c \in U$ die Eckpunkte von Δ , dann ist $\partial\Delta = \vec{ab} \cup \vec{bc} \cup \vec{ca}$ mit positivem Umlaufsinn, d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn.) Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} dz f(z) = 0 .$$

Beweis. Durch Verbinden der Seitenmittelpunkte entstehen aus Δ vier kongruente Dreiecke $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c, \Delta_m$.



Werden diese Dreiecke positiv umlaufen, dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} dz f(z) = \int_{\partial\Delta_a} dz f(z) + \int_{\partial\Delta_b} dz f(z) + \int_{\partial\Delta_c} dz f(z) + \int_{\partial\Delta_m} dz f(z),$$

da in der Summe die Kanten von $\partial\Delta_m$ zweimal in entgegengesetzte Richtung durchlaufen werden. Ist Δ_1 jenes Teildreieck, für das das Kurvenintegral den betragsmäßig größten Wert hat, dann gilt

$$\left| \int_{\partial\Delta} dz f(z) \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} dz f(z) \right|.$$

Das Dreieck Δ_1 werde erneut in 4 Teildreiecke zerlegt, Δ_2 sei jenes mit betragsmäßig größtem Kurvenintegral. Durch Wiederholung des Verfahrens entsteht eine Folge $\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_n$ von Dreiecken mit

$$\left| \int_{\partial\Delta} dz f(z) \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} dz f(z) \right|.$$

Wegen der Vollständigkeit von \mathbb{C} gibt es ein $z_0 \in \Delta_n$ für alle n . Nach Voraussetzung ist f in z_0 komplex differenzierbar, d.h. es gibt eine Funktion $r : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)r(z) \quad \text{mit} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} r(z) = 0.$$

Das Polynom $f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ hat die Stammfunktion $(z - z_0)f(z_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 f'(z_0)$, ist also wegunabhängig integrierbar mit

$$\int_{\partial\Delta_n} dz (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)) = 0.$$

Es sei $L := L(\Delta)$ der Umfang von Δ . Dann ist $L(\Delta_n) = 2^{-n}L$. Wegen $z_0 \in \Delta_n$ ist $|z - z_0| \leq 2^{-n}L$ für alle $z \in \partial\Delta_n$. Somit gilt nach Standardabschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta_n} dz f(z) \right| &= \left| \int_{\partial\Delta_n} dz (z - z_0)r(z) \right| \\ &\leq 2^{-n}L \cdot \sup_{z \in \partial\Delta_n} |z - z_0| |r(z)| \leq 4^{-n}L^2 \sup_{z \in \overline{\Delta_n}} |r(z)|. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\left| \int_{\partial\Delta} dz f(z) \right| \leq L^2 \sup_{z \in \overline{\Delta_n}} |r(z)|.$$

Für $n \rightarrow \infty$ geht $z \rightarrow z_0$ und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \overline{\Delta_n}} |r(z)| = 0$. Das ist die Behauptung. \square

Bemerkung 11.2 Wir hatten in Beispielen gesehen, daß Holomorphie eine sehr viel stärkere Forderung als Stetigkeit ist. Das Lemma von Goursat läßt sich minimal abschwächen. Man benötigt nur $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig auf ganz U und holomorph mit Ausnahme endlich vieler Punkte z_1, \dots, z_N . Angenommen, z_0 im Beweis fällt mit einem dieser Punkte zusammen. Dann enthält jedes der Dreiecke $\Delta_n \ni z_0$ jedoch einen Punkt z_0^* , in dem f holomorph ist, und der Beweis mit z_0^* verläuft identisch.

Jedoch ist das nur eine scheinbare Abschwächung der Voraussetzungen. Später werden wir zeigen, daß f holomorph in jeden Stetigkeitspunkt z_1, \dots, z_N fortgesetzt werden kann.

Bemerkung 11.3 Die Forderung nach Holomorphie (bis auf endlich viele Punkte) gegenüber Stetigkeit sieht harmlos aus, ist aber ganz entscheidend. Betrachten wir die überall stetige, aber nirgends holomorphe Funktion $f(z) = |z|^2$ und das Dreieck mit den Eckpunkten $0, 1, i$. Die Kurvenstücke (jeweils über $[0, 1]$) sind $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = (1 - t) + it$, $\gamma_3(t) = (1 - t)i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} dz |z|^2 &= \int_0^1 dt t^2 + \int_0^1 dt ((1 - t)^2 + t^2)(i - 1) + \int_0^1 dt (1 - t)^2(-i) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(i - 1) + \frac{1}{3}(-i) = \frac{1}{3}(i - 1) \neq 0. \end{aligned}$$

Wir können die Aussagen relativ schnell auf sogenannte Sterngebiete verallgemeinern:

Definition 11.4 Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt *Sterngebiet*, wenn es ein $a \in G$ (das Zentrum) derart gibt, daß mit jedem $z \in G$ auch die Verbindungsstrecke $[0, 1] \ni t \mapsto \gamma_z(t) := a + (z - a)t$ vollständig in G liegt.

Satz 11.5 Sei G ein Sterngebiet mit Zentrum a . Für eine stetige Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:

- i) f besitzt eine holomorphe Stammfunktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in G$.
- ii) Für jedes Dreieck $\Delta \subseteq G$ mit einem Eckpunkt im Zentrum a gilt $\int_{\partial\Delta} dz f(z) = 0$.

Beweis. i) \Rightarrow ii) ist Satz 10.15.

ii) \Rightarrow i) Definiere $F(z) := \int_{\gamma_z} dw f(w)$. Dann zeigt eine identische Rechnung wie im Beweis von Satz 10.15, daß $F'(z) = f(z)$. \square

In Kombination mit dem Lemma von Goursat folgt:

Folgerung 11.6 (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph (eventuell bis auf endlich viele

Punkte, in denen jedoch stetig). Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion, und $\int_{\gamma} dz f(z) = 0$ für jede geschlossene Kurve γ in G . \square

Das ist noch nicht die allgemeinste Form, erlaubt jedoch schon viele Beispiele. Zunächst:

Beispiel 11.7 Die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ist ein Sterngebiet, in dem jeder Punkt $a \in \mathbb{R}_+^\times$ als Zentrum gewählt werden kann. \triangleleft

Beispiel 11.8 (Hauptzweig des komplexen Logarithmus) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ ist wegen $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ holomorph auf \mathbb{C}_- und hat deshalb eine Stammfunktion, z.B.

$$L(z) = \int_1^z \frac{dw}{w} := \int_{\gamma} \frac{dw}{w} \quad (\gamma \text{ ist beliebige Kurve zwischen } 1 \text{ und } z \text{ in } \mathbb{C}_-)$$

Dann ist $L(z)$ holomorph auf \mathbb{C}_- mit $L'(z) = \frac{1}{z}$ und $L(1) = 0$.

Betrachte auf \mathbb{C}_- die holomorphe Funktion $f(z) = z \exp(-L(z))$. Es folgt $f'(z) = 0$, und da \mathbb{C}_- ein Gebiet ist, $f(z) = f(1) = 1$. Somit gilt $z = \exp(L(z))$, d.h. $L(z)$ ist ein komplexer Logarithmus. Wegen $L(1) = 0 \in S$ handelt es sich um den Hauptzweig $L(z) = \text{Log}(z)$, dessen Holomorphie somit bewiesen ist.

Der Wert $\text{Log}(z)$ bestimmt sich durch das Kurvenintegral von $\frac{1}{z}$ längs einer beliebigen Kurve von 1 nach z . Ist $z = re^{\pm i\varphi}$ mit $0 \leq \varphi < \pi$, so wählen wir die Zusammensetzung

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad \gamma_1(t) = t : [1, r] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = re^{\pm it} : [0, \varphi] \rightarrow \mathbb{C}$$

mit $\gamma_1'(t) = 1$ und $\gamma_2'(t) = \pm ire^{\pm it}$:

$$\text{Log}(z) = \int_1^r dt \frac{1}{t} \cdot 1 + \int_0^{\varphi} dt \frac{1}{re^{\pm i\varphi}} \cdot (\pm ire^{\pm it}) = \ln r \pm i\varphi,$$

in Übereinstimmung mit der elementaren Rechnung. \triangleleft

Der Cauchysche Integralsatz in allgemeinsten Form besagt, daß Integrale holomorpher Funktionen über *zueinander homotope Kurven* identisch sind.

Definition 11.9 Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen.

i) Zwei stückweise stetig differenzierbare Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ mit $\gamma_0(\alpha) = \gamma_1(\alpha) = a$ und $\gamma_0(\beta) = \gamma_1(\beta) = b$ heißen *homotop* in U , wenn sie in U stetig ineinander deformiert werden können, d.h. wenn es eine stetige Abbildung $H : [\alpha, \beta] \times [0, 1] \mapsto U$ gibt mit

- $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ und $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$
- $H(\alpha, s) = a$ und $H(\beta, s) = b$ für alle $s \in [0, 1]$

- ii) Eine geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ mit $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = a$ heißt *kontrahierbar* in U (oder *nullhomotop*), wenn sie homotop zum Punkt $\gamma_0(t) = a$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$ ist.
- iii) U heißt *einfach zusammenhängend*, wenn U zusammenhängend ist und jede geschlossene Kurve in U kontrahierbar ist.

Ausblick 11.10 Es ist oft nicht leicht, eine Homotopie konkret hinzuschreiben. Vielmehr entwickelt man eine gewisse Erfahrung und entscheidet durch ‘Hinsehen’. Die einfachste Idee wäre $H(t, s) = \gamma_1(t) + (1 - s)(\gamma_0(t) - \gamma_1(t))$, was zumindest für $U = \mathbb{C}$ immer funktioniert. Ist $U = \mathbb{C}^\times$, so geht es darum, wie oft sich die Kurve um $z = 0$ ‘herumwindet’. Wir werden das noch genauer diskutieren. Zwei Kreislinien in \mathbb{C}^\times sind homotop, entweder wenn beide $z = 0$ im Inneren haben oder beide $z = 0$ nicht im Inneren haben. Im ersten Fall kann man als Homotopielinien die Strahlen mit Mittelpunkt 0 nehmen. Im zweiten Fall muß man die Homotopiekurven um 0 herumführen, was explizit aufzuschreiben schwierig werden kann. Daß $\gamma_0 = \partial K_1(0)$ und $\gamma_1 = \partial K_1(2)$ nicht homotop in \mathbb{C}^\times sind, ist anschaulich klar, denn γ_0 müßte an einer Stelle zerrissen werden, um über $z = 0$ hinwegzukommen. Dieses Zerreißen ist nicht stetig. Aber konkret zu beweisen, daß man keine Homotopie finden kann, wäre schwierig. Hier würde man umgekehrt vorgehen und die Kurvenintegrale für $f(z) = \frac{1}{z}$ berechnen. Wir wissen bereits $\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ (Beispiel 10.4) und $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 0$, da wir γ_1 auf \mathbb{C}_- beschränken können. Nach dem allgemeinen Cauchyschen Integralsatz können γ_0, γ_1 dann nicht homotop sein. \diamond

Der Beweis der Homotopieinvarianz der Kurvenintegrale ist anspruchsvoll. Es wird entscheidend genutzt, daß $H([\alpha, \beta] \times [0, 1]) \subseteq U$ kompakt ist. Wir benötigen im Beweis zwei weitere Eigenschaften kompakter Mengen (die allgemein in metrischen Räumen gelten):

Lemma 11.11 Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $\{U_i\}$ eine beliebige Überdeckung von A durch offene Mengen. Dann gibt es ein $\lambda > 0$ (eine Lebesgue-Zahl der Überdeckung) derart, daß jede Teilmenge $B \subseteq A$ mit Durchmesser $\text{diam}(B) := \sup_{z_1, z_2 \in B} (|z_1 - z_2|) \leq \lambda$ vollständig in einem U_i enthalten ist.

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine abgeschlossene Kreisscheibe $K_{\frac{1}{1+n}}(z_n) \subseteq A$, die nicht vollständig in einem U_i liegt. Wegen der Kompaktheit von A hat die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Mittelpunkte eine gegen $z \in A$ konvergente Teilfolge $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Dieses z liegt in einem U_j , und wegen der Offenheit von U_j gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $K_\epsilon(z) \subseteq U_j$. Wähle ein $N > \frac{1}{\epsilon}$. Dann gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq K$ gilt $|z - z_{n_k}| < \epsilon - \frac{1}{N}$. Wähle ein $n_k \geq N$. Dann gilt für jeden Punkt $w \in K_{\frac{1}{1+n_k}}(z_{n_k})$:

$$|w - z| \leq |w - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z| \leq \frac{1}{n_k + 1} + \epsilon - \frac{1}{N} \leq \frac{1}{N + 1} + \epsilon - \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Somit gilt $\overline{K_{\frac{1}{1+n}}(z_n)} \subseteq K_\epsilon(z) \subseteq U_j$, Widerspruch. Da jede Teilmenge mit Durchmesser $\leq d$ in einer abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{K_d(z)}$ liegt, ist das Lemma bewiesen. \square

Lemma 11.12 *Jede stetige Funktionen f auf einer kompakten Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ ist gleichmäßig stetig, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein universelles $\delta > 0$, so daß für alle $z_1, z_2 \in A$ mit $|z_1 - z_2| < \delta$ gilt: $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ global vorgegeben. Wegen der Stetigkeit von f gibt es zu jedem Punkt $w \in A$ ein $\delta(w) > 0$, so daß $|f(z) - f(w)| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $z \in K_{2\delta(w)}(w)$. Wegen Kompaktheit kann die Überdeckung $\bigcup_{w \in A} K_{\delta(w)}(w)$ (halbe Radien!) auf eine endliche $A \subseteq K_{\delta(w_1)}(w_1) \cup \dots \cup K_{\delta(w_k)}(w_k)$ reduziert werden. Setze $\delta := \min(\delta(w_1), \dots, \delta(w_k))$.

Seien nun zwei Punkte $z_1, z_2 \in A$ mit $|z_1 - z_2| < \delta$ gegeben. Der Punkt z_1 liege in der j -ten Umgebung, $z_1 \in K_{\delta(w_j)}(w_j)$. Dann ist $|z_1 - w_j| < \delta(w_j)$ und $|z_2 - w_j| \leq |z_2 - z_1| + |z_1 - w_j| < \delta + \delta(w_j) < 2\delta(w_j)$. Aus der Stetigkeit im Punkt w_j folgt:

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq |f(z_1) - f(w_j)| + |f(w_j) - f(z_2)| < \epsilon$$

für alle $z_1, z_2 \in A$ mit $|z_1 - z_2| < \delta$. \square

Satz 11.13 (Cauchyscher Integralsatz in allgemeinsten Form) *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph (eventuell bis auf endlich viele Punkte, in denen jedoch stetig). Dann gilt:*

- i) *Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ homotope stückweise stetig differenzierbare Kurven mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt, dann gilt*

$$\int_{\gamma_0} dz f(z) = \int_{\gamma_1} dz f(z).$$

- ii) *Für jede in U kontrahierbare stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ gilt $\int_{\gamma} dz f(z) = 0$.*

- iii) *Ist U einfach zusammenhängend und $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ eine beliebige stückweise stetig differenzierbare Kurve von $\gamma(\alpha) = z_0$ nach $\gamma(\beta) = z$, dann ist das Integral*

$$F(z) := \int_{z_0}^z dw f(w) = \int_{\gamma} dw f(w)$$

unabhängig von γ und eine holomorphe Stammfunktion zu f , d.h. es gilt $F'(z) = f(z)$.

Beweis. Durch Einschränkung auf die Zusammenhangskomponente, in denen die Kurven verlaufen, können wir annehmen, daß U ein Gebiet ist. Dann folgt aus Satz 10.15, daß alle drei Aussagen äquivalent sind. Damit ist nur i) zu zeigen.

Sei $H : [\alpha, \beta] \times [0, 1]$ eine Homotopie zwischen γ_0, γ_1 . Wähle eine beliebige, aber feste, Überdeckung $\{U_i\}$ der kompakten Menge $H([\alpha, \beta] \times [0, 1]) \subseteq U$ durch offene Kreisscheiben $U_i \subseteq U$, und sei λ die Lebesgue-Zahl dieser Überdeckung. Nach Lemma 11.12 (und Äquivalenz von Normen) gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß für alle $t, t' \in [\alpha, \beta]$ und $s, s' \in [0, 1]$ mit $|t - t'| < \epsilon$ und $|s - s'| < \epsilon$ folgt: $|H(t, s) - H(t', s')| < \lambda$. Wähle ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq \frac{1}{\epsilon}$ und betrachte die stetigen Kurven $\gamma_{\frac{k}{N}}(t) := H(t, \frac{k}{N})$ mit $k = 0, 1, \dots, N$, wobei γ_0, γ_1 sogar stückweise stetig differenzierbar sind. Wähle dann eine Unterteilung $\alpha = t_0 < \dots < t_n = \beta$ mit $|t_{j+1} - t_j| < \epsilon$, wobei die Sprungstellen von $\gamma'_0(t), \gamma'_1(t)$ in dieser Menge $\{t_j\}$ liegen. Seien nun

$$B_{kj} := \begin{cases} \gamma_0([t_j, t_{j+1}]) \cup \{\gamma_{\frac{1}{N}}(t_{j+1}), \gamma_{\frac{1}{N}}(t_j)\} & \text{für } k = 0 \\ \{\gamma_{\frac{k}{N}}(t_j), \gamma_{\frac{k}{N}}(t_{j+1}), \gamma_{\frac{k+1}{N}}(t_{j+1}), \gamma_{\frac{k+1}{N}}(t_j)\} & \text{für } 1 \leq k \leq N-2 \\ \{\gamma_{\frac{N-1}{N}}(t_j), \gamma_{\frac{N-1}{N}}(t_{j+1})\} \cup \gamma_1([t_j, t_{j+1}]) & \text{für } k = N-1. \end{cases}$$

je vier Punkte im Fall $1 \leq k \leq N-2$ und Teilstücke der Spur von γ_0, γ_1 mit zwei weiteren Punkten für $k = 0, N-1$. Nach Konstruktion gilt $\text{diam}(B_{kj}) < \lambda$, so daß es nach Lemma 11.11 eine offene Kreisscheibe $U_{i_{kj}}$ der Überdeckung gibt mit $B_{kj} \subseteq U_{i_{kj}}$. Wegen der Konvexität von $U_{i_{kj}}$ liegt mit je zwei Punkten auch ihre Verbindungsstrecke in $U_{i_{kj}}$. Sei deshalb für $1 \leq k \leq N-2$

$$\partial B_{kj} = \overrightarrow{\gamma_{\frac{k}{N}}(t_j)\gamma_{\frac{k}{N}}(t_{j+1})} \cup \overrightarrow{\gamma_{\frac{k}{N}}(t_{j+1})\gamma_{\frac{k+1}{N}}(t_{j+1})} \cup \overrightarrow{\gamma_{\frac{k+1}{N}}(t_{j+1})\gamma_{\frac{k+1}{N}}(t_j)} \cup \overrightarrow{\gamma_{\frac{k+1}{N}}(t_j)\gamma_{\frac{k}{N}}(t_j)}$$

die geschlossene Kurve gebildet aus den gerichteten Kanten der Vierecke B_{kj} . Für $k = 0$ und $k = N-1$ ersetzen wir die Kanten durch die entsprechenden Abschnitte der Kurven γ_0, γ_1 .

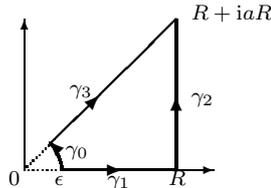
Nach Konstruktion ist ∂B_{kj} eine geschlossene Kurve im Sterngebiet $U_{i_{kj}}$, auf dem f holomorph ist. Nach Folgerung 11.6 haben wir $\int_{\partial B_{kj}} dz f(z) = 0$ für alle $0 \leq k \leq N-1$ und $0 \leq j \leq n-1$ und deshalb in der Summe

$$0 = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\partial B_{kj}} dz f(z) = \int_{\gamma_0} dz f(z) - \int_{\gamma_1} dz f(z),$$

da alle inneren Kanten doppelt, aber in umgekehrter Richtung durchlaufen werden, während sich die äußeren Kanten zusammenfügen zu γ_0 und zur negativ orientierten Kurve $-\gamma_1$. \square

Der Cauchysche Integralsatz ist zusammen mit Beispiel 10.4 die Grundlage der gesamten Funktionentheorie. Seine Konsequenzen sind grundlegend verschieden zur reellen Differentialrechnung. Außerdem erlaubt er bereits die Berechnung komplizierterer reeller Integrale durch Schließen des Integrationswegs im Komplexen.

Beispiel 11.14 In den Übungen wird das Kurvenintegral der auf ganz \mathbb{C} holomorphen Funktion $f(z) = e^{-z^2}$ über ein Dreieck mit Eckpunkten $0, R, R(1 + ia)$ berechnet und so auf die Fresnelschen Formeln $\int_0^\infty \cos(t^2)dt = \int_0^\infty \sin(t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ geschlossen. Diese Rechnung kann ein wenig verallgemeinert werden auf $f(z) = z^{2s-1}e^{-z^2}$ mit $0 < s < 1$. Da die komplexen Potenzen in $z = 0$ nicht erklärt sind, muß man die Ecke bei 0 durch einen Kreisbogen ersetzen:



Im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$ erhält man durch die gleiche Rechnung wie in den Übungen für $0 < s < 1$

$$\int_0^\infty dt t^{2s-1} \cos(t^2) = \frac{1}{2} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}, \quad \int_0^\infty dt t^{2s-1} \sin(t^2) = \frac{1}{2} \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2},$$

$$\int_0^\infty dx x^{s-1} \cos x = \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}, \quad \int_0^\infty dx x^{s-1} \sin x = \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}.$$

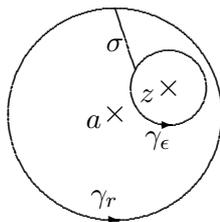
Dabei ist $\Gamma(z)$ die auf $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ definierte Gamma-Funktion, die uns noch beschäftigen wird. Für $\text{Re}(s) > 0$ hat die Gamma-Funktion eine Darstellung als uneigentliches Riemann-Integral, $\Gamma(s) = \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t}$. Im Sinus-Integral existiert der Limes $s \rightarrow 0$ mit $\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$. \triangleleft

12 Die Cauchysche Integralformel

Satz 12.1 (Cauchysche Integralformel) *Es sei f holomorph in einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$, welche die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{K_r(a)}$ mit Mittelpunkt $a \in U$ und Radius r enthält. Der (orientierte) Umfang $\partial K_r(a)$ der Kreisscheibe ist die Kurve $\gamma_r(t) = a + re^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Dann gilt für jeden Punkt $z \in K_r(a)$ im Inneren des Kreises*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} dw \frac{f(w)}{w - z}.$$

Beweis. Zu $z \in K_r(a)$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{K_\epsilon(z)}$ um z mit Radius ϵ im Inneren von $K_r(a)$ liegt. Sei $\gamma_\epsilon(t) = z + \epsilon e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ der Umfang. Der entstehende (asymmetrische) Kreisring $KR_{r,\epsilon} := \overline{K_r(a)} \setminus K_\epsilon(z)$ werde aufgeschnitten entlang einer beliebigen (stückweise differenzierbaren) Kurve $\sigma \in KR_{r,\epsilon}$.



