Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 18**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker II

Abgabe: Donnerstag, 28.6.2018 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 10

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 3 \\ \mathrm{i} & 1 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1+\mathrm{i} & 2 & 1 \\ 1 & -1-4\mathrm{i} & -1-2\mathrm{i} & -6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (a) Für welche $t \in \mathbb{C}$ ist die Matrix A invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t^2 & 1 & t \\ t & 1 & t \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die Determinante der $n \times n$-Matrix B mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. (a) *(Vandermonde-Determinante)* Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ und

$$B(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie per Induktion, daß $\det B(n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

(b) Für $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A(n) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: $\det A(n) = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$.

Aufgabe 4. Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ und sei $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ die $n \times (n+1)$-Matrix mit den Zeilen $a_1, \dots, a_n$. Für $k = 1, \dots, n+1$ sei $A(k)$ die $n \times n$-Matrix, die man erhält, wenn man die k-te Spalte von A streicht. Zeigen Sie, daß für den Vektor

$$b = (b_1 \dots b_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{mit } b_k = (-1)^{k-1} \det A(k)$$

folgende Aussagen gelten:

(a) $b = a_1 \times a_2$ im Fall $n = 2$;

(b) $\langle a_k, b \rangle = \det \begin{pmatrix} a_k \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ für $k = 1, \dots, n$;

(c) b ist orthogonal zu $a_1, \dots, a_n$.