Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 18**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker II

Abgabe: Donnerstag, 19.4.2018 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $f\colon \mathbb{R}_+^\times \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremstellen von f, deren Art (Maximum/Minimum) sowie alle Bereiche, in denen f konvex oder konkav ist.

Aufgabe 2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Beweisen Sie die verallgemeinerte Leibniz-Regel für höhere Ableitungen

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Aufgabe 3. Seien $f, \Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = xy\Phi(x,y) \quad \text{mit} \quad \Phi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\partial_x f(0,x), \quad \partial_y f(y,0), \quad (\partial_x \partial_y f)(0,0), \quad (\partial_y \partial_x f)(0,0).$$

Erhalten Sie einen Widerspruch zum Satz von Schwarz?

Aufgabe 4. (a) Bestimmen Sie das dritte Taylor-Polynom $(T_3 f)(x;0)$ für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\sin x}$.

(b) Sei $f(x) = e^x - \sqrt{1+2x}$ und $g(x) = 1 - \cos x$ für alle $x > -1/2$.

(i) Bestimmen Sie die Taylorpolynome $(T_2 f)(x;0)$ und $(T_2 g)(x;0)$.

(ii) Berechnen Sie $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$.