Dann ist $\frac{f(w)}{w-z}$ bezüglich w holomorph in einer Umgebung von $KR_{r,\epsilon}$, andererseits ist die Kurve $\sigma \cup \gamma_\epsilon \cup (-\sigma)$ homotop zu γ_r . Da sich die Kurvenintegrale über σ und $(-\sigma)$ wegheben, gilt nach Cauchyschem Integralsatz 11.13

$$\int_{\gamma_r} dw \frac{f(w)}{w-z} = \int_{\gamma_\epsilon} dw \frac{f(w)}{w-z} = \int_{\gamma_\epsilon} dw \frac{f(w)-f(z)}{w-z} + f(z) \int_{\gamma_\epsilon} dw \frac{1}{w-z}.$$

Die linke Seite ist unabhängig von ϵ , also können wir den Limes $\epsilon \rightarrow 0$ betrachten. Da f in einer Umgebung von z komplex differenzierbar ist, ist $\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ auf $K_\epsilon(z)$ beschränkt. Da der Umfang $L(\gamma_\epsilon)$ mit ϵ gegen 0 geht, ist $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} dw \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = 0$. Die Cauchysche Integralformel folgt nun aus dem zentralen Beispiel 10.4 unter Berücksichtigung der Verschiebung $\gamma_\epsilon(t) - z = \epsilon e^{it}$, die auf $\int_{\gamma_\epsilon} dw \frac{1}{w-z} = 2\pi i$ führt. \square

Man sieht im Beweis sofort, daß wir die Kreislinie γ_r durch eine beliebige andere zu γ_r homotope Kurve ersetzen dürfen. Diese Verallgemeinerung nehmen wir erst im Residuensatz vor. Über die Cauchyche Integralformel lassen sich bereits einfache Kurvenintegrale berechnen.

Beispiel 12.2 Sei $\gamma_r(t) = r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ und $r \in \{1, 3\}$. Dann gilt nach Partialbruchzerlegung

$$\int_{\gamma_r} dw \frac{\exp(w)}{w^2 + 2w} = \int_{\gamma_r} dw \frac{\exp(w)}{w(w+2)} = \int_{\gamma_r} dw \frac{\exp(w)}{2w} - \int_{\gamma_r} dw \frac{\exp(w)}{2(w+2)}.$$

Für $r = 3$ liegen $z = 0$ und $z = -2$ im Inneren des Kreises $K_3(0)$, so daß wir $\int_{\gamma_3} dw \frac{\exp(w)}{w^2+2w} = 2\pi i \left(\frac{\exp(0)}{2} - \frac{\exp(-2)}{2} \right) = \pi i (1 - e^{-2})$ erhalten. Für $r = 1$ ist $\frac{\exp(w)}{2(w+2)}$ holomorph in einer Umgebung von $K_1(0)$, so daß das Teilintegral nach Cauchyschem Integralsatz verschwindet. Es verbleibt $\int_{\gamma_1} dw \frac{\exp(w)}{w^2+2w} = \pi i$. \triangleleft

Der Mittelpunkt des Integrationskreises muß nicht mit der Nullstelle des Zählers zusammenfallen. Sind beide gleich, so ergibt sich

Folgerung 12.3 (Mittelwertsatz) *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in der Cauchyschen Integralformel gilt $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt f(z + r e^{it})$.*

Beweis. Setze $a = z$ und beachte $\gamma_r'(t) = ir e^{it} = i(\gamma_r(t) - z)$. \square

Entscheidend für die gesamte Funktionentheorie ist die Tatsache, daß man den Wert $f(z)$ durch ein Kurvenintegral berechnen kann, wobei die Kurve *außerhalb* von problematischen Punkten der Funktion gewählt werden kann. Außerdem geht der Punkt z im Kurvenintegral gar nicht in die Funktion f ein, sondern tritt nur im Faktor $\frac{1}{w-z}$ auf. Dadurch lassen sich bemerkenswerte Aussagen gewinnen.

Satz 12.4 (Potenzreihenentwicklung) Eine holomorphe Funktion f auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ kann in jeder offenen Kreisscheibe $K_\rho(a) \subseteq U$ in eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ entwickelt werden. Der Konvergenzradius ist mindestens so groß wie der Abstand des Mittelpunktes a zum Rand von U . Die Entwicklungskoeffizienten sind gegeben durch die Integrale

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} dw \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}$$

für einen beliebigen Radius $0 < r < \rho$. Ist $|f(w)| \leq M$ für alle $w \in \partial K_r(a)$, dann können die Koeffizienten abgeschätzt werden durch $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$.

Beweis. Für $z \in K_r(a)$ mit $r < \rho$ und $w \in \partial K_r(a)$ gibt es eine reelle Zahl $0 < q < 1$, so daß $|\frac{z-a}{w-a}| \leq 1 - q$. Dann gilt

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} = \frac{f(w)}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n,$$

wobei die Reihe, die durch $\sum_{n=0}^{\infty} (1-q)^n = \frac{1}{q}$ majorisiert wird, *gleichmäßig* konvergent ist. Damit vertauschen Summe und Integral, und es gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} dw \frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} dw \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \right) (z-a)^n.$$

Die Abschätzung ergibt sich aus $|\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}| \leq \frac{M}{r^{n+1}}$ für alle $w \in \partial K_r(a)$ und der Länge $2\pi r$ des Randes. \square

Als wichtige Konsequenz ergibt sich:

Folgerung 12.5 Jede holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist beliebig oft komplex differenzierbar (Satz von Goursat), alle Ableitungen $f^{(k)}$ sind holomorph und gegeben durch

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K_r(a)} dw \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}, \quad z \in K_r(a). \quad \square$$

Diese Aussage ist grundlegend verschieden von der reellen Differentialrechnung: Für eine reell differenzierbare Funktion muß die Ableitung nicht einmal stetig sein (z.B. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$). Selbst wenn eine Funktion beliebig oft reell differenzierbar ist, muß sie nicht in eine Potenzreihe entwickelbar sein (z.B. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ in $x = 0$).

Umgekehrt gelesen können wir nun (eventuell nach Partialbruchzerlegung) auch Funktionen mit mehrfachen Nullstellen im Nenner integrieren:

Beispiel 12.6 Mit $f(z) = \sin(z)$ gilt

$$\int_{\partial K_1(1)} dw \frac{\sin(w)}{(w-1)^2} = \frac{2\pi i}{1!} f'(1) = 2\pi i \cos(1). \quad \triangleleft$$

Der folgende Satz ist eine Art Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes:

Satz 12.7 (Morera) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ (nur!) stetig. Für jedes Dreieck Δ mit $\bar{\Delta} \subseteq U$ gelte $\int_{\partial\Delta} dz f(z) = 0$. Dann ist f sogar holomorph auf U .

Beweis. Nach gleicher Überlegung wie zuvor (z.B. Satz 10.15) konstruiert man in einer offenen Kugel $K_\epsilon(z_0)$ mittels $F(z) = \int_{z_0}^z dw f(w)$ (das Wegintegral in $F(z)$ verläuft entlang der Strecke von z_0 nach z) eine holomorphe Stammfunktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$. Nach Folgerung 12.5 existiert dann aber $f'(z) = F''(z)$. \triangleleft

Insbesondere ist eine stetige und bis auf endlich viele Punkte holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ nach Lemma von Goursat und Satz von Morera sogar auf ganz U holomorph.

Satz 12.8 Ist $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine in $K_R(z_0)$ konvergente Potenzreihe, dann kann f um jeden Punkt $w \in K_R(z_0)$ in eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-w)^n$ entwickelt werden. Der Konvergenzradius dieser Reihe ist mindestens $R - |w - z_0|$, und es gilt $b_n = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k (w - z_0)^{k-n}$.

Beweis. f ist holomorph in $w \in K_R(z_0)$ und deshalb in eine Potenzreihe entwickelbar. Der Konvergenzradius folgt aus Satz 12.4, sowie

$$b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(w) = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1) \cdots (k-n+1) (w-z_0)^{k-n}. \quad \square$$

Oft ist der Konvergenzradius der umentwickelten Reihe größer als $R - |w - z_0|$, so daß die umentwickelte Reihe die Funktion f über $K_R(z_0)$ hinaus fortsetzt. Man spricht dann von einer *analytischen Fortsetzung* von f .

Beispiel 12.9 Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ mit Konvergenzradius $R = 1$. Wir entwickeln f um $w = -\frac{1}{2}$. Innerhalb des Konvergenzkreises ist

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{\frac{3}{2} - (z + \frac{1}{2})} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \left(z + \frac{1}{2} \right) \right)^n.$$

Die Reihe konvergiert für $|z + \frac{1}{2}| < \frac{3}{2}$ und wird damit auf einen größeren Kreis analytisch fortgesetzt. \triangleleft

Eine komplexe Funktion f , die überall auf \mathbb{C} definiert und holomorph ist, heißt *ganze Funktion*. Nach Satz 12.4 gibt es für eine ganze Funktion f die Darstellung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius ∞ .

Satz 12.10 (Liouville) *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Ist $|f| \leq M$ auf \mathbb{C} , dann erfüllen die Entwicklungskoeffizienten nach Satz 12.4 die Abschätzung $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ für beliebiges $r > 0$. Also ist $a_n = 0$ für alle $n \geq 1$ und $f(z) = a_0$. \square

Der Satz von Liouville hat kein Analogon in der reellen Differentialrechnung. Z.B. ist $f(x) = \sin x$ beliebig oft differenzierbar auf \mathbb{R} , beschränkt, und nichtkonstant.

Satz 12.11 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 mit komplexen Koeffizienten besitzt in \mathbb{C} eine Nullstelle.*

Beweis. Angenommen, das Polynom P habe keine Nullstelle, dann ist $\frac{1}{P}$ holomorph auf ganz \mathbb{C} . Außerdem ist $\frac{1}{P(z)} \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$, d.h. $\frac{1}{P(z)}$ ist beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist $\frac{1}{P}$ dann konstant, also wäre auch P konstant. Widerspruch. \square

Nach Abdividieren der Nullstellen läßt sich somit jedes komplexe Polynom $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ vom Grad n , normiert auf $a_n = 1$, faktorisieren in $P(z) = \prod_{i=1}^n (z - b_i)$.

Der Satz von Liouville hat folgende Verallgemeinerung:

Satz 12.12 *Für eine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gelte $|f(z)| \leq a|z|^d + b$ für ein $d \in \mathbb{N}$ und Konstanten $a, b > 0$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq d$.*

Beweis. Es gilt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$. Für alle $w \in K_r(0)$, mit $r > 0$ beliebig, gilt die Abschätzung $|f(w)| \leq ar^d + b$ und dann nach Satz 12.4 $|a_n| \leq ar^{d-n} + br^{-d}$. Somit $a_n = 0$ für alle $n > d$. \square

13 Struktursätze

13.1 Nullstellen

Definition 13.1 Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ein Punkt $z_0 \in U$ heißt *k-fache Nullstelle* von f , falls $0 = f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0)$ und $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen (im Reellen) ist die holomorphe Funktion f in einer Umgebung einer einfachen Nullstelle z_0 (allgemeiner: jedes z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$) diffeomorph. Das bleibt auch im Komplexen richtig: $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist in z_0 *lokal biholomorph*, d.h. es gibt eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U$ von z_0 , so daß $f : U_0 \rightarrow V_0 := f(U_0)$ bijektiv (und holomorph) ist mit holomorpher Umkehrfunktion. Deren Ableitung ist, wie üblich, $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$.

Liegt in z_0 eine mehrfache ($k > 1$) Nullstelle vor, so kann f in z_0 nicht bijektiv sein. Genauer liegt (wie schon bei den Einheitswurzeln) eine k -fache Mehrdeutigkeit vor. Zunächst konstruiert man eine Wurzel:

Satz 13.2 Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $k > 1$ -facher Nullstelle $z_0 \in U$. Dann gibt es eine auf einer Umgebung $U_0 \subseteq U$ von z_0 biholomorphe Funktion h mit einfacher Nullstelle in z_0 und $f(z) = (h(z))^k$ für alle $z \in U_0$.

Beweis. f läßt sich in einer Umgebung von z_0 in eine Potenzreihe entwickeln, die erst in k -ter Potenz beginnt:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k g(z) \quad \text{mit } g(z_0) \neq 0.$$

Gegebenenfalls nach Verkleinerung der Umgebung gilt (wegen Stetigkeit) $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U_0$. Nach einer Übungsaufgabe (Blatt 6, Aufgabe 1b) gibt es eine holomorphe Funktion $H : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ mit $H^k = g$ und $H(z) \neq 0$. Setze $h(z) = (z - z_0)H(z)$. \square

Offenbar gibt es neben $h(z) = h_0(z)$ genau die weiteren Lösungen $h_l(z) = h(z)e^{\frac{2\pi li}{k}}$ mit $l = 1, 2, \dots, k-1$ von $(h_l(z))^k = f(z)$. Zunächst könnte l von Punkt zu Punkt variieren; für eine holomorphe (insbesondere stetige) Lösung $h_l(z)$ muß l aber konstant auf jeder Zusammenhangskomponente sein.

Satz 13.3 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $k \geq 1$ -facher Nullstelle $z_0 \in G$. Dann gibt es zu jedem genügend kleinen $\epsilon > 0$ eine Umgebung U_ϵ von z_0 , die durch f auf $K_\epsilon(0)$ abgebildet wird, wobei jedes $w \in K_\epsilon(0) \setminus \{0\}$ genau k -fach und 0 genau einmal (nämlich in z_0) angenommen wird.

Beweis. Nach Satz 13.2 gibt es in einer Umgebung von z_0 eine Darstellung $f(z) = (h(z))^k$ (trivialerweise für $k = 1$) mit h holomorph und mit einfacher Nullstelle z_0 . Somit ist h lokal biholomorph, d.h. es gibt offene Umgebungen U_0 von z_0 und V_0 von $0 = h(z_0)$, so daß die eingeschränkte Abbildung $h : U_0 \rightarrow V_0$ bijektiv und holomorph ist mit $h^{-1} : V_0 \rightarrow U_0$ holomorph. Für ein genügend kleines $\epsilon > 0$ ist $K_{\sqrt[k]{\epsilon}}(0) \subseteq V_0$. Das Urbild $U_\epsilon := h^{-1}(K_{\sqrt[k]{\epsilon}}(0))$ hat die gewünschten Eigenschaften: $h(U_\epsilon) = K_{\sqrt[k]{\epsilon}}(0)$, somit $f(U_\epsilon) = (h(K_{\sqrt[k]{\epsilon}}(0)))^k = K_\epsilon(0)$. Wir betrachten die Kreissektoren $W_l := \{w \in K_{\sqrt[k]{\epsilon}}(0) \setminus \{0\} : \frac{2\pi l}{k} \leq \arg(w) < \frac{2\pi(l+1)}{k}\}$ mit $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Dann ist h^{-1} bijektiv auf jedem W_l , aber jedes W_l wird unter $w_l \mapsto w_l^k$ auf ganz $K_\epsilon(0) \setminus \{0\}$ abgebildet. Somit hat $f(z) = w$ für $w \in K_\epsilon(0) \setminus \{0\}$ genau k Urbilder in U_ϵ . Wegen $h(z_0) = 0$ und h bijektiv ist z_0 die einzige Lösung von $h(z) = 0$, und dann von $h(z)^n = 0$ auf U_ϵ . \square

13.2 Identitätssatz und Gebietstreue

Holomorphe Funktionen erfüllen folgenden

Satz 13.4 (Identitätssatz) *Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind für zwei holomorphe Funktionen $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ äquivalent:*

- i) $f = g$
- ii) Die Identitätsmenge $\{w \in G : f(w) = g(w)\}$ hat einen Häufungspunkt in G .
- iii) Es gibt ein $z_0 \in G$, so daß $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. i) \Rightarrow ii) ist klar.

ii) \Rightarrow iii) Für $h = f - g$ hat die Nullstellenmenge von h einen Häufungspunkt $z_0 \in G$. Angenommen, es gäbe ein $k \in \mathbb{N}$ mit $h^{(k)}(z_0) \neq 0$, und sei n das Minimum dieser k . Wegen Potenzreihenentwicklung ist $h(z) = (z - z_0)^n h_n(z)$ mit $h_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ und $h_n(z_0) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von h_n gilt dann auch $h_n(z) \neq 0$ für alle z aus einer ϵ -Umgebung von z_0 , im Widerspruch zur Voraussetzung, daß z_0 Häufungspunkt der Nullstellenmenge ist.

iii) \Rightarrow i) Es sei $h = f - g$ und $S_k := \{w \in G : h^{(k)}(w) = 0\}$. Als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist S_k abgeschlossen in G . Da der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Teilmengen wieder abgeschlossen ist, ist $S := \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k$ abgeschlossen in G . Andererseits ist S auch offen in G , denn für $z_1 \in S$ ist die Potenzreihenentwicklung von h in einer beliebigen offenen Kreisscheibe $K_\epsilon(z_1) \subseteq G$ die Nullreihe. Damit verschwinden sämtliche Ableitungen $h^{(k)}(z)$ für alle $z \in K_\epsilon(z_1)$, also ist $K_\epsilon(z_1) \subseteq S$. Da G zusammenhängend ist, folgt $S = G$. \square

Bemerkenswert ist, daß $f = g$ in ganz G aus zwei entgegengesetzten Bedingungen folgt: Aus der Gleichheit aller Ableitungen an *nur einem* Punkt sowie aus der Gleichheit an genügend vielen Punkten in G . Das ist grundlegend verschieden vom reellen Fall. Für die Funktionen $f(x) = 0$ und $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ sind in $x = 0$ alle Ableitungen gleich, aber offenbar ist $f \neq g$. Als wichtige Konsequenz ergibt sich, daß holomorphe Funktionen f, g auf einem Gebiet G , die auf $I \subseteq \mathbb{R}$ (also als reelle Funktionen) übereinstimmen, bereits auf ganz G identisch sind.

Beispiel 13.5 Für den komplexen Logarithmus gilt $L(1 + z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} z^{k+1}$ für alle $z \in K_1(0)$, denn $1 + z \in \mathbb{C}_+$, und die Gleichheit gilt auf dem reellen Intervall $] -1, 1[$. \triangleleft

Beispiel 13.6 Man bestimme alle in einem Gebiet $G \ni \frac{1}{2}$ definierten Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}^\times$. Setze $z_n = \frac{n+1}{2n+1}$, dann ist $(2n+1)z_n = n + 1$, also $z_n - 1 = n(1 - 2z_n)$ und schließlich $\frac{1}{n} = \frac{1-2z_n}{z_n-1}$. Somit stimmt $f(z)$ mit $\frac{1-2z}{z-1}$ überein auf einer Teilmenge mit Häufungspunkt. Nach Identitätssatz ist $f(z) = \frac{1-2z}{z-1}$ die einzige Lösung. \triangleleft

Satz 13.7 (von der Gebietstreue) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet (offen, nichtleer, zusammenhängend) und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist auch $f(G) \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

Beweis. Da f stetig ist, ist mit G auch $f(G)$ zusammenhängend (und wie G nicht leer). Verbleibt zu zeigen, daß $f(G)$ offen ist. Sei $w_0 = f(z_0) \in f(G)$ beliebig. Da f nicht konstant ist, hat $F(z) := f(z) - w_0$ in z_0 eine Nullstelle endlicher Ordnung (sonst wäre $F = 0$ nach Identitätssatz und damit f konstant). Sei also z_0 eine k -fache Nullstelle, dann gibt es nach Satz 13.3 ein $\epsilon > 0$ und eine Umgebung $U_\epsilon(z_0)$ derart, daß $F(U_\epsilon(z_0)) = K_\epsilon(0)$ ist. Nach Verschiebung folgt $f(U_\epsilon(z_0)) = K_\epsilon(w_0)$, und $f(G)$ ist offen. \square

Eine vergleichbare Aussage im Reellen wäre falsch. Beispielsweise ist $\sin(]0, 2\pi[) =]-1, 1[$ kein Gebiet.

Folgerung 13.8 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit i) $\operatorname{Re} f$ oder ii) $\operatorname{Im} f$ oder iii) $|f|$ konstant. Dann ist f selbst konstant.

Beweis. In allen Fällen ist $f(G)$ kein Gebiet. \square

Die Aussage ließe sich auch über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen beweisen.

Folgerung 13.9 Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und g holomorph in einer Umgebung von $f(G)$. Ist $g \circ f$ konstant auf G , so ist schon f oder g konstant.

Beweis. Ist f nicht konstant, dann ist $f(G)$ ein Gebiet. Also muß g konstant sein. \square

Wegen Gebietstreue liegt Biholomorphie allein unter Annahme der Injektivität vor:

Satz 13.10 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann gilt $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, d.h. $f : G \mapsto f(G)$ ist biholomorph.

Beweis. Die holomorphe Funktion f' kann nicht identisch Null sein, da sonst f konstant und nicht injektiv. Also (Identitätssatz) liegen alle Nullstellen von f' diskret (ohne Häufungspunkt). Die Abbildung $f : G \rightarrow f(G)$ ist stetig, bijektiv mit stetiger Umkehrfunktion $f^{-1} = g$. Denn ist $U \subseteq G$ offen, dann ist nach Gebietstreue $f(U) = g^{-1}(U) \subseteq f(G)$ offen, und $g = f^{-1}$ ist stetig.

Sei $A = \{z \in G : f'(z) = 0\}$ die Nullstellenmenge von f' . Dann ist $f : G \setminus A \mapsto f(G) \setminus f(A)$ biholomorph, d.h. $f^{-1} : f(G) \rightarrow G$ ist stetig und außerhalb $f(A)$ holomorph. Wegen Stetigkeit kann auch $f(A)$ keine Häufungspunkte haben. Damit gibt es in jedem abgeschlossenen Dreieck $\bar{\Delta} \subseteq f(G)$ nur endlich viele Punkte, in denen f^{-1} stetig, aber nicht holomorph ist. Nach dem Lemma von Goursat gilt dennoch $\int_{\partial\Delta} dz f^{-1}(z) = 0$, so daß nach Satz von Morera f^{-1} sogar

global holomorph ist auf ganz $f(G)$, mit $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$ für alle $z \in G$. Somit ist $A = \emptyset$. \square

Im Reellen reicht Bijektivität nicht, wie das Beispiel der differenzierbaren und injektiven Funktion $f(x) = x^3$ zeigt: Hier ist $f'(0) = 0$, und die Umkehrfunktion ist in 0 zwar stetig, aber nicht differenzierbar.

