Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 18**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker II

Abgabe: Mittwoch, 30.5.2018 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 6

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß die Vektoren $b_1 = (2, 3, -1)$, $b_2 = (-4, 5, 0)$ und $b_3 = (6, -2, 2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Durch $F(b_1) = (1, 0)$, $F(b_2) = (0, 1)$, $F(b_3) = (1, -1)$ werde eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert. Bestimmen Sie $\ker(F)$.

(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix der in 1b) definierten linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis (b_1, b_2, b_3) von $\mathbb{R}^3$ und der Basis $(e_1, e_1 - e_2)$ von $\mathbb{R}^2$, wobei $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der Abbildung $F\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $x \mapsto Ax$, bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Bezeichne V_n den komplexen Vektorraum aller Polynome $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ vom Grad kleiner gleich n und Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Wir definieren Abbildungen $D, M\colon V_n \to V_n$ durch

$$D(P) := P' = \frac{\partial}{\partial X} P \qquad \text{und} \qquad (MP)(X) := X\,P(X).$$

Bestimmen Sie für diese Abbildungen jeweils (a) den Kern, (b) das Bild, (c) die Darstellungsmatrix bezüglich der Basis $X^0, \ldots, X^n$.

Aufgabe 4. Bezeichne V den Vektorraum aller komplexen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3. Zeigen Sie, dass dann die Polynome L_0, L_1, L_2, L_3, definiert durch

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

eine Basis $\mathcal{B}$ von V bilden, und berechnen Sie die Darstellungsmatrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D)$ der linearen Abbildung $D\colon V \to V$, $P \mapsto P'$ (vgl. Aufgabe 3) bezüglich dieser Basis.