Bilder einfach zusammenhängender Mengen (jede geschlossene Kurve ist kontrahierbar) unter holomorphen Abbildungen müssen nicht wieder einfach zusammenhängend sein, wie das Beispiel $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ zeigt. Man braucht (und es genügt) Injektivität sowie folgende topologische Beobachtung:

Lemma 13.11 *Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn $\int_\gamma dz f(z) = 0$ für jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ und jede geschlossene Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow G$.*

Beweisskizze. Zu zeigen bleibt: Aus ‘nicht einfach zusammenhängend’ folgt: Es gibt f, γ mit nichtverschwindendem Kurvenintegral. Jede geschlossene Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow G$ ist in \mathbb{C} kontrahierbar, aber eine entsprechende Homotopie führt notwendig über einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann ist γ auch in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ nicht kontrahierbar, läßt sich aber deformieren in einen Kreis mit Mittelpunkt z_0 , der $(n \geq 1)$ -mal um z_0 herumläuft. Man rechnet nach (wird später präzisiert): $\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \pm 2\pi i n$. Die linke Seite kann wahlweise in G oder $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ betrachtet werden. \square

Satz 13.12 *Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ sei einfach zusammenhängend. Ist $F : G \rightarrow F(G) \subseteq \mathbb{C}$ holomorph und bijektiv, dann ist das Gebiet $F(G)$ ebenfalls einfach zusammenhängend.*

Beweis. Sei $f : F(G) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann ist $(f \circ F)F'$ holomorph auf G , so daß nach Cauchyschem Integralsatz jedes Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow G$ mit $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ verschwindet. Nach Definition des Kurvenintegrals und Kettenregel gilt

$$0 = \int_\gamma dz (f \circ F(z))F'(z) = \int_\alpha^\beta dt f(F(\gamma(t)))F'(\gamma(t))\gamma'(t) = \int_{F(\gamma)} dw f(w).$$

Wegen Bijektivität kann für $F(\gamma)$ jede geschlossene Kurve in $f(G)$ gewählt werden, und $f(G)$ ist einfach zusammenhängend. \square

13.3 Maximumprinzip

Satz 13.13 *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine holomorphe Funktion nehme auf G ein (globales oder lokales) betragsmäßiges Maximum an, d.h. es gibt ein $z_0 \in G$ mit $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in G$ bzw. alle z einer Umgebung von z_0 . Dann ist f konstant.*

Beweis. Wäre f nicht konstant, dann enthält $f(G)$ wegen Gebietstreue eine offene Kugel $K_\epsilon(f(z_0))$, in der es $|f(z)| > |f(z_0)|$ gibt, Widerspruch.

Jedes lokale Maximum ist globales Maximum in einer genügend kleinen Kugel $K_\epsilon(z_0)$, in der f dann konstant ist. Nach Identitätssatz ist f dann auf ganz G konstant. \square

In den Übungen soll ein direkter Beweis des Maximumprinzips geführt werden. Außerdem werden Maxima auf dem Rand diskutiert, falls sich f stetig auf \bar{G} fortsetzen läßt.

Eine vergleichbare Aussage im Reellen wäre falsch. Beispielsweise hat e^{-x^2} in jedem offenen Intervall $] -R, R[$ ein betragsmäßiges Maximum.

Satz 13.14 (Minimumprinzip) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine holomorphe und nichtkonstante Funktion nehme in $a \in G$ ein (globales oder lokales) betragsmäßiges Minimum an. Dann ist $f(a) = 0$.

Beweis. Wäre $f(a) \neq 0$, dann ist $\frac{1}{f}$ holomorph auf G und nimmt in a ein betragsmäßiges Maximum an. Widerspruch zu f nichtkonstant. \square

Hieraus ergibt sich ein weiterer kurzer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra: Ein Polynom muß nach Extremwertsatz in jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $\bar{K}_R(0)$ ein betragsmäßiges Minimum haben. Ist der Grad des Polynoms ≥ 1 und R genügend groß, so kann dieses Minimum nicht auf dem Rand liegen; nach Minimumprinzip ist es gleich 0.

Eine vergleichbare Aussage im Reellen wäre falsch. Beispielsweise hat $1 + x^2$ in jedem offenen Intervall $] -R, R[$ ein betragsmäßiges Minimum $\neq 0$.

Eine weitere Anwendung betrifft Abbildungen von $K_1(0)$ in sich selbst:

Satz 13.15 Sei $f : K_1(0) \rightarrow K_1(0)$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt:

- i) $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in K_1(0)$ (Schwarzsches Lemma).
- ii) $f'(0) \leq 1$.
- iii) Gilt Gleichheit, d.h. $|f(a)| = |a|$ für ein $a \in K_1(0)$, dann ist f eine Drehung: $f(z) = \zeta z$ für ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$.

Beweis. i)+ii) f läßt sich um 0 in eine Potenzreihe entwickeln mit Konvergenzradius ≥ 1 . Der Koeffizient a_0 verschwindet, so daß $g(z) := \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$. Sei $0 < r < 1$. Wegen $|f(z)| < 1$ gilt $|g(z)| < \frac{1}{r}$ zunächst für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$, nach Maximumprinzip auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq r$. Im Limes $r \rightarrow 1$ entsteht $|g(z)| \leq 1$ und dann $|f(z)| \leq |z|$ und $g(0) = f'(0) \leq 1$.

Ist $|f(a)| = |a|$, dann nimmt $|g(a)| = 1$ das Maximum an. Somit ist g konstant und $f(z) = gz$. \square

Wir können nun die biholomorphen (f bijektiv und f, f^{-1} holomorph) Selbstabbildungen des Einheitskreises vollständig beschreiben:

Satz 13.16 Sei $f : K_1(0) \rightarrow K_1(0)$ biholomorph. Dann gilt $f(z) = \zeta \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ für ein $a \in K_1(0)$ und ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$.

Beweis. Die Abbildung $f_a(z) := \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ ist wegen $|\bar{a}z| < 1$ holomorph auf $K_1(0)$. Wegen

$$|\bar{a}z - 1|^2 = 1 - \bar{a}z - \bar{z}a + |a|^2|z|^2 = \underbrace{(1 - |a|)^2(1 - |z|)^2}_{>0} + |z - a|^2 \quad (*)$$

gilt $|z-a| < |\bar{a}z-1|$, d.h. $f_a : K_1(0) \rightarrow K_1(0)$ ist eine holomorphe Selbstabbildung des Einheitskreises. Sie erfüllt

$$f_a(f_a(z)) = \frac{f_a(z) - a}{\bar{a}f_a(z) - 1} = \frac{\frac{z-a}{\bar{a}z-1} - a}{\bar{a}\frac{z-a}{\bar{a}z-1} - 1} = \frac{z - |a|^2z}{-|a|^2 + 1} = z.$$

Somit ist f_a bijektiv mit $f_a^{-1} = f_a$ und dann auch biholomorph.

Setze für die gegebene biholomorphe Abbildung $a := f^{-1}(0)$ und betrachte $g := f \circ f_a$. Dann ist auch $g : K_1(0) \rightarrow K_1(0)$ biholomorph mit $g(0) = f(a) = 0$. Wegen $|g(z)| \leq |z| = |g^{-1}(g(z))| \leq |g(z)|$ ist $|g(z)| = |z|$ und dann $g(z) = \zeta z$, also $f(z) = f \circ f_a(f_a(z)) = g(f_a(z)) = \zeta f_a(z)$. \square

Bemerkung 13.17 Ein wichtiges Theorem der Topologie ist der *Browersche Fixpunktsatz*, nach dem jede stetige Abbildung $f : \overline{K_1(0)} \rightarrow \overline{K_1(0)}$ (nicht notwendig bijektiv!) einen Fixpunkt hat, $f(z_0) = z_0$ für ein $z_0 \in \overline{K_1(0)}$. Das Theorem verallgemeinert sich auf stetige Abbildungen $f : K \rightarrow K$ für eine konvexe (homöomorph zu $\overline{K_1(0)}$ genügt) kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

Wir fragen nach Fixpunkten $z_0 = \zeta \frac{z_0-a}{\bar{a}z_0-1} \in K_1(0)$, also $\bar{a}z_0^2 - (1+\zeta)z_0 + \zeta a = 0$. Sei zunächst $a = 0$. Für $\zeta = -1$ ist f die Identität $f(z) = z$, und jeder Punkt ist Fixpunkt. Für $\zeta \neq -1$ ist der Mittelpunkt $z_0 = 0$ die einzige Lösung. Ist $a \neq 0$, dann gibt es zwei Lösungskandidaten z_1, z_2 mit $z_1 z_2 = \frac{\zeta a}{|a|}$ (vom Betrag 1). Somit folgt: Entweder gibt es genau einen Fixpunkt $z_0 \in K_1(0)$, oder beide Kandidaten z_1, z_2 liegen auf dem Rand des Einheitskreises. Im letzten Fall hat $f : K_1(0) \rightarrow K_1(0)$ gar keinen Fixpunkt. Hier kann man $a \in K_1(0)$ und $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| = 1$ beliebig vorgeben: Nach (*) im Beweis von Satz 13.16 liegt $\zeta := z_1 \frac{\bar{a}z_1-1}{z_1-a}$ auf dem Rand des Einheitskreises, und es ergibt sich $z_2 = \frac{a}{|a|} \frac{\bar{a}z_1-1}{z_1-a}$.

Teil IV

Der Residuensatz

Der Residuensatz stellt eine umfassende und für viele praktisch auftretende Rechnungen entscheidende Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel dar. Wir können beliebige geschlossene Wegintegrale über Funktionen ausführen, die holomorph bis auf isolierte Singularitäten sind.

14 Isolierte Singularitäten

Definition 14.1 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in U$ und $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt a eine isolierte Singularität von f .

In manchen Fällen handelt es sich nicht wirklich um eine Singularität:

Satz 14.2 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Es sei f eine auf $U \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion, und es existiere eine Umgebung $V \subseteq U$ von $a \in U$, so daß f auf $V \setminus \{a\}$ beschränkt ist. Dann gibt es eine Fortsetzung \tilde{f} von f , die holomorph auf ganz U ist.*

Beweis. Wir definieren eine Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & \text{für } z \neq a \\ 0 & \text{für } z = a \end{cases}$$

Wegen der Beschränktheit von f auf $V \setminus \{a\}$ ist g holomorph auf $V \setminus \{a\}$ und dann auf $U \setminus \{a\}$, und es gilt $g'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)-g(a)}{z-a} = 0$. Damit besitzt g die Potenzreihenentwicklung $g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^n$, und die Fortsetzung von f kann definiert werden als $\tilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z-a)^n$. \square

Definition 14.3 Eine isolierte Singularität $a \in U$ von $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt

- i) *hebbar*, falls f holomorph in den Punkt a fortgesetzt werden kann;
- ii) *Pol*, falls keine holomorphe Fortsetzung in a existiert, aber ein $k \in \mathbb{N}^\times$ derart, daß $(z-a)^k f$ holomorph in den Punkt a fortgesetzt werden kann; die kleinste derartige Zahl k heißt die *Ordnung des Pols*;
- iii) *wesentliche Singularität*, wenn sie weder hebbar noch Pol ist.

Die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *meromorph*, wenn sie bis auf Pole in U holomorph ist (wesentliche Singularitäten werden ausgeschlossen).

Der Punkt a ist genau dann ein k -facher Pol von f , wenn es in U eine Darstellung $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$ gibt, wobei g holomorph in U ist (insbesondere auch in a) und $g(a) \neq 0$ gilt. Wesentliche Singularitäten existieren:

Beispiel 14.4 $\exp(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$ hat in $a = 0$ eine wesentliche Singularität: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ bleibt $z^k \exp(\frac{1}{z})$ unbeschränkt in einer Umgebung von 0. \triangleleft

Jede rationale Funktion ist meromorph: Mehr noch: die rationalen Funktionen sind genau die auf der sogenannten Kompaktifizierung $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ meromorphen Funktionen.

Satz 14.5 Die Menge $\mathcal{M}(U)$ der meromorphen Funktionen auf $U \subseteq \mathbb{C}$ bildet einen Körper, in dem die Nullfunktion $0(z) = 0$ für alle $z \in U$ das neutrale Element der Addition ist und die konstante Funktion $1(z) = 1$ für alle $z \in U$ das neutrale Element der Multiplikation.

Beweis. Seien $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$ meromorph. In der Nähe von a haben beide eine Darstellung $f_1(z) = (z - a)^{k_1} g_1(z)$ und $f_2(z) = (z - a)^{k_2} g_2(z)$ mit $k_i \in \mathbb{Z}$ und $g_i(z) \neq 0$ in einer Umgebung von a . Dabei liegt für $k_i > 0$ eine k_i -fache Nullstelle vor; und dieses k_i ist nach Identitätssatz endlich für alle $f_i \neq 0$. Dann sind Summen (klar) und Produkte meromorph, nämlich $(f_1 f_2)(z) = (z - a)^{k_1 + k_2} g_1(z) g_2(z)$ in einer Umgebung von a . Weiter sind alle meromorphen Funktionen $f_1 \neq 0$ invertierbar, lokal mit $(\frac{1}{f_1})(z) = (z - a)^{-k_1} \frac{1}{g_1(z)}$. Die weiteren Kompatibilitäten rechnet man leicht nach. \square

Satz 14.6 Sei $a \in U$ isolierte Singularität von $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Die Funktion f hat genau dann einen Pol in a , wenn $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$.

Beweis. (\Rightarrow) folgt aus $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$ mit $g(z) \neq 0$ und g beschränkt in einer Umgebung von a .

(\Leftarrow) hier läßt sich $\frac{1}{f}$ holomorph in eine Umgebung von a fortsetzen mit $\frac{1}{f}(a) = 0$. Somit hat $\frac{1}{f}(a)$ eine Darstellung $\frac{1}{f}(z) = (z - a)^k g(z)$ mit $k \geq 0$ endlich und $g(z) \neq 0$ in einer Umgebung von a . Dann folgt $f(z) = (z - a)^{-k} \frac{1}{g(z)}$. \square

Folglich muß eine Funktion in der Nähe einer wesentlichen Singularität wild oszillieren:

Satz 14.7 (Casorati-Weierstraß) Ein Punkt $a \in U$ ist genau dann wesentliche Singularität von $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$. Mit anderen Worten: $f(z)$ kommt in jeder Umgebung von a jedem vorgegebenem Funktionswert beliebig nahe.

Beweis. (\Leftarrow) Dann hat $|f(z)|$ keinen Grenzwert für $z \rightarrow a$, kann also weder Pol noch hebbar sein.

(\Rightarrow) Wir nehmen das Gegenteil an, d.h. es gibt ein $w \in \mathbb{C}$, eine Umgebung V von a und ein $\epsilon > 0$, so daß $|f(z) - w| > \epsilon$ für alle $z \in V \setminus \{a\}$. Dann ist $g(z) := \frac{1}{f(z) - w}$ holomorph auf $V \setminus \{a\}$ und in der Nähe von a durch $\frac{1}{\epsilon}$ beschränkt. Somit wäre g holomorph nach a fortsetzbar, und $f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$ hätte in a einen

Pol oder eine hebbare Singularität. Widerspruch. □

Mit für diese Vorlesung zu großem Aufwand läßt sich weit mehr beweisen:

Satz 14.8 (Picard) *Mit höchstens einer Ausnahme nimmt f in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität jede komplexe Zahl unendlich oft an.*

Für $e^{\frac{1}{z}}$ wird $w = 0$ nicht angenommen.

15 Laurent-Reihen und Residuum

Ist f holomorph in $U \setminus \{a\}$ und liegt in a ein Pol der Ordnung k vor, dann war $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$ mit g holomorph in einer Umgebung von a . Da g eine Potenzreihenentwicklung $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ hat, folgt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k}(z-a)^n =: \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-a)^n$.

Definition 15.1 Eine Reihe $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-a)^n$ mit $a, a_n \in \mathbb{C}$ heißt *Laurent-Reihe*. Dabei heißt $f^-(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z-a}\right)^n$ *Hauptteil der Laurent-Reihe*, und $f^+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ heißt *Nebenteil der Laurent-Reihe*. Die Laurent-Reihe heißt konvergent, wenn Haupt- und Nebenteil für sich konvergieren.

Der Hauptteil habe den Konvergenzradius r^* , d.h. er konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\frac{1}{|z-a|} < r^*$ bzw. $|z-a| > r := \frac{1}{r^*}$. Für die Laurent-Reihe einer Polstelle bricht der Hauptteil der Laurent-Reihe ab, d.h. der Konvergenzradius ist $r^* = \infty$. Der Nebenteil habe den Konvergenzradius R , d.h. er konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < R$. Somit gilt:

Satz 15.2 *Sei $f(z)$ eine Laurent-Reihe mit Konvergenzradien r^* bzw. R von Haupt- bzw. Nebenteil. Dann konvergiert die Laurent-Reihe*

- i) *absolut in einem Kreisring $K_{r,R}(a) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$ mit $r = \frac{1}{r^*}$ gegen eine in $K_{r,R}(a)$ holomorphe Funktion, falls $r^*R > 1$,*
- ii) *in keiner offenen Teilmenge von \mathbb{C} , falls $r^*R \leq 1$.*

Für die Laurent-Reihe einer Polstelle kann r beliebig gewählt werden innerhalb $0 < r < R$.

Satz 15.3 *Jede auf einem Kreisring $K_{r,R}(a)$ holomorphe Funktion f läßt sich eindeutig zerlegen in $f(z) = f^+(z) + f^-(z)$, wobei $f^+ : K_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$ und $f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{K_r(a)} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph sind mit $f^-(z) \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$.*

Beweis. Zunächst zur Eindeutigkeit. Angenommen, es gäbe zwei Darstellungen $f(z) = f_1^+(z) + f_1^-(z) = f_2^+(z) + f_2^-(z)$, dann gilt $f_1^+(z) - f_2^+(z) = f_1^-(z) - f_2^-(z)$ auf $K_{r,R}(a)$. Dabei ist $f_1^+(z) - f_2^+(z)$ definiert für $|z-a| < R$ und $f_2^-(z) - f_1^-(z)$ für $|z-a| > r$. Da beide Darstellungen auf einer Teilmenge mit Häufungspunkt

übereinstimmen, handelt es sich um Einschränkungen derselben auf ganz \mathbb{C} holomorphen Funktion g , die wegen $f_2^-(z) - f_1^-(z) \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville ist g konstant, die Bedingung bei $|z| \rightarrow \infty$ erzwingt $g = 0$.

Wir zeigen, daß die in $K_{r,R}(a)$ holomorphe Funktion folgende Darstellung hat:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{\rho_2}(a)} dw \frac{f(w)}{w-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{\rho_1}(a)} dw \frac{f(w)}{w-z} \quad (*)$$

für beliebige ρ_1, ρ_2 mit $r < \rho_1 < |z-a| < \rho_2 < R$. Dazu schneiden wir den Kreisring $\overline{K_{\rho_1, \rho_2}(a)}$ auf entlang eines Schnittes σ , der z nicht trifft. Betrachte die geschlossene Kurve $\gamma = \partial K_{\rho_2}(a) \cup \sigma \cup (-\partial K_{\rho_1}(a)) \cup (-\sigma)$ in $K_{r,R}(a)$. Unter Beachtung der Orientierungsumkehr der Abschnitte $-\sigma$ und $-\partial K_{\rho_1}(a)$ läßt sich die rechte Seite von (*) schreiben als $(*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dw \frac{f(w)}{w-z}$. Aber γ ist im Holomorphiegebiet $K_{r,R}(a) \setminus \{z\}$ von $w \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$ homotop zur Kreiskurve $\partial K_{\rho_1}(a)$. Somit folgt $(*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{\rho_1}(a)} dw \frac{f(w)}{w-z} = f(z)$ nach Cauchyscher Integralformel.

Wir setzen

$$f^+(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{\rho_2}(a)} dw \frac{f(w)}{w-z}, \quad f^-(z) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{\rho_1}(a)} dw \frac{f(w)}{w-z}. \quad (**)$$

Beide Funktionen sind in allen Punkten z holomorph, die nicht auf der Integrationskurve $\partial K_{\rho_i}(a)$ liegen, insbesondere (nach geeigneter Wahl der ρ_i) in jedem $z \in K_R(a)$ für f^+ und in jedem $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K_r(a)}$ für f^- . Aber nur im Kreisring $r < |z-a| < R$ stimmt $f^+ + f^-$ mit f überein! Schließlich gilt $f^-(z) \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$, da $f(w)$ und Umfang beschränkt sind, während $\frac{1}{w-z} \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$. \square

Folgerung 15.4 Jede auf einem Kreisring $K_{r,R}(a)$ holomorphe Funktion f läßt sich eindeutig in eine in jedem $z \in K_{r,R}(a)$ absolut konvergente Laurent-Reihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ entwickeln, mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{\rho}(a)} dw \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}$$

für einen beliebigen $r < \rho < R$. Ist $|f(w)| \leq M$ für alle $w \in \partial K_{\rho}(a)$, so folgt $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Die Darstellung $f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ mit der angegebenen Formel für $a_{n \geq 0}$ zeigt man wie in der Potenzreihenentwicklung (Satz 12.4) der Cauchyschen Integralformel. Dabei steht in den Integralen zunächst ρ_2 und nicht ρ ; wegen der Homotopieinvarianz der Integrale für a_n kann (nach der Aufspaltung in f^{\pm} !) aber

eine beliebige Kreiskurve innerhalb $K_{r,R}(a)$ gewählt werden. Für f^- beachte man $|w - a| < |z - a|$ für alle $w \in \partial K_{\rho_1}(a)$, somit

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - a) - (z - a)} = -\frac{1}{(z - a)\left(1 - \frac{(w-a)}{(z-a)}\right)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w - a)^k}{(z - a)^{k+1}}.$$

Nach Umbenennung $k + 1 = -n$ bzw. $n + 1 = -k$, mit $n = -1, -2, \dots$, entsteht $f_-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{\rho_2}(a)} dw \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \right) (z - a)^n$. Wegen Homotopieinvarianz kann ρ_2 durch ρ ersetzt werden.

Die Abschätzung der a_n ist klar. □

Beispiel 15.5 Gesucht ist die Laurent-Entwicklung von $f(z) = \frac{1}{z}$ in $K_{1,\infty}(1)$. Wir vermeiden die Berechnung der Integrale und entwickeln die geometrische Reihe um, wobei $|z - 1| > 1$, also $\frac{1}{|z-1|} < 1$, zu beachten ist:

$$f(z) = \frac{1}{z - 1 + 1} = \frac{1}{(z - 1)\left(1 + \frac{1}{z-1}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z - 1)^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1} (z - 1)^n.$$

Wir sehen, daß eine in $z = a$ holomorphe Funktion durchaus eine Laurent-Reihe mit Nebenteil haben kann, der nicht einmal abbrechenden muß! ◁

Im folgenden Beispiel brauchen wir das Cauchy-Produkt einer geometrischen Reihe und der Exponentialreihe:

Beispiel 15.6 Die Funktion $f(z) = \frac{\exp(z)}{z(z-i)}$ kann um jeden Kreisring in eine Laurent-Reihe entwickelt werden, der $\{0, i\}$ nicht enthält. Wir diskutieren nur drei der vielen möglichen Fälle (direkt durch Umentwicklung der Potenzreihen, nicht durch Berechnung der Integrale):

- i) [in $K_{0,1}(0)$] Wegen $\frac{1}{(z-i)} = \frac{i}{1+zi} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k i (-i)^k$ und Cauchy-Produkt von Reihen gilt $f(z) = \frac{i}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{i(-i)^{n+1-k}}{k!} \right) z^n$.
- ii) [in $K_{0,1}(i)$] Wegen $\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-i)+i} = \frac{-i}{1-i(z-i)} = \sum_{k=0}^{\infty} (z - i)^k (-i)^k$ und $\exp(z) = e^i \exp(z-i)$ sowie Cauchy-Produkt von Reihen gilt $f(z) = \frac{-ie^i}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-ie^i)i^{n+1-k}}{k!} \right) (z - i)^n$.
- iii) [in $K_{\sqrt{2},\infty}(1)$] Nach Partialbruchzerlegung ist $f(z) = ie \left(\frac{\exp(z-1)}{z} - \frac{\exp(z-1)}{z-i} \right)$. Wir entwickeln $\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z-1)^{k+1}}$ und $\frac{1}{z-i} = \frac{1}{1-i+(z-1)} = \frac{1}{(z-1)\left(1 + \frac{1-i}{z-1}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i-1)^k}{(z-1)^{k+1}}$. Das Cauchy-Produkt bricht nun nicht ab:

$$\begin{aligned} f(z) &= ie \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{m!} (z-1)^{m-k-1} - \frac{(i-1)^k}{m!} (z-1)^{m-k-1} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=\max(0, -n-1)}^{\infty} \frac{ie((-1)^k - (i-1)^k)}{(n+k+1)!} \right) (z-1)^n. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Die Beispiele zeigen, daß in der folgenden Klassifizierung es ganz entscheidend ist, daß Laurent-Entwicklung in einem Kreisring $K_{0,\epsilon}(a)$ (innerer Radius beliebig klein!) betrachtet wird. Ansonsten ist der Beweis klar:

Satz 15.7 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $a \in U$ isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$. Auf einem Kreisring $K_{0,\epsilon}(a)$ besitze f die Laurent-Entwicklung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Dann gilt:

- i) a ist genau dann hebbare Singularität, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$.
- ii) a_n ist Polstelle, wenn es ein $n < 0$ gibt mit $a_n \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k < n$.
- iii) a ist wesentliche Singularität, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.

Definition 15.8 Es sei f eine auf $U \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion mit Laurent-Reihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Dann heißt der Koeffizient $a_{-1} = \text{res}_a f$ das *Residuum* von f in a .

Offenbar ist $\text{res}_a f = 0$, wenn f in a holomorph ist oder (wegen der Eindeutigkeit der Laurent-Reihe) in a eine hebbare Singularität besitzt. Nach Folgerung 15.4 gilt:

Satz 15.9 Es sei f eine auf $U \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion. Dann gilt

$$\text{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\rho(a)} f(z) dz$$

für einen beliebigen Kreis $K_\rho(a)$ um a mit Radius $\rho > 0$, so daß $\overline{K_\rho(a)} \subseteq U$. \square

Wir geben Berechnungsvorschriften für das Residuum in einigen wichtigen Spezialfällen an:

- Ist $f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$, und ist g holomorph in einer Umgebung von a , so folgt aus der Cauchyschen Integralformel $\text{res}_a f = g(a)$.
- Ist allgemeiner $f = \frac{g}{h}$ Quotient von in a holomorphen Funktionen g, h mit $h(a) = 0$ und $h'(a) \neq 0$, dann ist wegen der stetigen Differenzierbarkeit $h(z) = (z-a)(h'(a) + \phi(z))$ mit $\lim_{z \rightarrow a} \phi(z) = 0$. Es gibt also ein $r > 0$, so daß $|\phi(z)| < h'(a)$, so daß $\frac{1}{h'(a) + \phi(z)}$ holomorph auf $K_r(a)$ ist. Damit gilt

$$\text{res}_a \frac{g}{h} = \frac{g(a)}{h'(a) + \phi(a)} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

- Hat f in a einen k -fachen Pol, d.h. die Laurent-Reihe ist $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-a)^n$, dann folgt

$$\text{res}_a f = a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{k-1}} ((z-a)^k f(z)) \Big|_{z=a}.$$

Beispiel 15.10 Die Funktion $f(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)}$ hat einfache Pole in jedem $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\operatorname{res}_k \frac{1}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{\sin'(\pi k)} = \frac{1}{\pi \cos(\pi k)} = \frac{(-1)^k}{\pi}.$$

Die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$ hat Pole dritter Ordnung bei $z = \pm i$, so daß

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\pm i} \frac{1}{(z^2+1)^3} &= \frac{1}{2!} \left(\frac{(z - (\pm i))^3}{(z^2+1)^3} \right)'' \Big|_{z=\pm i} = \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{(z \pm i)^3} \right)'' \Big|_{z=\pm i} \\ &= \frac{(-3)(-4)}{2} \frac{1}{(z \pm i)^5} \Big|_{z=\pm i} = \frac{6}{(\pm 2i)^5} = \mp \frac{3i}{32}. \end{aligned}$$

Die Funktion $\frac{1-\cos z}{z^2}$ läßt sich holomorph in die einzig mögliche Singularität $z = 0$ fortsetzen, d.h. $\operatorname{res}_0 \frac{1-\cos z}{z^2} = 0$. ◁

16 Residuensatz

Sei $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve und $a \in \mathbb{C}$ ein Punkt, der nicht auf der Spur von γ liegt. Dann läßt sich eine *Umlaufzahl (oder Windungszahl)* $n(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$ bestimmen, die anschaulich beschreibt, wie oft sich die Kurve γ um a herumwindet. Wegen Stetigkeit gibt es eine Unterteilung $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$ derart, daß der Spurabschnitt $\gamma([t_k, t_{k+1}])$ vollständig auf der selben Seite einer Geraden durch a liegt. Dann läßt sich in jedem Teilabschnitt der Drehwinkel $\angle(\gamma(t_k), 0, \gamma(t_{k+1})) =: \theta_k$ entweder mit $0 \leq \theta_k < \pi$ oder $-\pi < \theta_k \leq 0$ ermitteln durch $e^{i\theta_k} \frac{\gamma(t_k) - a}{|\gamma(t_k) - a|} = \frac{\gamma(t_{k+1}) - a}{|\gamma(t_{k+1}) - a|}$. Es folgt

$$e^{i(\theta_0 + \dots + \theta_{m-1})} \frac{\gamma(t_0) - a}{|\gamma(t_0) - a|} = \frac{\gamma(t_m) - a}{|\gamma(t_m) - a|}.$$

Nach Konstruktion ist der Gesamtdrehwinkel $\sum_{k=0}^{m-1} \theta_k$ unabhängig von der Wahl $\{t_k\}$ der Unterteilung. Da die Kurve geschlossen ist, $\gamma(t_0) = \gamma(t_m)$, folgt

$$n(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi} (\theta_0 + \dots + \theta_{m-1}) \in \mathbb{Z}.$$

Alternativ gilt:

Satz 16.1 Die Umlaufzahl $n(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$ einer geschlossenen Kurve γ um einen nicht auf der Spur liegenden Punkt a berechnet sich zu

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}.$$

Beweis. Die Kurve wird in die m Teilabschnitte zerlegt, die jeweils in einem Sterngebiet (Halbebene) verlaufen. Dann hat $\frac{1}{z-a}$ die Stammfunktion $\operatorname{Log}(z -$

$a) + C_k$, wobei C_k so gewählt werden kann, daß $e^{C_k}(\gamma(t) - a) \notin \mathbb{R}_-$ für alle $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Es folgt

$$\begin{aligned} n(\gamma, a) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{m-1} (\operatorname{Log}(e^{C_k} \gamma(t_{k+1})) - \operatorname{Log}(e^{C_k} \gamma(t_k))) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{m-1} (\operatorname{Arg}(e^{C_k} \gamma(t_{k+1})) - \operatorname{Arg}(e^{C_k} \gamma(t_k))) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \theta_k. \quad \square \end{aligned}$$

Nach Satz 11.13 haben zueinander homotope Wege γ_1, γ_2 in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ dieselbe Umlaufzahl, $n(\gamma_1, a) = n(\gamma_2, a)$. Die Umlaufzahl ändert das Vorzeichen bei Umkehrung der Orientierung der Kurve und verhält sich additiv bei Zusammensetzung von zwei Kurven. Weiter folgt aus Satz 16.1, daß $a \mapsto n(\gamma, a)$ stetig in a ist, und dann als \mathbb{Z} -wertige Funktion konstant, solange a die Kurve nicht überquert. Somit zerlegt eine geschlossene Kurve γ die komplexe Ebene in *wegzusammenhängende Teilgebiete gemeinsamer Umlaufzahl*. Für Punkte a mit $|a| \rightarrow \infty$ liegt die gesamte Kurve γ in einer Halbebene bezüglich a , so daß $n(\gamma, a) = 0$ für $a \rightarrow \infty$. Man kann sich dann die Umlaufzahlen der Teilgebiete schrittweise erarbeiten durch folgende Vorfahrtsregel: Hat beim Überqueren der Punkt a Vorfahrt vor der Kurve (rechts vor links), so wächst die Umlaufzahl um 1, umgekehrt (Kurve hat Vorfahrt) fällt sie um 1.

Wir können nun den für Anwendungen wichtigsten Satz der Funktionentheorie beweisen:

Theorem 16.2 (Residuensatz) *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $S \subseteq G$ eine Teilmenge ohne Häufungspunkt und $f : G \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jede stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow G$, die in G kontrahierbar ist (automatisch falls G einfach zusammenhängend) und deren Spur S nicht trifft,*

$$\int_{\gamma} dz f(z) = 2\pi i \sum_{a \in S} n(\gamma, a) \operatorname{res}_a f.$$

Die Summe besteht nur aus endlich vielen Summanden.

Bemerkung: Wegen $\operatorname{res}_z f = 0$ für alle $z \in G \setminus S$ kann man äquivalent

$$\int_{\gamma} dz f(z) = 2\pi i \sum_{z \in G} n(\gamma, z) \operatorname{res}_z f$$

schreiben, wobei ignoriert werden kann, daß $n(\gamma, z)$ für $z \in \operatorname{sp}(\gamma)$ nicht definiert ist.

Beweis. Für $a \notin G$ ist $\frac{1}{z-a}$ auf G holomorph, so daß wegen Kontrahierbarkeit der Kurve, Cauchyschem Integralsatz und Satz 16.1 die Umlaufzahl von γ um jeden

Punkt außerhalb G verschwindet. Da die Spur von γ kompakt ist, gibt es sogar eine kompakte Menge $K \subseteq G$, außerhalb der die Umlaufzahl von γ verschwindet. Da S in K keinen Häufungspunkt haben kann, besteht $S \cap K$ aus nur endlich vielen Punkten, und die Summe hat nur endlich viele Summanden.

Für jedes $a_k \in S \cap K$ sei $h_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{k,n}(z - a_k)^n$ der Hauptteil der Laurent-Entwicklung von f in a_k . Nach Konstruktion ist h_k holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{a_k\}$, und $f - h_k$ läßt sich holomorph auf eine Umgebung von $K \setminus \{S \setminus \{a_k\}\}$ in G fortsetzen. Damit folgt schrittweise, daß $f - \sum_{k=1}^N h_k$ holomorph auf einer Umgebung von K in G ist. Da γ in G kontrahierbar ist, gilt nach Cauchyschem Integralsatz

$$\int_{\gamma} dz f(z) = \sum_{k=1}^N \int_{\gamma} dz h_k(z) .$$

Beide Seiten sind Kurvenintegrale von auf $G \setminus S$ holomorphen Funktionen. Für $n \neq -1$ hat jeder Summand $a_{k,n}(z - a_k)^n$ die auf dem Gebiet $G \setminus S$ holomorphe Stammfunktion $\frac{a_{k,n}}{n+1}(z - a_k)^{n+1}$. Nach Satz 10.15 gilt deshalb $\int_{\gamma} dz a_{k,n}(z - a_k)^n = 0$ für $n \neq -1$. Es verbleibt

$$\int_{\gamma} dz f(z) = \sum_{k=1}^N a_{k,-1} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a_k} = 2\pi i \sum_{k=1}^N a_{k,-1} n(\gamma, a_k) = 2\pi i \sum_{k=1}^N n(\gamma, a_k) \operatorname{res}_{a_k} f .$$

□

Ein oft auftretender Spezialfall ist:

Satz 16.3 *Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $S \subseteq G$ eine Teilmenge ohne Häufungspunkt in G und f holomorph auf $G \setminus S$. Sei $A \subseteq G$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:*

- i) A ist einfach zusammenhängend in G ,
- ii) der Rand $\gamma := \partial A$ liegt in G und ist stückweise stetig differenzierbar,
- iii) $S \cap \gamma = \emptyset$, d.h. der Rand ∂G trifft keinen Punkt aus S .

Dann gilt

$$\int_{\gamma} dz f(z) = 2\pi i \sum_{a \in S \cap A} \operatorname{res}_a f .$$

Beweis. Der Rand ∂A kann sich nicht überschneiden, so daß im Inneren von A die Umlaufzahl konstant 1 ist. □

Der Residuensatz ist ein mächtiges Werkzeug zur Berechnung von Integralen. Dieser Technik ist der nächste Abschnitt gewidmet. Hier geben wir eine andere Anwendung: die Lokalisierung von Nullstellen und Polstellen:

Satz 16.4 (Nullstellen und Polstellen zählendes Integral) *Es sei f eine nichtkonstante meromorphe Funktion auf $U \subseteq \mathbb{C}$, ferner $S \subseteq U$ die Menge der Nullstellen und Polstellen von f und $A \subseteq U$ eine Teilmenge, deren Rand ∂A die Voraussetzungen des Residuensatzes erfüllt. Dann gilt für die Anzahl der Nullstellen N_A von f in A und die Anzahl der Polstellen P_A von f in A , jeweils mit Vielfachheit gezählt, die Formel*

$$N_A - P_A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} dz \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Beweis. Ist f meromorph, so ist $\frac{f'}{f}$ holomorph außerhalb der Null- und Polstellen von f . In der Umgebung V einer Null- oder Polstelle a gilt $f(z) = (z-a)^k g(z)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und eine auf V holomorphe nullstellenfreie Funktion g . Dabei ist $k > 0$ für eine k -fache Nullstelle und $k < 0$ für einen Pol der Ordnung $|k|$. Somit ist $\frac{f'}{f}(z) = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$ und dann $\operatorname{res}_a \frac{f'}{f} = k$. Der Residuensatz liefert die Behauptung. \square

Die wichtigste Anwendung dieses Satzes ist:

Satz 16.5 (Rouché) *Es seien f, g holomorphe Funktionen auf $U \subseteq \mathbb{C}$ und $A \subseteq U$ eine Teilmenge mit stückweise stetig differenzierbarem Rand $\partial A \subseteq U$. Es gelte $|g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in \partial A$. Dann haben f und $f + g$ die gleiche Anzahl von Nullstellen in A .*

Beweis. Es gibt eine Umgebung $V \subseteq U$ von ∂A mit $|\frac{g}{f}| < 1$. Dann ist $h := 1 + \frac{g}{f}$ auf V holomorph mit Bild $h(V) \subseteq K_1(1)$. Der komplexe Logarithmus Log ist holomorph auf $K_1(1)$, so daß nach Kettenregel gilt $(\operatorname{Log} \circ h)'(z) = \frac{h'(z)}{h(z)}$. Somit verschwindet das Kurvenintegral $\int_{\gamma} dz \frac{h'(z)}{h(z)} = 0$ für jede geschlossene Kurve γ mit $h \circ \gamma \in K_1(1)$, insbesondere für das Bild von ∂A unter $\partial A \ni z \mapsto h(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$. Es gilt $\frac{h'}{h} = \frac{(f+g)'(z)}{(f+g)(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}$, so daß nach Satz 16.4 die holomorphen Funktionen f und $f + g$ die gleiche Zahl von Nullstellen in A haben. \square

Beispiel 16.6 *Wieviele Nullstellen von $h(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2$ liegen in $K_1(0)$? Setze $f(z) = -5z^3$ und $g(z) = z^8 - z - 2$. Dann gilt für $z \in \partial K_1(0)$, d.h. $|z| = 1$ nach Dreiecksungleichung $|g(z)| \leq 4 < |f(z)| = 5$. Die Gleichung $f(z) = -5z^3 = 0$ hat eine dreifache Nullstelle in $0 \in K_1(0)$. Somit hat nach dem Satz von Rouché die Funktion h ebenfalls 3 Nullstellen in $K_1(0)$. Die weiteren 5 Nullstellen von h können wir eingrenzen durch Wahl $f(z) = z^8$ und $g(z) = -5z^3 + z - 2$. Nehmen wir $A = K_{\frac{3}{2}}(0)$, dann ist $|f(z)| = \frac{3^8}{2^8} = \frac{1}{4}(\frac{81}{8})^2 > 25$ und $|g(z)| \leq \frac{5 \cdot 27}{8} + \frac{3}{2} + 2 < \frac{5 \cdot 28}{8} + \frac{3}{2} + 2 = 21$. Somit liegen die weiteren 5 Nullstellen von h im Kreisring $K_{1, \frac{3}{2}}(0)$. \triangleleft*

Beispiel 16.7 Die *Lambertsche W-Funktion* ist definiert als eine Lösung $W(z)$ der Gleichung $W(z) \exp(W(z)) = z$. Sie hat, wie der Logarithmus, unendlich viele Zweige, d.h. es gibt zu $z \in \mathbb{C}^\times$ unendlich viele $w \in \mathbb{C}$ mit $w \exp(w) = z$. Wir schreiben die Gleichung als $\frac{w}{z} - \exp(-w) = 0$. Sei $0 < |z| < \frac{1}{e}$, $f(w) = \frac{w}{z}$ und $g(w) = -\exp(-w)$. Dann ist $|f(w)| > e$ und $|g(w)| < \exp(1) = e$, so daß nach Rouché die Gleichung $w \exp(w) = z$ in $K_1(0)$ genau eine Lösung hat. \triangleleft

17 Berechnung reeller Integrale mittels Residuensatz

Der Residuensatz ist ein mächtiges Werkzeug zur Berechnung reeller Integrale. Wir behandeln drei einfache Standardklassen und drei Klassen von Integralen, denen man die Methode nicht so leicht ansieht.

Satz 17.1 *Es sei $R(x, y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen und $R(\cos t, \sin t)$ sei für alle $t \in [0, 2\pi]$ erklärt. Dann gilt*

$$\int_0^{2\pi} dt R(\cos t, \sin t) = 2\pi \sum_{a \in K_1(0)} \operatorname{res}_a \tilde{R}, \quad \tilde{R}(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Beweis. Wir fassen das Integral als komplexes Kurvenintegral über die geschlossene Kurve $\gamma(t) = e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ auf. Dann gilt $\cos t = \frac{1}{2}(\gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)})$ und $\sin t = \frac{1}{2i}(\gamma(t) - \frac{1}{\gamma(t)})$ sowie $\gamma'(t) = i\gamma(t)$. Damit ergibt sich

$$\int_{\gamma} dz \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \int_0^{2\pi} dt R(\cos t, \sin t).$$

Der Residuensatz liefert die Behauptung. \square

Beispiel 17.2 Gesucht ist $I(p) := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{p + \cos t}$ für $p > 1$. Wir erhalten

$$I(p) = 2\pi \sum_{a \in K_1(0)} \operatorname{res}_a \left(\frac{1}{z \left(p + \frac{1}{2} \left(z(t) + \frac{1}{z(t)} \right) \right)} \right) = 4\pi \sum_{a \in K_1(0)} \operatorname{res}_a \left(\frac{1}{z^2 + 2pz + 1} \right).$$

Nur die einfache Polstelle bei $a \equiv z = -p + \sqrt{p^2 - 1}$ liegt im Inneren des Einheitskreises, und wir erhalten

$$I(p) = \frac{4\pi}{(z^2 + 2pz + 1)' \Big|_{z=-p+\sqrt{p^2-1}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - 1}}. \quad \triangleleft$$

Eine andere wichtige Klasse von reellen Integralen, die mit dem Residuensatz berechnet werden können, ist die folgende:

Satz 17.3 *Es sei R eine rationale Funktion (einer Variablen), die auf der reellen Achse keinen Pol habe und in ∞ eine mindestens zweifache Nullstelle (wenn $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ mit Polynomen P, Q , dann ist $\deg(Q) - \deg(P) \geq 2$). In diesem Fall gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx R(x) = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}} \operatorname{res}_a R,$$

wobei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene ist.

Beweis. Das uneigentliche reelle Integral wird als komplexes Kurvenintegral über die Kurve $\gamma_1(t) = t$ mit $t \in [-r, r]$ aufgefaßt. Wir schließen sie mittels $\gamma_2(t) = re^{it}$ mit $t \in [0, \pi]$. Für $r \rightarrow \infty$ trägt γ_2 nach Standardabschätzung nicht bei, und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx R(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} dz R(z)$$

Für genügend großes r liegt genau jeder Pol von R in \mathbb{H} im Inneren des Halbkreises, und der Residuensatz liefert die Behauptung. \square

Beispiel 17.4 Gesucht ist $I_n := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$ mit $n \in \mathbb{N}^\times$. Aufgefaßt als komplexe Funktion sind die (einfachen) Pole $z^{2n} = -1$ der oberen Halbebene bei $a_k = e^{\frac{i\pi(2k+1)}{2n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Also gilt mit $\operatorname{res}_a(\frac{1}{h}) = \frac{1}{h'(a)}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\pi i}{2ne^{\frac{i\pi(2k+1)(2n-1)}{2n}}} = -\frac{\pi i}{n} e^{\frac{i\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i\pi k}{n}} = \frac{\pi}{in} e^{\frac{i\pi}{2n}} \frac{1 - e^{\frac{i\pi n}{n}}}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2n}}.$$

\triangleleft

Integrale der Form $I = \int_0^\infty dx R(x)$, falls $R(x) = R(-x)$ eine gerade Funktion ist, werden über $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx R(x)$ ausgerechnet.

Satz 17.5 *Es sei R eine rationale Funktion ohne Pol auf der reellen Achse und mit mindestens einfacher Nullstelle in ∞ . Dann ist für jedes $\alpha > 0$ das folgende Integral existent und durch den Residuensatz berechenbar zu (\mathbb{H} war die obere Halbebene)*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx R(x)e^{i\alpha x} = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}} \operatorname{res}_a (R(z)e^{i\alpha z}).$$

Beweis. Das zugehörige bestimmte Integral über $\gamma_0(t) = t$ mit $t \in [-r, r]$ wird durch ein Quadrat in der oberen Halbebene geschlossen. Die zusätzlichen Kurvenstücke sind $\gamma_1(t) = r + it$ mit $t \in [0, r]$, $\gamma_2(t) = -t + ir$ mit $t \in [-r, r]$ und

$\gamma_3(t) = -r + i(r - t)$ mit $t \in [0, r]$. Der Residuensatz liefert

$$\begin{aligned} & 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}} \operatorname{res}_a \left(R(z) e^{i\alpha z} \right) \\ &= \int_{-r}^r dt R(t) e^{i\alpha t} + i \int_0^r dt R(r+it) e^{i\alpha(r+it)} \\ &\quad - \int_{-r}^r dt R(-t+ir) e^{i\alpha(-t+ir)} - i \int_0^r dt R(-r+i(r-t)) e^{i\alpha(-r+i(r-t))} . \end{aligned}$$

Da R eine mindestens einfache Nullstelle in ∞ hat, gilt $|R(z)| \leq \frac{M}{1+|z|}$ für $|z|$ groß genug und damit

$$\begin{aligned} \left| \int_0^r dt R(r+it) e^{i\alpha(\pm r+it)} \right| &\leq \frac{M}{1+r} \int_0^r dt e^{-\alpha t} \leq \frac{M}{\alpha(1+r)} , \\ \left| \int_{-r}^r dt R(-t+ir) e^{i\alpha(-t+ir)} \right| &\leq \frac{M}{1+r} e^{-\alpha r} \cdot 2r , \\ \left| \int_0^r dt R(-r+i(r-t)) e^{i\alpha(-r+i(r-t))} \right| &\leq \frac{M}{1+r} \int_0^r dt e^{-\alpha(r-t)} \leq \frac{M}{\alpha(1+r)} . \end{aligned}$$

Folglich verschwinden die Integrale über $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ im Limes $r \rightarrow \infty$. Die Existenz des Limes $r \rightarrow \infty$ für das reelle Integral über γ_0 ergibt sich nach partieller Integration und Verwendung von $|R'(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^2}$. \square

Nach Zerlegung in Real- und Imaginärteil können die reellen Integrale

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx R(x) \cos(\alpha x) &= \operatorname{Re} \left(2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}} \operatorname{res}_a \left(R(z) e^{i\alpha z} \right) \right) , \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx R(x) \sin(\alpha x) &= \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}} \operatorname{res}_a \left(R(z) e^{i\alpha z} \right) \right) \end{aligned}$$

berechnet werden (R als reelles Polynom vorausgesetzt). In Integralen $\int_{-\infty}^{\infty} dx R(x) e^{-i\alpha x}$ mit $\alpha > 0$ betrachte man zunächst das komplex-konjugierte Integral.

Beispiel 17.6 Gesucht ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} = \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{1+x^2} \right)$. Die Voraussetzungen von Satz 17.5 sind erfüllt, es gibt einen Pol bei $x = i$ in der oberen Halbebene, so daß gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{res}_i \left(\frac{z e^{iz}}{(z+i)(z-i)} \right) = 2\pi i \frac{i e^{i \cdot i}}{2i} = \frac{\pi}{e} .$$

Somit gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} = \frac{\pi}{e}$. \triangleleft

Diese Methode kann zunächst nicht auf reelle Integrale der Form $\int_0^\infty dx R(x)$ angewandt werden, wenn $R(x) \neq R(-x)$ ist. Die rationale Funktion R soll keinen Pol auf der positiven reellen Achse haben, während Pole im Negativen zugelassen sind. Weiter muß R eine mindestens zweifache Nullstelle in ∞ haben. Hier bedarf es eines Tricks: Man betrachtet $R(z)\text{Log}(e^{-i\pi}z)$. Diese Funktion ist meromorph auf der im Positiven geschlitzten Ebene $\mathbb{C}_+ := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Deren Punkte haben eine Darstellung $z = |z|e^{i\phi}$ mit $0 < \phi < 2\pi$. Der Integrationsweg wird für $\epsilon > 0$ (aber klein) und $0 < \rho < r$ zusammengesetzt aus:

- $\gamma_1(t) = t e^{i\epsilon}$, $t \in [\rho, r]$,
- $\gamma_2(t) = r e^{it}$, $t \in [\epsilon, 2\pi - \epsilon]$,
- $\gamma_3(t) = (r + \rho - t) e^{i(2\pi - \epsilon)}$, $t \in [\rho, r]$,
- $\gamma_4(t) = \rho e^{i(2\pi - t)}$, $t \in [\epsilon, 2\pi - \epsilon]$.

Hier darf $e^{i2\pi}$ noch nicht zu 1 vereinfacht werden, damit im komplexen Logarithmus die richtige Argumentfunktion entsteht. Nach Substitution $t \mapsto (r + \rho - t)$ in γ_3 und jetzt möglicher Reduktion $e^{i2\pi} = 1$ entsteht:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} dz R(z)\text{Log}(e^{-i\pi}z) &= e^{i\epsilon} \int_{\rho}^r dt R(t e^{i\epsilon})(\ln t + i(\epsilon - \pi)) \\ \int_{\gamma_2} dz R(z)\text{Log}(e^{-i\pi}z) &= ir \int_{\epsilon}^{2\pi - \epsilon} dt e^{it} R(r e^{it})(\ln r + i(t - \pi)) \\ \int_{\gamma_3} dz R(z)\text{Log}(e^{-i\pi}z) &= -e^{-i\epsilon} \int_{\rho}^r dt R(t e^{-i\epsilon})(\ln t + i(\pi - \epsilon)) \\ \int_{\gamma_4} dz R(z)\text{Log}(e^{-i\pi}z) &= -i\rho \int_{\epsilon}^{2\pi - \epsilon} dt e^{-it} R(\rho e^{-it})(\ln \rho + i(\pi - t)) . \end{aligned}$$

Für $r \rightarrow \infty$ geht $r \ln r |R(r)| \rightarrow 0$, da R eine mindestens zweifache Nullstelle in ∞ hat. Analog ist $\rho(\ln \rho + C)|R(\rho)| \rightarrow 0$ für $\rho \rightarrow 0$. Schließlich heben sich in $\gamma_1 \cup \gamma_3$ für $\epsilon \rightarrow 0$ die Beiträge mit $\ln t$ gegeneinander weg, während sich die Beiträge mit $-i\pi$ verdoppeln. Insgesamt ist bewiesen:

Satz 17.7 *Es sei R eine rationale Funktion ohne Pol auf \mathbb{R}_+ und mit mindestens zweifacher Nullstelle in ∞ . Dann gilt*

$$\int_0^\infty dx R(x) = - \sum_{a \in \mathbb{C}_+} \text{res}_a \left(R(z) \text{Log}(e^{-i\pi}z) \right) .$$

Beispiel 17.8 Sei $I := \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$. Es liegen Pole an den ungeraden 6. Einheitswurzeln $\zeta = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\zeta^3 = -1$ und $\zeta^5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ vor. Mit $e^{-i\pi} = \zeta^{-3}$ gilt

$$I = - \left(\frac{\text{Log}(\zeta^{-2})}{3\zeta^2} + \frac{\text{Log}(\zeta^0)}{3\zeta^6} + \frac{\text{Log}(\zeta^2)}{3\zeta^{10}} \right) = -\frac{1}{3} \left(-\frac{i2\pi}{3}\zeta^4 + 0 + \frac{i2\pi}{3}\zeta^2 \right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} .$$

Analog findet man

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x dx}{1+x^3} &= -\left(\frac{\zeta \operatorname{Log}(\zeta^{-2})}{3\zeta^2} + \frac{\zeta^3 \operatorname{Log}(\zeta^0)}{3\zeta^5} + \frac{\zeta^5 \operatorname{Log}(\zeta^2)}{3\zeta^{10}}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{i2\pi}{3}\zeta^5 + 0 + \frac{i2\pi}{3}\zeta\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Mit gleichem Integrationsweg berechnet man:

Satz 17.9 *Es sei R eine rationale Funktion ohne Pol auf \mathbb{R}_+^\times , höchstens einfachen Pol in 0 und mit mindestens zweifacher Nullstelle in ∞ . Dann gilt für $0 < \alpha < 1$*

$$\int_0^\infty dx x^\alpha R(x) = -\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{a \in \mathbb{C}_+} \operatorname{res}_a \left(R(z) \exp(\alpha \operatorname{Log}(e^{-i\pi} z)) \right).$$

Beweis. Wieder tragen γ_2, γ_4 zum Wegintegral nichts bei wegen $r \cdot r^\alpha \ln r |R(r)| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und $\rho \cdot \rho^\alpha \ln \rho |R(\rho)| \rightarrow 0$ für $\rho \rightarrow 0$, selbst im Fall $R(\rho) \sim \frac{C}{\rho}$. Die Logarithmen sind $\exp(\alpha \operatorname{Log}(e^{-i\pi} z)) = \exp(\alpha(\ln t - i\pi))$ auf γ_1 und $\exp(\alpha \operatorname{Log}(e^{-i\pi} z)) = \exp(\alpha(\ln t + i\pi))$ auf γ_3 , mit $\exp(\alpha(\ln t - i\pi)) - \exp(\alpha(\ln t + i\pi)) = -2t^\alpha i \sin(\pi\alpha)$. Einsetzen in den Residuensatz liefert die Behauptung. \square

Beispiel 17.10 Es sei $I = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}} dx}{x^2+16}$. Es gibt Pole bei Vierfachen ungeraden 4. Einheitswurzeln, also $4e^{\frac{i\pi}{2}} = 4i$ und $4e^{\frac{3i\pi}{2}} = -4i$. Somit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}} dx}{x^2+16} &= -\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\exp(\frac{1}{3} \operatorname{Log}(4e^{-\frac{i\pi}{2}}))}{2 \cdot (4i)} + \frac{\exp(\frac{1}{3} \operatorname{Log}(4e^{\frac{i\pi}{2}}))}{2 \cdot (-4i)} \right) \\ &= -\frac{\pi \sqrt[3]{4}}{4\sqrt{3}i} (e^{-\frac{i\pi}{6}} - e^{\frac{i\pi}{6}}) = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}}. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Als letzte Klasse von Integralen betrachten wir:

Satz 17.11 *Es sei R eine rationale Funktion ohne Pol auf \mathbb{R}_+ und mit mindestens zweifacher Nullstelle in ∞ . Dann gilt*

$$\int_0^\infty dx R(x) \ln x = -\frac{1}{2} \sum_{a \in \mathbb{C}_+} \operatorname{res}_a \left(R(z) (\operatorname{Log}(e^{-i\pi} z))^2 \right).$$

Beweis. Wir verwenden die Integrationswege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ wie zuvor. Dabei tragen γ_2 für $r \rightarrow \infty$ und γ_4 für $\rho \rightarrow 0$ nichts bei. Die Logarithmen sind $(\operatorname{Log}(e^{-i\pi} z))^2 = (\ln t - i\pi)^2$ auf γ_1 und $(\alpha \operatorname{Log}(e^{-i\pi} z))^2 = (\ln t + i\pi)^2$ auf γ_3 . In der Differenz überlebt $-4\pi i \ln t$, was eingesetzt in den Residuensatz die Behauptung ergibt. \square

Rekursiv lassen sich mit dieser Methode auch Integrale der Form $\int_0^\infty dx R(x)(\ln x)^k$ berechnen.

Beispiel 17.12 Es sei $I = \int_0^\infty \frac{\ln x dx}{x^2+16}$. In offensichtlicher Abwandlung des letzten Beispiels ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\ln x dx}{x^2+16} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{(\operatorname{Log}(4e^{-\frac{i\pi}{2}}))^2}{2 \cdot (4i)} + \frac{(\operatorname{Log}(4e^{\frac{i\pi}{2}}))^2}{2 \cdot (-4)i} \right) \\ &= -\frac{1}{16i} \left((\ln 4 - \frac{i\pi}{2})^2 - (\ln 4 + \frac{i\pi}{2})^2 \right) = \frac{\pi \ln 2}{4}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Teil V

Ausgewählte Anwendungen

Zunächst einige Vorbemerkungen. Wir werden im folgenden auf unendliche Reihen und Produkte holomorpher Funktionen stoßen, von denen wir wünschen, daß sie wieder holomorphe Funktionen definieren. Das erfordert ein Vertauschen von Grenzprozessen. Auch hier ist die Situation sehr viel günstiger als im Reellen. Da die Ableitung über ein Integral definierbar ist, und das Riemann-Integral mit *gleichmäßiger Konvergenz* vertauscht, gilt:

Satz 17.13 *Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ für alle $z \in G$ und alle $n \geq N$. Dann ist f holomorph, und die Folge (f'_n) der Ableitungen konvergiert gleichmäßig gegen f' .*

Tatsächlich genügt *lokal gleichmäßige Konvergenz*, d.h. es gibt zu jedem $z \in G$ eine Umgebung, in der (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert (entsprechend konvergiert f'_n nur lokal gleichmäßig gegen f'). Schon der obige Satz ist grundlegend falsch in Reellen, selbst bei nur einmaliger Differenzierbarkeit: Nach dem Satz von Weierstraß gibt es zu jeder (nur!) stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von Polynomen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Für die meisten Anwendungen ist der folgende Konvergenzbegriff der sinnvollste:

Definition 17.14 Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ holomorpher Funktionen $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *normal konvergent*, falls es zu jedem $z \in G$ eine Umgebung $U_z \subseteq G$ gibt, so daß $\sum_{n=0}^{\infty} (\sup_{w \in U_z} |f(w)|)$ konvergiert.

Jede Potenzreihe ist normal konvergent im Inneren ihres Konvergenzkreises. Die Unterscheidung wird notwendig bei Funktionen wie $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$, die keine Potenzreihen sind.

Der folgende Satz, den wir nicht beweisen, sichert die gewünschten Eigenschaften:

Satz 17.15 *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine gegen $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ normal konvergente Reihe holomorpher Funktionen $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$. Dann gilt:*

- i) *Die Reihe konvergiert absolut und lokal gleichmäßig. Sie kann beliebig umgeordnet werden.*
- ii) *Die Reihe F ist holomorph, und die Reihe der Ableitungen $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ konvergiert normal gegen F' .*

18 Partialbruchzerlegungen

Exemplarisch beweisen wir:

Satz 18.1 Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}.$$

In dieser Darstellung konvergieren alle Reihen absolut (sogar normal) auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Beweis. Für festes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ betrachten wir die bezüglich w meromorphe Funktion $f(w) = \frac{\pi z \cos(\pi w)}{w(w-z) \sin(\pi w)}$. Sie hat einfache Pole bei $w = z$ mit Residuum $\operatorname{res}_z f = \pi \cot(\pi z)$ sowie bei $w = k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit Residuum $\operatorname{res}_k f = \frac{\pi z \cos(\pi w)}{w(w-z) \sin'(\pi w)} \Big|_{w=k} = \frac{z}{k(k-z)}$. In 0 liegt ein Pol 2. Ordnung vor. Reihenentwicklung zeigt für $w \rightarrow 0$

$$f(w) = \frac{\pi z(1 - \frac{1}{2}\pi^2 w^2 + \mathcal{O}(w^4))}{w(-z)(1 - \frac{w}{z})(\pi w + \mathcal{O}(w^3))} = -\frac{(1 - \frac{1}{2}\pi^2 w^2)(1 + \frac{w}{z}) + \mathcal{O}(w^2)}{w^2}$$

und deshalb $\operatorname{res}_0 f = -\frac{1}{z}$.

Für $N \in \mathbb{N}$ sei $A_N \subseteq \mathbb{C}$ das Quadrat mit Mittelpunkt 0 und Kantenlänge $(2N+1)$. Für $N > |z|$ liegen genau die isolierten Singularitäten bei $z, -N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$ im Inneren von A_N . Somit gilt nach Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A_N} dw f(w) = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^N \frac{z}{k(k-z)} + \sum_{k=-N}^{-1} \frac{z}{k(k-z)}.$$

Wir zeigen, daß für $N \rightarrow \infty$ das Kurvenintegral auf der linken Seite verschwindet. Einfache Umstellung liefert dann die Partialbruchzerlegung für $\pi \cot(\pi z)$. Wegen $|\frac{1}{w(w-z)}| \leq \frac{1}{N(N-|z|)}$ für $|w| > N > |z|$ und der Länge $4(2N+1)$ des Randes genügt es zu zeigen, daß $\cot(\pi w)$ auf ∂A_N beschränkt ist. Auf den horizontalen Wegen $t \pm \frac{2N+1}{2}i$ (Orientierung ignoriert) gilt

$$\left| \cot(\pi(t \pm \frac{2N+1}{2}i)) \right| = \left| \pm i \frac{e^{2\pi(\pm it - \frac{2N+1}{2})} + 1}{e^{2\pi(\pm it - \frac{2N+1}{2})} - 1} \right| \leq \frac{1 + e^{-(2N+1)\pi}}{1 - e^{-(2N+1)\pi}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1.$$

Auf den vertikalen Wegen $it \pm \frac{2N+1}{2}$ gilt

$$\left| \cot(\pi(it \pm \frac{2N+1}{2})) \right| = \left| i \frac{e^{2\pi(-t \pm \frac{2N+1}{2}i)} + 1}{e^{2\pi(-t \pm \frac{2N+1}{2}i)} - 1} \right| = \frac{|1 - e^{-2\pi t}|}{e^{-2\pi t} + 1} \leq 1.$$

Insgesamt ist $\cot(\pi w)$ auf ∂A_N beschränkt und die Partialbruchzerlegung bewiesen. \square

Der Satz ist Spezialfall eines tiefen Theorems von Mittag-Leffler über meromorphe Funktionen mit vorgegebenen Polstellen (das wir nicht beweisen):

Satz 18.2 (Mittag-Leffler) Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ eine Menge ohne Häufungspunkt in \mathbb{C} . Zu jedem $s \in S$ sei eine ganze Funktion $h_s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vorgegeben mit $h_s(0) = 0$. Dann existiert eine (nur bis auf Addition von ganzen Funktionen eindeutige) holomorphe Funktion $f : (\mathbb{C} \setminus S) \rightarrow \mathbb{C}$ derart, daß zu jedem $s \in S$ die Funktion $f(z) - h_s(\frac{1}{z-s})$ holomorph nach s fortsetzbar ist.

Bemerkungen. Ist $S = \{s_1, \dots, s_N\}$ eine endliche Menge, so ist eine Lösung des Problems einfach $f(z) = \sum_{k=1}^N h_{s_k}(\frac{1}{z-s_k})$. Ist S unendlich, so wird man normale Konvergenz der Reihe fordern, was aber nicht automatisch ist. Die Idee besteht darin, in einem möglichen Punkt $0 \in S$ alles so zu lassen, in $0 \neq s \in S$ aber ein Taylorpolynom geeigneter Ordnung abzuziehen, also $\sum_{0 \neq s \in S} (h_s(\frac{1}{z-s}) - h_s(-\sum_{j_s=0}^{n_s} \frac{z^{j_s}}{s^{j_s+1}}))$ zu betrachten. Genau das passiert in der Partialbruchentwicklung von $\pi \cot(\pi z)$, wo wir nicht einfach $\sum_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-k}$ nehmen können (weil divergent), sondern $\sum_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} (\frac{1}{z-k} - (-\frac{1}{k}))$ (d.h. $n_s = 0$ für alle s).

Durch Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$, Differenzieren sowie Ausnutzen von Identitäten wie $\frac{1}{\sin(\pi z)} = \cot \frac{\pi z}{2} - \cot(\pi z)$ gewinnt man weitere Partialbruchzerlegungen:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} &= \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{(-1)^k}{z-k} + \frac{(-1)^k}{k} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2z}{z^2 - k^2}, \\ \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-k)^2} = \frac{1}{z^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2 + k^2}{(z^2 - k^2)^2}, \\ \pi \tan(\pi z) &= - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-k + \frac{1}{2}} + \frac{1}{k - \frac{1}{2}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8z}{(2k+1)^2 - 4z^2}, \\ \frac{\pi^2}{\cos^2(\pi z)} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - k + \frac{1}{2})^2}, \\ \frac{\pi}{\cos(\pi z)} &= \pi + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{(-1)^k}{z + \frac{2k+1}{2}} - \frac{(-1)^k}{\frac{2k+1}{2}} \right) = \pi + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4z^2(-1)^k}{(2k+1)((\frac{2k+1}{2})^2 - z^2)}. \end{aligned}$$

Für $z = \frac{1}{2}$ in den ersten beiden Identitäten, $z = \frac{1}{4}$ in der dritten Identität und $z = 1$ in der letzten Identität folgen die Reihendarstellungen

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}, & \frac{\pi^2}{8} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \\ \frac{\pi}{8} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}, & -\frac{\pi}{8} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung, die nur nach Leibniz-Kriterium (nicht absolut) konvergiert, wird für die absolut konvergente Reihendarstellung für $\frac{\pi}{\cos(\pi z)}$ benötigt. Weitere

Identitäten entstehen nach Substitution $z \mapsto iz$, wie z.B. aus den Zerlegungen von \tanh und \coth (jeweils für $a > 0$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} \cdot \frac{e^{\pi a} - 1}{e^{\pi a} + 1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{e^{2\pi a} + 1}{e^{2\pi a} - 1} - \frac{1}{2a^2}.$$

Die Partialbruchzerlegungen gelten für alle $z \in \mathbb{C} \setminus S$. In der Nähe eines Punktes $s \in S$ kann man sie mit Potenzreihenentwicklungen vergleichen. Von besonderem Interesse ist hier die Funktion $f(z) = \frac{z}{\exp(z)-1}$, die wir in einer Umgebung von 0 betrachten. Die betragsmäßig kleinste Polstelle ist $z = 2\pi i$, so daß $f(z)$ in $K_{2\pi}(0)$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist,

$$\frac{z}{\exp(z) - 1} =: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!}, \quad B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \dots$$

Die Entwicklungskoeffizienten B_n heißen *Bernoulli-Zahlen*. Sie spielen eine wichtige Rolle in Zahlentheorie und Kombinatorik. Es gilt

$$\frac{z}{\exp(z) - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \left(\frac{\exp(z) + 1}{\exp(z) - 1} \right) = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2}.$$

Da die rechte Seite eine gerade Funktion ist, verschwinden bis auf $B_1 = -\frac{1}{2}$ sämtliche ungeraden Bernoulli-Zahlen. Nach Substitution $z \mapsto 2\pi iz$ und $n \mapsto \frac{n}{2}$ erhalten wir eine Reihendarstellung

$$\pi z \cot(\pi z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{2n} (2\pi)^{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

Mittels $\tan z = \cot z - 2 \cot(2z)$ beweist man daraus die Tangens-Reihe

$$\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4^n (4^n - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} \quad (\text{mit Konvergenzradius } \frac{\pi}{2}).$$

Andererseits ergibt Reihenentwicklung der Partialbruchzerlegung in $z = 0$

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 - k^2} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^2}{k^2} \right)^n = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \right) z^{2n}.$$

Hierbei konnten wegen der absoluten Konvergenz der Doppelreihe die Reihenfolge der Summationen getauscht werden. Koeffizientenvergleich liefert:

Satz 18.3 (Euler) Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gilt

$$\zeta(2n) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}.$$

Die ersten Werte sind $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

Einige Folgerungen und Bemerkungen:

- $\zeta(2n)$ ist ein rationales Vielfaches von π^{2n} , also immer irrational.
- Die B_{2n} haben alternierende Vorzeichen $(-1)^{n-1}$.
- In Gegensatz zur Erwartung aus den niedrigsten B_{2n} werden die Bernoulli-Zahlen betragsmäßig sehr groß, nämlich $|B_{2n}| \propto \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$ für $n \rightarrow \infty$. Daraus folgt auch der Konvergenzradius der Tangens-Reihe.
- Über die ungeraden $\zeta(2n + 1)$ mit $n = 1, 2, \dots$ weiß man erst seit kurzem etwas: $\zeta(3)$ ist irrational [Apéry, 1979], es gibt unendlich viele irrationale $\zeta(2n + 1)$ [Rivoal, 2000], und zumindest eine der Zahlen $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ ist irrational [Zudilin, 2001].

19 Unendliche Produkte

Wir möchten einem Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ einen Sinn geben. Konvergenz kann nur erwartet werden für $f_n(z) \rightarrow 0$. Wir fordern, daß es in einer Umgebung U_z von z ein uniformes $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\sup_{w \in U_z} |f_n(w)| < 1$ für alle $n \geq N$ und alle $z \in U_z$. Dann ist folgende Definition sinnvoll auf U_z :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z)) := \left(\prod_{n=1}^N (1 + f_n(z)) \right) \exp \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + f_n(z)) \right).$$

Wir nennen das unendliche Produkt normal (bzw. absolut) konvergent, falls die Reihe unter der Exponentialfunktion normal (bzw. absolut) konvergiert. Ein einfaches Kriterium ist:

Lemma 19.1 *Das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ konvergiert genau dann normal, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ normal konvergiert.*

Beweis. Die Funktion $|\frac{\log(1+w)}{w}|$ ist stetig auf $\overline{K_r(0)}$ für jedes $0 < r < 1$ und nimmt deshalb Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $c_1, c_2 > 0$ mit $c_1|w| \leq |\log(1+w)| \leq c_2|w|$ für alle $|w| \leq r$. Deshalb konvergiert $\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + f_n(z))$ genau dann normal, wenn $\sum_{n=N+1}^{\infty} \sup_{w \in U_z} |f_n(w)|$ konvergiert. \square

Aus Satz 17.15 folgt:

Satz 19.2 *Die Grenzfunktion $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ eines normal konvergentes unendliches Produkts holomorpher Funktionen $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist wieder holomorph, und außerhalb der Nullstellen von $(1 + f_n)$ gilt*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{1 + f_n(z)}.$$

Offenbar ist $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z)) = 0$ in einem $z \in G$ genau dann, wenn $1 + f_n(z) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Deshalb treten unendliche Produkte in folgender Problemstellung auf:

19.3 Nullstellenverteilung. Gegeben eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ ohne Häufungspunkt und zu jedem $s \in S$ natürliche Zahlen $\nu_s \geq 1$. Gibt es eine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die genau in den Punkten $s \in S$ Nullstellen der Vielfachheit ν_s hat?

Ist $S = \{s_1, \dots, s_N\}$ eine endliche Menge, eventuell mit $s_0 = 0$, sonst $s_{>0} \neq 0$, so ist eine Lösung offenbar das Polynom $f(z) = z^{\nu_0} \prod_{k=1}^N (1 - \frac{z}{s_k})^{\nu_k}$. Für unendliche Mengen S ist zunächst unklar, ob man normale Konvergenz des unendlichen Produkts erreichen kann. Daß das möglich ist, ist Gegenstand eines tiefen Theorems von Weierstraß:

Satz 19.4 (Weierstraß) Das Problem der Nullstellenverteilung ist lösbar in \mathbb{C} , und zwar mit dem Ansatz

$$f(z) = z^{\nu_0} \prod_{0 \neq s \in S} \left(\left(1 - \frac{z}{s} \right) \exp \left(\frac{z}{s} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{s} \right)^2 + \dots + \frac{1}{k_s} \left(\frac{z}{s} \right)^{k_s} \right) \right)^{\nu_s}$$

für geeignete $k_s \in \mathbb{N}$.

Eine solche Lösung kann nur eindeutig sein bis auf Multiplikation mit einer ganzen Funktion g ohne Nullstellen. Nach einer Übungsaufgabe (Blatt6, Aufgabe 1) läßt sich eine solche Funktion immer schreiben als $g(z) = \exp(h(z))$ für eine ganze Funktion h .

Beispiel 19.5 Gesucht sei eine ganze Funktion, die Nullstellen genau in allen Punkten aus \mathbb{Z} hat. Eine Lösung nach Weierstraß ist

$$f(z) = z \left(\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k} \right) e^{\frac{z}{k}} \right) \left(\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k} \right) e^{-\frac{z}{k}} \right).$$

Wegen $(1 - \frac{z}{k})e^{\frac{z}{k}} = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} (\frac{z}{k})^n$ und $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{2}$ (Teleskopsumme!) gilt $\left| 1 - (1 - \frac{z}{k})e^{\frac{z}{k}} \right| \leq \frac{3|z|^2}{2k^2}$ für alle $k > |z|$. Damit ist das obige unendliche Produkt normal konvergent. Durch Zusammenfassen von k und $(-k)$ entsteht das bereits normal konvergente Produkt $f(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{k^2})$. Eine weitere ganze Funktion mit denselben einfachen Nullstellen ist $g(z) = \sin(\pi z)$, so daß $\frac{f}{g}$ eine noch unbekannte ganze Funktion ohne Nullstellen ist. Um sie zu finden, betrachten wir $\frac{g'(z)}{g(z)} = \pi \cot(\pi z)$ und $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2 - z^2}$. Nach Vergleich mit der Partialbruchzerlegung des Cotangens sehen wir $\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Daraus folgt $(\frac{f}{g})'(z) = 0$ und dann $\frac{f}{g}$ konstant auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Da $\frac{f}{g}$ sogar ganz ist, ist

$\frac{f}{g}$ sogar konstant auf ganz \mathbb{C} . Wegen $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = 1$ und $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z)}{z} = \pi$ ist diese Konstante gleich π . Es folgt das *Sinusprodukt*

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

Analog durch Vergleich von $\frac{g'(z)}{g(z)} = -\pi \tan(\pi z)$ mit der Partialbruchzerlegung des Tangens folgt das *Cosinusprodukt*

$$\cos(\pi z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2k+1)^2}\right).$$

Die relative Konstante ergibt sich aus dem Wert bei $z = 0$. Nach Substitution $z \mapsto iz$ folgen

$$\sinh(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2}\right), \quad \cosh(\pi z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{4z^2}{(2k+1)^2}\right). \quad \triangleleft$$

Für $z = \frac{1}{2}$ wird das Sinusprodukt zum *Wallisschen Produkt*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k+1)^2}.$$

Aus $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi z)}{1-z} = \pi$ folgt

$$\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

20 Die Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion $\Gamma(z)$ hat viele Darstellungen. Man startet mit einer und beweist mittels Identitätssätzen die anderen. Wir entscheiden uns für das Gamma-Integral als Ausgangspunkt, dessen Holomorphiebeweis wir aber nur skizzieren.

Satz 20.1 *Das folgende uneigentliche Riemann-Integral konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$:*

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}.$$

Die so definierte Funktion Γ ist holomorph auf der rechten Halbebene mit

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} (\ln t)^k e^{-t}.$$

Weiter ist $\Gamma(z)$ auf dem Streifen $1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2$ beschränkt und erfüllt

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{für alle } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Beweis. Sei $z = x + iy$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Wegen $|t^{z-1}| = |e^{(x-1)\ln t + iy \ln t}| = t^{x-1}$ genügt es, die Konvergenz der Majorante $\int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-t}$ für $x > 0$ zu untersuchen. Man teilt das Integral in 1, wobei die Konvergenz von $\int_1^R dt t^{x-1} e^{-t}$ bei $R \rightarrow \infty$ wegen der Majorante $t^{x-1} e^{-t} \leq C e^{-\frac{t}{2}}$ unkritisch ist. Im unteren Intervall gilt $|\int_\epsilon^1 dt t^{x-1} e^{-t}| \leq \int_\epsilon^1 dt t^{x-1} = \frac{t^x}{x} \Big|_\epsilon^1 \leq \frac{1}{x}$. Somit konvergiert das Gamma-Integral für alle $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Den Beweis der Holomorphie skizzieren wir nur. Zum einen betrachtet man die Folge $\Gamma_n(z) := \int_{\frac{1}{n}}^n dt t^{z-1} e^{-t}$, $n \geq 1$, die lokal gleichmäßig gegen $\Gamma(z)$ konvergiert. Nach Satz 17.15 (auch nicht bewiesen) genügt es dann, daß $\Gamma_n(z)$ holomorph ist. Hier zeigt man reelle Differenzierbarkeit und Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Beides ergibt sich aus der Konvergenz der Integrale $\int_0^\infty dt t^{z-1} (\ln t)^k e^{-t}$ (beachte $\frac{dt^z}{dz} = \frac{de^{z \ln t}}{dz} = t^z \ln t$) sowie Vertauschungssätzen der Integration im Mehrdimensionalen, vor allem dem Satz von Lebesgue. Wir möchten das nicht im Detail diskutieren.

Für $1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2$ ist $|t^{z-1}| \leq 1$ für $0 \leq t \leq 1$ und $|t^{z-1}| \leq t$ für $t \geq 1$. Mit $\int_0^1 dt e^{-t} = 1 - \frac{1}{e}$ und $\int_1^\infty dt t e^{-t} = \frac{2}{e}$ folgt $|\Gamma(z)| \leq 1 + \frac{1}{e}$ für alle $1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2$.

Schließlich ist $\Gamma(1) = \int_0^\infty dt e^{-t} = 1$, und die Rekursionsformel folgt nach partieller Integration:

$$\int_\epsilon^R dt t^z e^{-t} = - \int_\epsilon^R dt t^z (e^{-t})' = -t^z e^{-t} \Big|_\epsilon^R + z \int_\epsilon^R dt t^{z-1} e^{-t}.$$

Die Behauptung folgt aus $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^z e^{-\epsilon} = 0$ für $\operatorname{Re}(z) > 0$ und $\lim_{R \rightarrow \infty} R^z e^{-R} = 0$. \square

Aus $\Gamma(1) = 1$ und Rekursion folgt $\Gamma(n) = (n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}^\times$. Indem wir die Rekursionsgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ als für $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ (bis auf diskrete Ausnahmen) gültig erklären, können wir mittels

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)\cdots(z+k-1)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

die Gamma-Funktion *definieren* auch in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0, -z \notin \mathbb{N}\}$. Denn sei $\operatorname{Re}(z) \leq 0$, aber $-z \notin \mathbb{N}$, dann finden wir ein $k > -\operatorname{Re}(z)$ derart, daß $\Gamma(z)$ durch obige Gleichung definiert ist. Aus der in der rechten Halbebene gültigen Rekursionsgleichung folgt, daß die Definition unabhängig von $-\operatorname{Re}(z) < k \in \mathbb{N}$ ist. Auf diese Weise wird eine auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ meromorphe Funktion $\Gamma(z)$ erklärt, mit einfachen Polen in $(-\mathbb{N})$ und Residuen (setze oben $k \mapsto n+1$)

$$\operatorname{res}_{-n} \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} (z - (-n)) \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Unser Ziel sind weitere Charakterisierungen der Gamma-Funktion, die wir als solche aus einem einfachen Kriterium erkennen:

Satz 20.2 (Wieland) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, das den Streifen $V := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2\}$ enthält. Eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sei auf V beschränkt und erfülle $f(z+1) = zf(z)$ für alle Paare $z, z+1 \in G$. Dann gilt $f(z) = f(1)\Gamma(z)$ für alle $z \in G$.

Beweis. Mittels Rekursionsformel setzt man f meromorph fort auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$, mit einfachen Polen in $(-\mathbb{N})$ und Residuen $\operatorname{res}_{-n} f(z) = \frac{f(1)(-1)^n}{n!}$. Somit ist $g(z) := f(z) - f(1)\Gamma(z)$ eine ganze Funktion und als solche auf dem kompakten Rechteck $R := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1, -1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$ beschränkt.

Aus der Rekursionsformel $g(z) = \frac{g(z+1)}{z}$ und der Beschränktheit von g im Punkt $z+1 \in V$ folgt dann, daß g auf den Streifen $V_{\pm} := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) < 1, 1 < \pm \operatorname{Im}(z)\}$ oberhalb und unterhalb R beschränkt ist. Weiter ist g beschränkt auf der gesamten zu V gehörenden Geraden $\operatorname{Re}(z) = 1$. Insgesamt ist gezeigt: Die ganzen Funktionen g und dann h , definiert durch $h(z) = g(z)g(1-z)$ sind auf $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ beschränkt.

Die Funktion h ist bis auf Vorzeichen periodisch wegen

$$h(z+1) = g(z+1)g(1-(z+1)) = zg(z)g(-z) = -g(z)g(1-z) = -h(z)$$

und dann $h(z+k) = (-1)^k h(z)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Damit ist h auf ganz \mathbb{C} beschränkt und nach dem Satz von Liouville konstant gleich $h(1) = g(1)g(0) = 0$ (denn $g(1) = 0$ und $g(0)$ beschränkt). Nach Identitätssatz ist dann eine der Funktionen $g(z)$ oder $g(1-z)$, und dann beide, identisch Null auf ganz \mathbb{C} (nicht beide Funktionen $g(z), g(1-z)$ können in einer beliebigen offenen Teilmenge von \mathbb{C} nur endlich viele Nullstellen haben). \square

Wir konstruieren eine weitere Funktion mit diesen Eigenschaften, ausgehend von der Tatsache, daß $\frac{1}{\Gamma(z)}$ einfache Nullstellen genau in $(-\mathbb{N})$ hat. Nach dem Weierstraßschen Produktsatz ist

$$f(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right)$$

eine ganze Funktion mit denselben Nullstellen. Diese muß nichts mit $\frac{1}{\Gamma}$ zu tun haben, denn $\Gamma(z)$ könnte Nullstellen, und dann $\frac{1}{\Gamma(z)}$ Polstellen haben. Wie schon im Sinusprodukt bemerkt, konvergiert das unendliche Produkt normal, und es gilt $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ mit

$$f_n(z) = z \prod_{k=1}^n \left(\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right) = \frac{z(z+1) \cdots (z+n)}{n!} \exp \left(-z \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$$

Für $z = 1$ sind alle Faktoren reell und positiv, also kann der Logarithmus genommen werden: $\ln(f_n(1)) = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Wegen der normalen Konvergenz der Reihe [und $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n+1) - \ln(n)) = 0$] existiert der Grenzwert

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.5772 \dots,$$

die Euler-Mascheroni-Konstante (von der man nicht einmal weiß, ob sie irrational ist). Nun sind die folgenden Eigenschaften schon gezeigt oder offensichtlich:

Satz 20.3 *Seien*

$$G(z) := ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{k} \right) e^{-\frac{z}{k}} \right), \quad G_n(z) := \frac{z(z+1) \cdots (z+n)}{n^z n!}.$$

Dann gilt:

- i) Die Funktionen G, G_n sind ganz, und $G_n(z)$ konvergiert normal gegen $G(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- ii) $G(1) = 1$ und $G_n(1) = 1 + \frac{1}{n}$.
- iii) $\frac{z+n+1}{n} G_n(z) = z G_n(z+1)$ und somit $G(z) = z G(z+1)$. □

Nun der entscheidende Satz:

Satz 20.4 *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ gilt*

$$\Gamma(z) = \frac{1}{G(z)} = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^{\frac{z}{k}}}{1 + \frac{z}{k}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}.$$

Insbesondere hat Γ keine Nullstellen. Es gilt die Ergänzungsformel $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

Beweis. Die Funktion $\frac{1}{G(z)}$ erfüllt die Rekursionsformel und die Normierung der Gamma-Funktion. Nach dem Satz von Wieland ist nur noch die Beschränktheit auf $1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2$ zu zeigen. Sei $z = x + iy$ mit $x > 0$, dann ist $|n^z| = n^x$ und $|z+k| \geq x+k$, also $\left| \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)} \right| \leq \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \frac{1}{G_n(x)}$ und deshalb $\left| \frac{1}{G(z)} \right| \leq \frac{1}{G(\operatorname{Re}(z))}$ für alle $\operatorname{Re}(z) > 0$. Nun hat $G(x)$ als Produkt positiver Funktionen keine Nullstelle auf \mathbb{R}_+ . Die somit auf \mathbb{R}_+ stetige Funktion $\frac{1}{G(x)}$ ist nach Extremwertsatz auf $[1, 2]$ beschränkt. Zusammengefaßt ist $\frac{1}{G(z)}$ auf dem Streifen V beschränkt, und deshalb $\Gamma(z) = \frac{1}{G(z)}$ nach Wieland.

Der Vergleich mit dem Sinusprodukt zeigt $\frac{G(z)G(-z)}{(-z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}$. Die Behauptung folgt dann aus $\frac{G(-z)}{(-z)} = G(1-z)$. □

Folgerung 20.5 i) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \prod_{k=1}^n (k - \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}$.

ii) $\int_0^\infty dx e^{-x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ und $\int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

Beweis. i) folgt aus Ergänzungsformel und Rekursionsformel. ii) Substitution $x = \sqrt{t}$, mit $dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$ auf \mathbb{R}_+ führt auf $\int_0^\infty dx e^{-x^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dt t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})$. □

Satz 20.6 (Legendresche Verdopplungsformel)

Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, \dots\}$ gilt $\Gamma(2z) = \frac{4^z}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2})$.

Beweis. Wir zeigen, daß $f(z) = 2^z\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{z+1}{2})$ die Voraussetzungen des Satzes von Wieland erfüllt. Nach Rekursionsformel ist $\Gamma(z)$ auch für $\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) < \frac{3}{2}$ beschränkt, und dann ist f auf V beschränkt. Holomorphie ist klar, und $f(z+1) = 2 \cdot 2^z\Gamma(\frac{z+1}{2})\Gamma(\frac{z}{2}+1) = zf(z)$. Mit $f(1) = 2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1) = 2\sqrt{\pi}$ folgt die Behauptung. \square

Mit derselben Technik zeigt man die Gaußsche Multiplikationsformel

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{nz-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(z + \frac{k}{n}).$$

Schließlich erwähnen wir ohne Beweis:

Satz 20.7 (Stirlingsche Formel) Für $z \in \mathbb{C}_-$ gilt

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \exp(\mu(z))$$

mit $\mu(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \left((z+n+\frac{1}{2}) \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{z+n}\right) - 1 \right)$.

Dabei gilt $|\mu(z)| \leq \frac{1}{8|z|\sin^2\frac{\delta}{2}}$ für alle $z \in W_\delta := \{w = |w|e^{i\phi} : -\pi+\delta \leq \phi \leq \pi-\delta\}$.

Für $z = n+1$ läßt sich daraus die klassische Stirlingsche Formel $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \exp\left(\frac{\mu_n}{12n}\right)$ gewinnen mit $0 < \mu_n < 1$.

Wir führen weitere Funktionen ein, die eng mit der Gamma-Funktion verwandt sind:

Satz/Definition 20.8 Als Eulersche Beta-Funktion wird das Integral

$$B(z, w) = \int_0^1 dt t^{z-1}(1-t)^{w-1}$$

bezeichnet. Es konvergiert absolut für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Re}(w) > 0$ gegen eine in beiden Variablen gemeinsam stetige und in jeder Variablen getrennt holomorphe Funktion. Es gilt

$$B(w, z) = B(z, w), \quad B(1, w) = \frac{1}{w}, \quad B(1+z, w) = \frac{z}{z+w} B(z, w)$$

und deshalb $B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$.

Beweis. Konvergenz und Holomorphie wird völlig analog zur Gamma-Funktion bewiesen. Symmetrie folgt durch Substitution $t \mapsto 1 - t$, der Wert $B(z, 1) = \int_0^1 dt t^{z-1} = \frac{1}{z} t^z \Big|_0^1 = \frac{1}{z}$ aus direkter Rechnung. Weiter folgt

$$0 = \int_0^1 dt (t^z(1-t)^w)' = zB(z, w+1) - wB(z+1, w),$$

$$B(z, w) = \int_0^1 dt (1-t+t)t^{z-1}(1-t)^{w-1} = B(z+1, w) + B(z, w+1)$$

und aus beiden Identitäten $zB(z, w) = (z+w)B(z+1, w)$.

Sei nun $f(z) := \frac{B(z, w)\Gamma(z+w)}{\Gamma(w)}$ für festes w . Das Beta-Integral ist beschränkt auf dem Streifen $1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2$, somit ist auch f auf dem Streifen beschränkt. Es gilt $f(1) = \frac{B(1, w)\Gamma(1+w)}{\Gamma(w)} = 1$ und die Funktionalgleichung $f(z+1) = \frac{\frac{z}{w+z}B(z, w)\Gamma(z+1+w)}{\Gamma(w)} = zf(z)$. Nach dem Satz von Wieland ist $f(z) = \Gamma(z)$. \square

Einige wichtige reelle Integrale führen nach geeigneten Substitutionen auf das Beta-Integral.

Eine weitere wichtige Funktion ist die auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ holomorphe Funktion $\psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$. Aus der Produktformel von Γ und Produktregel bzw. aus der Ergänzungsformel gewinnen wir die Partialbruchzerlegungen

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right), \quad \psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot(\pi z).$$

Es folgt $\psi(1) = -\gamma$ sowie

$$\psi(z) - \psi(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{w+k} - \frac{1}{z+k} \right), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+k)(b+k)} = \frac{\psi(b) - \psi(a)}{b-a}.$$

Erneutes Differenzieren von $\psi(z)$ führt auf

$$\psi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}, \quad \psi^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^{n+1}}, \quad n \geq 1$$

und insbesondere $\zeta(n) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \psi^{(n-1)}(1)$ und die Reihenentwicklung $\psi(1+z) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \zeta(k+1) z^k$. Aus der reellen Integraldarstellung der Ableitung der Gamma-Funktion gewinnt man so Integrale wie z.B.

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} \ln x = \Gamma'(1) = \psi(1) = -\gamma,$$

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} (\ln x)^2 = \Gamma''(1) = \psi'(1) + (\psi(1))^2 = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

Für $x > 0$ gilt $\psi(x) = (\ln(\Gamma))'(x)$ und somit $(\ln(\Gamma))''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} > 0$. Damit ist die reelle Γ -Funktion logarithmisch konvex. Diese Eigenschaft ist wichtig in einem rein reellen Eindeutigkeitssatz (den wir nicht beweisen):

Satz 20.9 (Bohr-Mollerup) Eine Funktion $f : \mathbb{R}_+^\times \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$ erfülle $f(x+1) = xf(x)$ und sei logarithmisch konvex. Dann ist $f(x) = f(1)\Gamma(x)$.

21 Die zeta-Funktion

Die zeta-Funktion, zunächst definiert durch $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ für $\operatorname{Re}(z) > 1$, spielt eine überragende Rolle in verschiedensten Bereichen der Mathematik. Das berühmteste ungelöste Problem der Mathematik, die Riemannsche Vermutung, betrifft eine Eigenschaft von $\zeta(z)$. In diesem Abschnitt geht es um die Funktionentheorie der zeta-Funktion. Die Verbindung zur Zahlentheorie wird im nächsten Abschnitt hergestellt.

Satz 21.1 $\zeta(z)$ ist holomorph im Halbraum $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$.

Beweis. Jeder Summand $\frac{1}{n^z}$ ist holomorph, damit auch jede Partialsumme $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^z}$. Wegen $|n^z| = n^{\operatorname{Re}(z)}$ und der aus der Analysis bekannten Tatsache, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $s > 1$ absolut konvergiert, konvergiert $(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^z})_{N \in \mathbb{N}}$ normal gegen $\zeta(z)$ falls $\operatorname{Re}(z) > 1$. Nach Satz 17.15 ist $\zeta(z)$ holomorph in diesem Halbraum. \square

Unser Ziel ist die Fortsetzung von ζ zu einer meromorphen Funktion auf \mathbb{C} . Der erste Schritt ist:

Satz 21.2 ζ hat eine meromorphe Fortsetzung auf den Halbraum $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ mit einzigem (einfachen) Pol bei $z = 1$ und Residuum $\operatorname{res}_1 \zeta(z) = 1$.

Beweis. Zu zeigen ist, daß sich $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ holomorph zu $\operatorname{Re}(z) > 0$ fortsetzt. Zunächst gilt für $\operatorname{Re}(z) > 1$

$$\begin{aligned} \zeta(z) - \frac{1}{z-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^z} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} dx \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right). \end{aligned}$$

Die rechte Seite konvergiert nun absolut für $\operatorname{Re}(z) > 0$ (so daß wir $\zeta(z)$ durch Umstellung dieser Formel als Integral definieren können). Jeder Summand hat für $\operatorname{Re}(z) > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{n+1} dx \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z} \right) \right| &= \left| \int_n^{n+1} dx \int_n^x du \frac{z}{u^{z+1}} \right| \leq \int_n^{n+1} dx \int_n^x du \frac{|z|}{u^{\operatorname{Re}(z)+1}} \\ &\leq \max_{n \leq u \leq x \leq n+1} \frac{|z|}{u^{\operatorname{Re}(z)+1}} = \frac{|z|}{n^{\operatorname{Re}(z)+1}}. \end{aligned}$$

Die verbleibende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|}{n^{\operatorname{Re}(z)+1}}$ konvergiert (absolut) für alle $\operatorname{Re}(z) > 0$. \square

Die weitere Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} geschieht mit einer Funktionalgleichung. Ihre Herleitung beruht auf einer Verbindung zur Gamma-Funktion sowie Techniken über Fourier-Integrale:

Satz 21.3 Für alle $1 \neq z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ gilt

$$\frac{\Gamma(\frac{z}{2})\zeta(z)}{\pi^{\frac{z}{2}}} = -\frac{1}{z(1-z)} + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t} (t^{\frac{z}{2}} + t^{\frac{1-z}{2}})\omega(t), \quad \omega(t) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}.$$

Beweis und Diskussion der Konvergenz des Integrals verschieben wir hinter die folgende Beobachtung: Da die rechte Seite invariant unter $z \mapsto 1-z$ ist, gilt zunächst für $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$, dann nach Identitätssatz allgemeiner:

Folgerung 21.4 Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ gilt

$$\frac{\Gamma(\frac{z}{2})\zeta(z)}{\pi^{\frac{z}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{1-z}{2})\zeta(1-z)}{\pi^{\frac{1-z}{2}}}$$

und damit die Funktionalgleichung der zeta-Funktion

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \Gamma(1-z) \sin \frac{\pi z}{2} \zeta(1-z).$$

Beweis von Folgerung 21.4. Die erste Gleichung als Folgerung aus (21.3) ist bereits diskutiert. Umstellen der Gleichung führt mit Ergänzungsformel (Satz 20.4) und Verdopplungsformel (Satz 20.6) für die Gamma-Funktion auf

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \pi^{z-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1-z}{2})\zeta(1-z)}{\Gamma(\frac{z}{2})} \cdot \frac{\Gamma(1-\frac{z}{2})}{\Gamma(1-\frac{z}{2})} \\ &= \pi^{z-\frac{3}{2}} \sin \frac{\pi z}{2} \Gamma(\frac{1-z}{2})\Gamma(\frac{1-z}{2} + \frac{1}{2})\zeta(1-z) = 2^z \pi^{z-1} \Gamma(1-z) \sin \frac{\pi z}{2} \zeta(1-z). \end{aligned} \quad \square$$

Aus der Funktionalgleichung folgt:

Satz 21.5 i) $\zeta(-2n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^\times$,

ii) $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$,

iii) $\zeta(1-2n) = -\frac{1}{2n} B_{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}^\times$.

Zusammenfassend ist $\zeta(1-n) = -(-1)^n \frac{B_n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}^\times$. Dabei waren die B_n die Bernoulli-Zahlen.

Beweis von Satz 21.5. i) folgt aus $\sin(n\pi) = 0$.

ii) Für $z = 0$ kompensieren sich die Nullstelle des Sinus mit dem Pol der zeta-Funktion: $\lim_{z \rightarrow 0} \sin \frac{\pi z}{2} \zeta(1 - z) = \lim_{z \rightarrow 1} \sin \frac{\pi(1-z)}{2} \zeta(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi(1-z)}{2}}{(z-1)} \cdot (z-1)\zeta(z) = -\frac{\pi}{2}$. Somit $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

iii) Die Funktionalgleichung und Satz 18.3 liefert für $n \in \mathbb{N}^\times$

$$\zeta(1 - 2n) = 2^{1-2n} \pi^{-2n} \Gamma(2n) \sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right) \zeta(2n) = -\frac{1}{2n} B_{2n} . \quad \square$$

Man findet gelegentlich $\zeta(-1)$ dargestellt in der so natürlich sinnlosen Formel "1 + 2 + 3 + ..." = $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$.

Beweis von Satz 21.3. Zunächst zur Konvergenz des Integrals über ω (sogar für beliebige $z \in \mathbb{C}$). Mit der üblichen Abschätzung $|t^z| \leq t^{\operatorname{Re}(z)}$ genügt es, $z = s \in \mathbb{R}$ zu betrachten. Für festes $s \in \mathbb{R}$ gibt es ein $C_s > 0$, so daß $\frac{1}{t} (t^{\frac{s}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}}) \leq C_s e^{\frac{\pi^2 t}{2}}$ für alle $t \geq 1$. Die dann relevante Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2 - \frac{1}{2})t}$ konvergiert gleichmäßig in $t \geq 1$, so daß Integral und Reihe tauschen:

$$\left| \int_1^{\infty} \frac{dt}{t} (t^{\frac{s}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}}) \omega(t) \right| \leq C_s \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} dt e^{-\pi(n^2 - \frac{1}{2})t} = C_s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi(n^2 - \frac{1}{2})}}{\pi(n^2 - \frac{1}{2})} < \infty .$$

Sei nun $\operatorname{Re}(z) > 0$. In der Integraldarstellung für $\Gamma(\frac{z}{2})$ substituieren wir $t \mapsto \pi n^2 t$ mit $n \in \mathbb{N}^\times$:

$$\frac{\pi^{-\frac{z}{2}}}{n^z} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \int_0^{\infty} dt t^{\frac{z}{2}-1} e^{-\pi n^2 t} \quad \Rightarrow \quad \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) = \int_0^{\infty} dt t^{\frac{z}{2}-1} \omega(t)$$

(nach Summe über n). Das Integral wird bei $t = 1$ geteilt und das untere Intervall mittels $t \mapsto \frac{1}{t}$ auf das obere abgebildet:

$$\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) = \int_1^{\infty} dt \left(t^{\frac{z}{2}-1} \omega(t) + \frac{1}{t^2} t^{-\frac{z}{2}+1} \omega\left(\frac{1}{t}\right) \right) .$$

Wir beweisen anschließend:

Lemma 21.6 $\omega\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{t} + \sqrt{t}\omega(t)$.

Mit diesem Lemma folgt

$$\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) = \int_1^{\infty} dt (t^{\frac{z}{2}-1} + t^{\frac{1-z}{2}-1}) \omega(t) + \int_1^{\infty} dt t^{-\frac{z}{2}-1} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{t} \right) .$$

Das zweite Integral ergibt $-\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z(1-z)}$. □

Der verbleibende Beweis von Lemma 21.6 ist eine Anwendung der mächtigen *Poissonschen Summenformel* für die Fourier-Transformation.

Satz 21.7 (Poissonsche Summenformel) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit genügend schnellem Abfall im Unendlichen, $\sup_{t \in \mathbb{R}} ((1+t^2)(|f(t)| + |f''(t)|)) < \infty$. Dann hat f eine kontinuierliche Fouriertransformation

$$\hat{f}(k) := \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-2\pi i k x}, \quad k \in \mathbb{R},$$

und diese erfüllt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n).$$

Beweis von Satz 21.7. Unter den Voraussetzungen wird durch $g(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ eine stetig differenzierbare Funktion erklärt. Diese ist periodisch, $g(x) = g(x+1)$ und hat deshalb auf $[0, 1]$ eine Darstellung als gegen g gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}.$$

Die Fourier-Koeffizienten bestimmen sich aus der Umkehrformel

$$c_k = \int_0^1 dx g(x) e^{-2\pi i k x} = \int_0^1 dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) e^{-2\pi i k (x+n)}.$$

Die Regularität von f sichert gleichmäßige Konvergenz der Reihe auf \mathbb{R} , so daß Integral und Reihe tauschen:

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx f(x+n) e^{-2\pi i k (x+n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} dx f(x) e^{-2\pi i k x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-2\pi i k x} = \hat{f}(k). \end{aligned}$$

Zusammengefaßt gilt $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$. Für $x = 0$ folgt die Behauptung. \square

Beweis von Lemma 21.6. Sei $t > 1$. Die Funktion $f(x) = e^{-\pi x^2 t}$ erfüllt die Voraussetzungen der Poissonschen Summenformel. Ihre kontinuierliche Fourier-Transformation ist

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\pi x^2 t - 2\pi i k x} = e^{-\pi \frac{k^2}{t}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\pi t (x + \frac{ik}{t})^2}.$$

Das Integral kann aufgefaßt werden als Limes eines komplexes Kurvenintegrals $\int_{\gamma} dz e^{-\pi t z^2}$ über die Kurve $\gamma(x) = x + \frac{ik}{t}$, $x \in [-R, R]$. Es wird an den Rändern $x = \pm R$ vertikal zur reellen Achse geführt, wobei die vertikalen Kurven für

$R \rightarrow \infty$ nicht beitragen. Wegen Holomorphie von $e^{-\pi tz^2}$ kann der Integrationsweg deformiert werden in die Kurve $\gamma(x) = x$, so daß nach Substitution $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{\pi t}}$ entsteht

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\pi t(x + \frac{ik}{t})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\pi tx^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Somit gilt nach Poissonscher Summenformel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi k^2}{t}} \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi k^2}{t}} \right),$$

also $1 + 2\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}(1 + 2\omega(\frac{1}{t}))$. Damit ist Lemma 21.6 bewiesen, und insgesamt auch Satz 21.3 und die Funktionalgleichung in Folgerung 21.4. \square

Wir sehen im nächsten Abschnitt, daß $\zeta(z)$ sehr eng mit den Primzahlen zusammenhängt. Aus diesem Zusammenhang ergab sich historisch die Aussicht, mit Hilfe der zeta-Funktion eine empirisch gefundene Aussage über die Verteilung der Primzahlen zu beweisen. Bernhard Riemann konnte 1859 zeigen, daß eine sehr präzise Aussage zu erhalten wäre, wenn man annimmt, daß abgesehen von den offensichtlichen Nullstellen $\zeta(-2n) = 0$ für alle weiteren Nullstellen $\zeta(z) = 0$ gilt: $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$. Diese Aussage ist Inhalt der *Riemannschen Vermutung*, des berühmtesten ungelösten Problems der Mathematik. Die Riemannsche Vermutung ist (als Teil des 8. Problems) enthalten auf der Liste von 23 Problemen der Mathematik, die David Hilbert auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress 1900 als die wichtigsten formuliert hat. Eine vergleichbare Liste von Millennium-Problemen wurde für das Jahr 2000 vom Clay-Institut formuliert. Hier ist die Riemannsche Vermutung das 4. von 7 Problemen. Die Lösung (aber nicht die Angabe eines Gegenbeispiels) wird mit 10^6 \$ belohnt.

Aus der Verbindung zu Primzahlen (nächster Abschnitt) folgt, daß $\zeta(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 1$. Hadamard und de la Vallée-Poussin konnten 1896 unabhängig voneinander beweisen, daß $\zeta(1 + it) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}^\times$. Aus der Funktionalgleichung folgt dann $\zeta(it) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Das genügte bereits, eine schon wichtige Vermutung über die Verteilung der Primzahlen zu beweisen, den *Primzahlsatz*. Wir gehen im nächsten Abschnitt darauf ein. Zusammenfassend weiß man, daß alle nichttrivialen ($z \neq -2n$) Nullstellen der zeta-Funktion im Streifen $0 < \operatorname{Re}(z) \leq 1$ liegen.

Aus $\zeta(\bar{z}) = \overline{\zeta(z)}$ und Funktionalgleichung folgt: Ist $\zeta(x + iy) = 0$ für $0 < x < 1$, dann auch $\zeta(x - iy) = 0$, $\zeta(1 - x - iy) = 0$ und $\zeta(1 - x + iy) = 0$. Somit treten die Nullstellen auf der kritischen Geraden $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$ doppelt und ansonsten vierfach auf. Man weiß, daß es auf $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$ unendlich viele Nullstellen gibt (Hardy & Littlewood 1924). Man hat numerisch mindestens 10^{13} Nullstellen bestimmt, alle diese liegen auf der kritischen Geraden, und alle sind einfach.

22 Der Primzahlsatz

Die zeta-Funktion hat eine tiefe Verbindung zu Primzahlen:

Satz 22.1 (Euler) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 1$ gilt

$$\zeta(z) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-z}} \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}},$$

wobei $(p_n) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$ die Folge der Primzahlen ist. Insbesondere hat die zeta-Funktion keine Nullstelle im Halbraum $\operatorname{Re}(z) > 1$.

Beweis. Wegen $|\frac{1}{p^z}| < 1$ konvergieren die geometrischen Reihen in dem folgenden Produkt:

$$\prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - p_k^{-z}} = \prod_{k=1}^N \left(\sum_{j_k=0}^{\infty} p_k^{-z j_k} \right) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_N=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_N^{j_N})^z}.$$

Nun hat jede natürliche Zahl $n > 0$ eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren $n = p_1^{j_1} p_2^{j_2} p_3^{j_3} \dots$, und umgekehrt definiert jede \mathbb{N} -wertige Folge (j_1, j_2, j_3, \dots) genau eine natürliche Zahl $(p_1^{j_1} p_2^{j_2} p_3^{j_3} \dots)$. Sei $P(N)$ die Teilmenge jener natürlichen Zahlen, die sich als $p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_N^{j_N}$ darstellen lassen mit $j_k \geq 0$. Hier besteht $P(1)$ aus 1 und allen geraden Zahlen, $P(2)$ aus 1 und allen durch 2, 3, 6 teilbaren Zahlen, usw. Wegen der absoluten Konvergenz von $\zeta(z)$ für $\operatorname{Re}(z) > 1$ kann die zeta-Reihe umgeordnet werden in die Folge der Partialsummen

$$\zeta(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n \in P(N)} \frac{1}{n^z} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_N=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_N^{j_N})^z} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-z}}.$$

Die Umordnung ändert nichts an Grenzwert sowie absoluter und normaler Konvergenz der Reihen. \square

Implizit wurde im Beweis verwendet, daß es unendlich viele Primzahlen gibt (sonst wäre beispielsweise $\zeta(2)$ rational). Mehr noch, die Primzahlen bleiben häufig:

Satz 22.2 Sei $(p_n) = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ die Folge der Primzahlen. Zwar gilt $p_n - 1 \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}^\times$, aber es gibt kein $\epsilon > 0$ und $C > 0$ derart, daß $p_n \geq 1 + Cn^{1+\epsilon}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. $\zeta(z)$ hat einen Pol bei $z = 1$, so daß $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}$ divergiert. Wegen der gleichartigen Konvergenz von unendlichen Summen und Produkten (Lemma 19.1) muß deshalb auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} - 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n - 1}$ divergieren. Wäre $p_n \geq 1 + Cn^{1+\epsilon}$, dann ist $\frac{1}{p_n - 1} \leq \frac{1}{Cn^{1+\epsilon}}$, aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Cn^{1+\epsilon}}$ konvergiert. \square

Ein denkbares Wachstumsverhalten, das $\zeta(1)$ noch divergieren läßt, wäre $p_n \sim n(\alpha + \beta \ln n)$. Zweckmäßigerweise geht man zur Umkehrfunktion über, $p_{\pi(n)} = n$:

Definition 22.3 $\pi(x) := \{\text{Zahl der Primzahlen } \leq x\}$.

Wir suchen das asymptotische Verhalten der Primzahlverteilung $\pi(n)$ für große n , wobei

Definition 22.4 Zwei (nicht notwendig konvergente) Folgen (a_n) und (b_n) heißen *asymptotisch gleich*, geschrieben $a_n \sim b_n$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Wir können nun formulieren (für $x \geq 2$):

Theorem 22.5 (Primzahlsatz) $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$

Dieses Verhalten wurde bereits 1797 von Legendre durch Betrachtung von Primzahltafeln vermutet und später von Gauß durch Bestimmung aller Primzahlen $< 3\,000\,000$ weiter untermauert. Das Theorem wurde 1896 von Hadamard und de la Vallée-Poussin unabhängig voneinander bewiesen. Manche Schritte konnten später vereinfacht werden. Wir geben im folgenden wesentliche Teile dieses Beweises (nach Newman¹ und Zagier²).

Die logarithmische Ableitung $\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$ der zeta-Funktion ist holomorph außerhalb der Polstelle $z = 1$ und außerhalb sämtlicher Nullstellen von ζ . Es gilt:

Satz 22.6 Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(z) > 1$ gilt

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_n}{n^z}, \quad \Lambda_n := \begin{cases} \ln p & \text{falls } n = p^k, \text{ } p \text{ Primzahl, } k \in \mathbb{N}^\times \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Folge $(\Lambda_n) = \{0, \ln 2, \ln 3, \ln 2, \ln 5, 0, \ln 7, \ln 2, \ln 3, 0, \dots\}$ heißt *von-Mangoldt-Folge*.

Beweis. Mit der allgemeinen Beziehung für die logarithmische Ableitung unendlicher Produkte gilt

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^z}}\right)'}{\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^z}}} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-z \ln p_k})'}{1 - \frac{1}{p_k^z}} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln p_k p_k^{-z}}{1 - p_k^{-z}} \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_k=1}^{\infty} \ln p_k (p_k^{-z})^{j_k} = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_k=1}^{\infty} \frac{\ln p_k}{(p_k^{j_k})^z}. \end{aligned}$$

Die $p_k^{j_k}$ erreichen genau die (positiven) Potenzen sämtlicher Primzahlen. Wegen der absoluten Konvergenz für $\text{Re}(z) > 1$ kann die Doppelreihe umgeordnet werden

¹D. J. Newman, "Simple analytic proof of the prime number theorem," Amer. Math. Monthly **87** (1980) 693–696.

²D. Zagier, "Newman's short proof of the prime number theorem," Amer. Math. Monthly **104** (1997) 705–708.

in eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wobei a_n nur ungleich Null ist für $n = p^{j_k}$ eine positive Potenz einer Primzahl p , und dort den Wert $a_n = \frac{\ln p}{n^z}$ annimmt. Damit entsteht die Darstellung über die von-Mangoldt-Folge. \square

Allgemein heißen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ *Dirichlet-Reihen*. Sie spielen eine wichtige Rolle in der analytischen Zahlentheorie.

Im nächsten Schritt gehen wir über zu den beiden auf \mathbb{R}_+ definierten Tschebyscheff-Funktionen

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda_n, \quad \vartheta(x) := \sum_{p \leq x} \ln p.$$

Die Summe in ϑ läuft über die Primzahlen $\leq x$. Beide Tschebyscheff-Funktionen sind monoton wachsende Treppenfunktionen und als solche integrierbar. Der Primzahlsatz ist äquivalent zu $\vartheta(x) \sim x$:

Satz 22.7 Aus $\vartheta(x) \sim x$ folgt $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

Beweis. Im folgenden sei $x > e$. Nach Voraussetzung ist $\sum_{p \leq x} \ln p = x(1 + r(x))$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = 0$. Abschätzen durch den größten Summanden und die Anzahl ergibt die triviale Ungleichung $\sum_{p \leq x} \ln p \leq \ln x \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) \ln x$, also $\pi(x) \geq \frac{x}{\ln x}(1 + r(x))$.

Sei $0 < q < 1$. Dann ist $\sum_{p \leq x} \ln p \geq \sum_{x^q < p \leq x} \ln p$, und Abschätzen durch den kleinsten Summanden liefert $\sum_{p \leq x} \ln p \geq \ln(x^q) \sum_{x^q < p \leq x} 1 = q \ln x (\pi(x) - \pi(x^q))$. Nun ist $\pi(x^q) \leq x^q$, und deshalb gilt die leichter handhabbare Abschätzung $\sum_{p \leq x} \ln p \geq q \ln x (\pi(x) - x^q)$, aus der wir durch Umstellen gewinnen:

$$\pi(x) \leq \frac{1}{q} \frac{x}{\ln x} (1 + r(x)) + x^q.$$

Wir können $q < 1$ so wählen, daß beide Terme vergleichbare Größe haben, z.B. $q = 1 - \frac{1}{\sqrt{\ln x}}$ für $x > e$:

$$\pi(x) \leq \frac{x}{\ln x} (1 + R(x)), \quad R(x) = -1 + \frac{1 + r(x)}{1 - \frac{1}{\sqrt{\ln x}}} + \frac{\ln x}{e^{\sqrt{\ln x}}}.$$

Offenbar gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0$. \square

Folglich möchte man $\vartheta(x) \sim x$ zeigen. Dazu erarbeiten wir uns eine Integraldarstellung, für deren Konvergenz benötigt wird:

Lemma 22.8 Es gibt $C_1, C_2 > 0$ mit $\vartheta(x) \leq C_1 x + C_2$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}^\times$ gilt

$$2^{2n} = (1 + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \geq \binom{2n}{n} = \frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{1 \cdot 2 \cdots n}.$$

Da $\binom{2n}{n}$ eine ganze Zahl ist, kürzen sich alle Faktoren im Nenner gegen Teile des Zählers, nicht jedoch gegen die Primzahlen in $[n+1, 2n]$ des Zählers. Es folgt $2^{2n} \geq \prod_{n < p \leq 2n} p = \exp(\sum_{n < p \leq 2n} \ln p) = e^{\vartheta(2n) - \vartheta(n)}$ und damit $\vartheta(2n) - \vartheta(n) \leq 2n \ln 2$.

Wir möchten daraus $\vartheta(x) - \vartheta(\frac{x}{2}) \leq C_0 x$ schließen für alle $x \geq 2$. Sei $n := \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ der ganze Teil. Dann ist $0 \leq x - 2n < 2$. Da zwischen $x \geq 2$ und $2n$ höchstens eine Primzahl liegt, und diese $\leq x$ ist, folgt aus der Definition von ϑ

$$\begin{aligned} \vartheta(x) - \vartheta(\frac{x}{2}) &= \vartheta(x) - \vartheta(2n) - (\vartheta(\frac{x}{2}) - \vartheta(n)) + \vartheta(2n) - \vartheta(n) \\ &\leq \ln x + 2n \ln 2 \leq x \left(\ln 2 + \frac{\ln x}{x} \right) \leq x \left(\ln 2 + \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

Sei nun $\frac{x}{2^N} \geq 2$, aber $\frac{x}{2^{N+1}} < 2$, dann folgt

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} \vartheta(\frac{x}{2^n}) - \vartheta(\frac{x}{2^{n+1}}) \right) + \vartheta(\frac{x}{2^N}) \leq \left(x \left(\ln 2 + \frac{1}{e} \right) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2^n} \right) + \vartheta(4) \\ &\leq 2 \left(\ln 2 + \frac{1}{e} \right) x + \ln(6). \quad \square \end{aligned}$$

Damit gewinnen wir folgende Integraldarstellung:

Satz 22.9 Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 1$ gilt

$$\Phi(z) := \sum_p \frac{\ln p}{p^z} = z \int_1^\infty dx \frac{\vartheta(x)}{x^{z+1}}.$$

Beweis. Sei (p_n) die Folge der Primzahlen. Das Integral wird auf $[1, p_N]$ beschränkt und an den Primzahlen p_n aufgespalten. Die Treppenfunktion $\vartheta(x)$ ist auf $[p_n, p_{n+1}]$ konstant gleich $\sum_{k=1}^n \ln p_k$ und auf $[0, 1]$ identisch 0:

$$\begin{aligned} z \int_1^{p_N} dx \frac{\vartheta(x)}{x^{z+1}} &= z \sum_{n=1}^{N-1} \int_{p_n}^{p_{n+1}} \frac{dx}{x^{z+1}} \cdot \sum_{k=1}^n \ln p_k = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{p_n^z} - \frac{1}{p_{n+1}^z} \right) \cdot \sum_{k=1}^n \ln p_k \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{\sum_{k=1}^n \ln p_k}{p_n^z} - \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \ln p_k}{p_{n+1}^z} + \frac{\ln p_{n+1}}{p_{n+1}^z} \right) \\ &= \frac{\sum_{k=1}^1 \ln p_k}{p_1^z} - \frac{\sum_{k=1}^N \ln p_k}{p_N^z} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\ln p_{n+1}}{p_{n+1}^z} \end{aligned}$$

(Teleskopsumme). Nun ist $\sum_{k=1}^N \ln p_k = \vartheta(p_N + \epsilon) \leq C_1 p_N + C_2$ nach vorigem Lemma, so daß $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^N \ln p_k}{p_N^z} = 0$ für $\operatorname{Re}(z) > 1$. Damit folgt $\lim_{N \rightarrow \infty} z \int_1^{p_N} dx \frac{\vartheta(x)}{x^{z+1}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\ln p_n}{p_n^z}$, äquivalent zur Behauptung. \square

Die Summe $\Phi(z) = \sum_p \frac{\ln p}{p^z}$ tritt nahezu in der Rechnung für $-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$ auf:

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_p \frac{\ln p p^{-z}}{1-p^{-z}} = \sum_p \frac{\ln p}{p^z-1} = \sum_p \frac{\ln p}{p^z} + \sum_p \frac{\ln p}{p^z(p^z-1)}.$$

Die letzte Reihe $\sum_p \frac{\ln p}{p^z(p^z-1)}$ ist holomorph für $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$, so daß sich $\Phi(z)$ meromorph fortsetzt auf $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$ mit einfachen Polen in $z = 1$ (dem Pol von ζ) sowie sämtlichen Nullstellen von ζ . Wegen $-(\frac{1}{z-1})'/\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1}$ hat $\Phi(z) - \frac{1}{z-1}$ eine holomorphe Fortsetzung nach $z = 1$.

Als nächstes schließen wir Nullstellen von ζ auf der Geraden $\operatorname{Re}(z) = 1$ aus.

Satz 22.10 Für alle $x > 1$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|(\zeta(x))^3(\zeta(x+iy))^4\zeta(x+2iy)| = \exp\left(\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1+\cos(ny \ln p))^2}{np^{nx}}\right) > 1.$$

Insbesondere folgt $\zeta(1+iy) \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Wir beginnen mit der Folgerung. Da $\zeta(x)$ für $x \searrow 1$ divergiert, genügt die Betrachtung von $y \neq 0$. Angenommen, $\zeta(1+iy) = 0$ für ein $y \in \mathbb{R}^\times$. Handelt es sich um eine ($\nu \geq 1$)-fache Nullstelle, dann ist $\zeta(x+iy) = (x-1)^\nu f(x,y)$ für eine in einer Umgebung von $(1,y)$ stetige und nullstellenfreie Funktion f . Dann ist $(\zeta(x))^3(\zeta(x+iy))^4\zeta(x+2iy) = (x-1)^{4\nu-3}g(x,y)$ für eine in einer Umgebung von $(1,y)$ stetige Funktion g . Das bedeutet $\lim_{x \searrow 1} ((\zeta(x))^3(\zeta(x+iy))^4\zeta(x+2iy)) = 0$, im Widerspruch zu der noch zu zeigenden Formel.

Sei $z = x+iy$. Dann ist $\operatorname{Re}(1-\frac{1}{p^z}) = 1 - \frac{1}{p^x} \cos(y \ln p) > \frac{1}{2}$ und damit $\frac{1}{(1-\frac{1}{p^z})} \in \mathbb{C}_+$. Deshalb darf von der Produktformel für die zeta-Funktion, $\operatorname{Re}(z) > 1$, der Logarithmus genommen werden:

$$\operatorname{Log}(\zeta(z)) = -\sum_p \operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{p^z}\right) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{-nz}}{n} = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-iny \ln p}}{np^{nx}}$$

(wegen $|\frac{1}{p^z}| < 1$ kann der Logarithmus in eine Reihe entwickelt werden). Es folgt

$$|\zeta(x+iy)| = \exp(\operatorname{Re}(\operatorname{Log}(\zeta(x+iy)))) = \exp\left(\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(ny \ln p)}{np^{nx}}\right).$$

Die Behauptung folgt nun mit $2(1+\cos(ny \ln p))^2 = 3 + 4\cos(ny \ln p) + (2\cos^2(ny \ln p) - 1) = 3 + 4\cos(ny \ln p) + \cos(2ny \ln p)$. \square

Folgerung 22.11 $\Phi(z) - \frac{1}{z-1}$ ist holomorph in einer Umgebung von $\operatorname{Re}(z) \geq 1$. \square

Mit Satz 22.9 können wir für $\operatorname{Re}(z) > 1$ schreiben:

$$\Phi(z) - \frac{1}{z-1} = \Phi(z) - \frac{z}{z-1} + 1 = 1 + z \int_1^\infty dx \left(\frac{\vartheta(x)}{x^{z+1}} - \frac{1}{x^z} \right).$$

Die linke Seite hat eine holomorphe Fortsetzung nach $z = 1$. Der verbleibende (funktionentheoretische) Beweis besteht darin zu zeigen, daß dann auch das Integral $\int_1^\infty dx \frac{\vartheta(x)-x}{x^2}$ auf der rechten Seite konvergieren muß.

Zweckmäßigerweise verschieben wir $z \mapsto z+1$ und interpretieren das Problem als Fortsetzung einer Laplace-Transformation auf $\operatorname{Re}(z) \geq 0$.

Theorem 22.12 *Eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sei beschränkt und über jedes abgeschlossene Intervall $[0, T]$ integrierbar. Ihre für $\operatorname{Re}(z) > 0$ erklärte Laplace-Transformation*

$$(\mathcal{L}f)(z) := \int_0^\infty dt e^{-zt} f(t), \quad \operatorname{Re}(z) > 0,$$

habe eine holomorphe Fortsetzung $g(z)$ bis auf $\operatorname{Re}(z) \geq 0$. Dann existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty dt f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt f(t)$, und dieses stimmt mit $g(0)$ überein.

Beweis. Wegen $|f(t)| \leq M$ hat die Laplace-Transformierte $(\mathcal{L}f)(z)$ die konvergente Majorante $M \int_0^\infty dt |e^{-zt}| = \frac{M}{\operatorname{Re}(z)}$. Die allgemeinen Vertauschungssätze sichern, daß $(\mathcal{L}f)(z)$ auf $\operatorname{Re}(z) > 0$ holomorph ist. Der Grenzwert $z \rightarrow 0$ ist für das Integral nicht ohne weiteres möglich! Es ist sorgfältig zu unterscheiden zwischen $\operatorname{Re}(z) > 0$, wo $(\mathcal{L}f)(z)$ mit $g(z)$ übereinstimmt, und der Geraden $z = iy$, wo $g(iy)$ erklärt ist, nicht aber $(\mathcal{L}f)(iy)$.

Sei $T > 0$. Die Funktion $g_T(z) = \int_0^T dt e^{-zt} f(t)$ ist holomorph auf ganz \mathbb{C} , da $f(t)$ und alle Produkte mit stetigen Funktionen über $[0, T]$ integrierbar sind. Die holomorphe Fortsetzung von g in jeden Punkt $z = iy$ bedeutet: Zu jedem $y \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\epsilon_y > 0$, so daß g in $K_{\epsilon_y}(iy)$ holomorph ist.

Sei $R > 0$ fest gewählt. Dann ist $\bigcup_{y \in [-R, R]} K_{\epsilon_y}(iy)$ eine Überdeckung des kompakten vertikalen Intervalls $[-iR, iR]$, die auf eine endliche Überdeckung $U_R := \bigcup_{k=1}^N K_{\epsilon_{y_k}}(iy_k)$ mit $y_1, \dots, y_N \in [-R, R]$ reduziert werden kann. Dann gibt es ein von R abhängiges $\delta > 0$ derart, daß auch das verschobene Intervall $\{-\delta + iy : y \in [-R, R]\}$ vollständig im Holomorphiegebiet U_R liegt (betrachte für je zwei sich schneidende Kugeln $K_{\epsilon_{y_k}}(iy_k)$ und $K_{\epsilon_{y_l}}(iy_l)$ den Abstand $\delta_{kl} > 0$ der Schnittpunkte von $\overline{K_{\epsilon_{y_k}}(iy_k)}$ und $\overline{K_{\epsilon_{y_l}}(iy_l)}$ zur imaginären Achse und wähle δ kleiner als das Minimum aller $\delta_{kl} > 0$).

Sei $A_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, \operatorname{Re}(z) \geq -\delta\}$ und $\gamma := \partial A_R$, versehen mit positiver Orientierung. Nach Konstruktion liegt A_R (einschließlich Rand) im Inneren des Holomorphiegebiets $U_R \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ von g (und g_T).

Somit gilt nach Residuensatz:

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A_R} dz (g(z) - g_T(z)) e^{Tz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right).$$

Unser Ziel ist zu zeigen, daß das Kurvenintegral betragsmäßig beliebig klein wird. Sei $\gamma_+ = \{Re^{i\phi} : -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}\}$ der in der rechten Halbebene liegende Teil des Randes von A_R . Hier stimmt g mit $\mathcal{L}f$ überein, so daß für $|z| = R$, $Re(z) > 0$ folgt:

$$|g(z) - g_T(z)| = \left| \int_T^\infty dt e^{-tz} f(t) \right| \leq M \int_T^\infty dt e^{-t Re(z)} = M \frac{e^{-T Re(z)}}{Re(z)}.$$

Andererseits ist mit $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{R^2}$

$$\left| e^{Tz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| = e^{T Re(z)} \frac{2 Re(z)}{R^2}$$

und insgesamt $\left| (g(z) - g_T(z)) e^{Tz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| \leq \frac{2M}{R^2}$. Damit ergibt sich für das uneigentliche Integral über γ_+ nach Standardabschätzung

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} dz (g(z) - g_T(z)) e^{Tz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| \leq \frac{M}{R}.$$

Das Integral über den Teil $\gamma_- := \gamma \setminus \gamma_+$ in der linken (abgeschlossenen) Halbebene schätzen wir getrennt für g und g_T ab. Da $g_T(z)$ eine ganze Funktion ist, können wir γ_- deformieren in den abgeschlossenen Halbkreis $\{z = Re^{i(\frac{\pi}{2} + \phi)} : 0 \leq \phi \leq \pi\}$ in der linken Halbebene. In dieser Parametrisierung ist $Re(z) = -R \sin \phi$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} dz g_T(z) e^{Tz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| &\leq \frac{RM}{2\pi} \int_0^\pi d\phi \int_0^T dt e^{(T-t)R(-\sin \phi)} \frac{2 \sin \phi}{R} \\ &= \frac{M}{\pi R} \int_0^\pi d\phi \int_0^T dt (e^{(T-t)R(-\sin \phi)})' \\ &= \frac{M}{\pi R} \int_0^\pi d\phi (1 - e^{-T \sin \phi}) \leq \frac{M}{R}. \end{aligned}$$

Im Integral von g über γ_- gehen wir anders vor. Da g in einer Umgebung von γ_- holomorph, also stetig ist, gilt $\sup_{z \in \gamma_-} |g(z)| \leq C_R$ *unabhängig von T* . Für den kurzen oberen Kreisbogen $\gamma_\delta = \{z = Re^{i(\frac{\pi}{2} + \phi)} : 0 \leq \phi \leq \arcsin \frac{\delta}{R}\}$ schätzen sich die verbleibenden Terme ab zu

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} dz g(z) e^{Tz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| &\leq \frac{C_R}{2\pi} \int_0^{\arcsin \frac{\delta}{R}} d\phi Re^{-TR \sin \phi} \frac{2 \sin \phi}{R} \\ &\leq \frac{C_R}{\pi} \int_0^{\arcsin \frac{\delta}{R}} d\phi \cos \phi e^{-TR \sin \phi} \\ &= \frac{C_R}{TR\pi} (1 - e^{-T\delta}) \leq \frac{C_R}{TR\pi}. \end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, daß $\sin \phi < \cos \phi$ für $\delta < \frac{R}{\sqrt{2}}$, was wir annehmen können.

Der untere Kreisbogen mit Winkel $\pi - \arcsin \frac{\delta}{R} \leq \phi \leq \pi$ liefert wegen der Symmetrie des Problems denselben Beitrag. Verbleibt die vertikale Kurve $\gamma_\delta = \{z = -\delta + i\delta \cot \phi : \arcsin \frac{\delta}{R} \leq \phi \leq \pi - \arcsin \frac{\delta}{R}\}$, deren Kurvenintegral folgende Abschätzung hat:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} dz g(z) e^{Tz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| \\ & \leq \frac{C_R \delta}{2\pi} \int_{\arcsin \frac{\delta}{R}}^{\pi - \arcsin \frac{\delta}{R}} \frac{d\phi}{\sin^2 \phi} e^{-T\delta} \left(\frac{\sin \phi}{\delta} + \frac{\delta}{R^2 \sin \phi} \right) \\ & = \frac{C_R}{2\pi} e^{-T\delta} \left(\ln \tan \frac{\phi}{2} + \frac{\delta^2}{2R^2} \left(-\frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} + \ln \tan \frac{\phi}{2} \right) \right) \Big|_{\arcsin \frac{\delta}{R}}^{\pi - \arcsin \frac{\delta}{R}} \\ & = \frac{C_R}{2\pi} e^{-T\delta} \left(\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{R^2}} - \left(2 + \frac{\delta^2}{R^2} \right) \ln \frac{\delta}{R + \sqrt{R^2 - \delta^2}} \right) \\ & \leq \frac{C_R}{2\pi} \left(1 + \left(2 + \frac{\delta^2}{R^2} \right) \ln \frac{2R}{\delta} \right) e^{-T\delta}. \end{aligned}$$

Hier haben wir separat $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{\delta \sqrt{1 + \cot^2 \phi}}$ und $|\frac{z}{R^2}| = \frac{\delta \sqrt{1 + \cot^2 \phi}}{R^2}$ genommen und Stammfunktionen $\int \frac{d\pi}{\sin \phi}$ und $\int \frac{d\pi}{\sin^3 \phi}$ eingesetzt.

Insgesamt ist gezeigt:

$$\left| g(0) - \int_0^T dt f(t) \right| \leq \frac{2M}{R} + \frac{2C_R}{TR\pi} + \frac{C_R}{2\pi} \left(1 + \frac{5}{2} \ln \frac{2R}{\delta} \right) e^{-T\delta}.$$

Die linke Seite hat wegen der Beschränktheit durch die rechte Seite einen *limes superior* (Konvergenz kann noch nicht garantiert werden); dieser ist für Funktionen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt durch $\limsup_{x \rightarrow \infty} F(x) := \inf_{a \in \mathbb{R}} (\sup_{x > a} F(x))$. Analog ist $\liminf_{x \rightarrow \infty} F(x) := \sup_{a \in \mathbb{R}} (\inf_{x > a} F(x))$. Beide sind genau dann gleich, wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ existiert. Mit diesen Eigenschaften ist gezeigt:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \left| g(0) - \int_0^T dt f(t) \right| \leq \frac{2M}{R}.$$

Da R beliebig gewählt werden kann, folgt $\limsup_{T \rightarrow \infty} |g(0) - \int_0^T dt f(t)| = 0 = \liminf_{T \rightarrow \infty} |g(0) - \int_0^T dt f(t)|$, d.h. $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt f(t) = g(0)$. \square

Wir wählen jetzt $f(t) = e^{-t}(\vartheta(e^t) - e^t)$. Die Laplace-Transformierte ist (nach Substitution $x = e^t$)

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f)(z) &= \int_0^\infty dt e^{-(1+z)t} (\vartheta(e^t) - e^t) = \int_1^\infty dx x^{-(2+z)} (\vartheta(x) - x) \\ &= \frac{\Phi(z+1) - \frac{1}{z} - 1}{z+1} \end{aligned}$$

für $\operatorname{Re}(z) > 0$. Wir hatten bewiesen (Folgerung 22.11), daß die rechte Seite eine holomorphe Fortsetzung nach $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ hat (nach Verschiebung $z \mapsto z + 1$). In Verbindung mit Theorem 22.12 folgt:

Folgerung 22.13 $\int_1^\infty dx \frac{\vartheta(x)-x}{x^2}$ konvergiert. Das ist nur möglich für $\vartheta(x) \sim x$, was mit Satz 22.7 den Primzahlsatz endgültig beweist.

Beweis. Die Konvergenz des Integrals ist mit Theorem 22.12 gezeigt. Sei $\vartheta(x) = x(1 + r(x))$, wobei $r(x)$ nach Lemma 22.8 beschränkt ist. Somit existieren $\delta_+ = \limsup_{x \rightarrow \infty} r(x)$ und $\delta_- = \liminf_{x \rightarrow \infty} r(x)$. Sollte $r(x)$ nicht gegen 0 konvergieren, so ist zumindest eine der Zahlen δ_\pm von 0 verschieden. Sei $\delta_+ > 0$ und $\epsilon = \frac{1}{2}\delta_+$. Dann gibt es beliebig große x mit $\vartheta(x) \geq (1 + \epsilon)x$. Da ϑ monoton wächst, gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \int_x^{(1+\epsilon)x} dt \frac{\vartheta(t)-t}{t^2} &\leq \int_x^{(1+\epsilon)x} dt \frac{(1+\epsilon)x-t}{t^2} \leq \int_1^{(1+\epsilon)} d\tau \frac{(1+\epsilon)-\tau}{\tau^2} \\ &= (1+\epsilon)\left(1 - \frac{1}{1+\epsilon}\right) - \ln(1+\epsilon) = \epsilon - \ln(1+\epsilon) > 0. \end{aligned}$$

Somit hat $\int_1^R dx \frac{\vartheta(x)-x}{x^2}$, wenn R wächst, immer wieder Abschnitte, in denen das Integral um $\epsilon - \ln(1 + \epsilon) > 0$ wächst, so daß es nicht konvergieren kann, Widerspruch.

Der Beweis für $\delta_- < 0$ und beliebig großen x mit $\vartheta(x) \leq (1 - \epsilon)x$, mit $\epsilon = -\frac{1}{2}\delta_-$, ist analog. Man zeigt $\int_{(1-\epsilon)x}^x dt \frac{\vartheta(t)-t}{t^2} < 0$ für unendlich viele x . \square

Der Primzahlsatz $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ ist nun bewiesen. Der Nachteil dieses (anspruchsvollen, aber im Vergleich zu anderen noch elementaren) Beweises ist, daß wir keinerlei Fehlerabschätzung bekommen. Das erfordert weit größeren Aufwand. Ein Zugang soll kurz skizziert werden. In völliger Analogie zu Satz 22.9 ergibt sich:

Satz 22.14 Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 1$ gilt

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \equiv \sum_n \frac{\Lambda_n}{n^z} = z \int_1^\infty dx \frac{\psi(x)}{x^{z+1}}.$$

Das Integral kann äquivalent auch auf \int_0^∞ ausgedehnt werden. Es ist dann eine sogenannte *Mellin-Transformation*, $\int_0^\infty dx x^{-z-1}\psi(x) =: (\mathcal{M}\psi)(-z)$. Für die Mellin-Transformation gibt es (unter Beschränktheits-Annahmen) eine Umkehrformel, die einen gemittelten Wert von ψ zurückliefert:

$$\frac{1}{2}(\psi(x + \epsilon) + \psi(x - \epsilon)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dz \left(-\frac{\zeta'(z)}{z\zeta(z)} \right) x^z.$$

Dabei ist $s > 1$ beliebig. Man kann nun den Integrationsweg durch einen großen Halbkreis links der Geraden $\operatorname{Re}(z) = s$ schließen und dann durch den Residuensatz ausdrücken. Die Pole sind bei $z = 0$, $z = 1$, sowie sämtlichen Nullstellen von

ζ :

$$\frac{1}{2}(\psi(x + \epsilon) + \psi(x - \epsilon)) = x - \sum_{\zeta(z_0)=0} \frac{x^{z_0}}{z_0} - \ln(2\pi).$$

Dabei ist $\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \ln(2\pi)$, und $x = \frac{x^1}{1}$ entsteht aus dem Pol von $\zeta(z)$ bei $z = 1$. Die Summe läuft über alle Nullstellen der zeta-Funktion. Die trivialen Nullstellen tragen mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{-2n} = \frac{1}{2} \ln(1 - \frac{1}{x^2})$ bei. Die Summe über die nichttrivialen Nullstellen konvergiert aber nicht absolut, und die große Schwierigkeit besteht darin, diese Summe zu kontrollieren.

Unter Annahme der Riemannschen Vermutung kann man beweisen: $|\sum_{\zeta(z_0)=0, \text{Re}(z_0)=\frac{1}{2}} \frac{x^{z_0}}{z_0}| \leq K\sqrt{x}(\ln x)^2$. Mit größerem Aufwand kann man $\pi(x)$ durch $\psi(x)$ ausdrücken, und so findet man (bei Annahme der Riemannschen Vermutung) die Abschätzung

$$|\pi(x) - \text{li}(x)| < \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \ln x \quad \text{für alle } x \geq 2657.$$

Dabei ist $\text{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + \text{li}(2)$ mit $\text{li}(2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\epsilon}^2 \frac{dt}{\ln t} \right) = 1,045163\dots$ der Integrallogarithmus. Er verhält sich asymptotisch wie $\sim \frac{x}{\ln x}$. Für den Bereich, in dem $\pi(x)$ vollständig bekannt ist, gilt immer $\text{li}(n) > \pi(n)$, $n \in \mathbb{N}^\times$. Man weiß aber, daß $\text{li}(n) - \pi(n)$ unendlich oft das Vorzeichen wechselt. Der erste Wechsel ließ sich eingrenzen auf $10^{19} < n < 1.4 \cdot 10^{319}$.