Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wulkenhaar / Dipl.-Math. R. Schmidt

WS 2005/06

10. Übungsblatt zur Vorlesung "Geometrie von Eichtheorien"
(Hauptfaserbündel)

Abgabe der Lösung bis Montag, 9.1.2006, vor Vorlesungsbeginn im Briefkasten 79 des Übungsleiters.

---

34. Aufgabe (8 Punkte)

Komplexes Hopf-Bündel. Die Bündelmannigfaltigkeit ist die $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, realisiert durch $p = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \;,\; |a|^2 + |b|^2 = 1\}$. Es werde eine Wirkung der Gruppe $U(1) \ni \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, auf S^3 definiert durch $\psi_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}(a,b) = (a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})$.

Zeigen Sie, daß die Gruppenwirkung frei ist und daß der Quotientenraum $S^3/U(1)$ isomorph zur Sphäre S^2 ist. Geben Sie einen möglichst einfachen Diffeomorphismus $\phi : S^3/U(1) \to S^2$ explizit an. Hinweis: Stereographische Projektion.

Sei $\{U_N, U_S\}$ die Überdeckung der S^2 durch zwei Karten $U_N = S^2 \backslash \{N\}$ und $U_S = S^2 \backslash \{S\}$, wobei $N = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ der Nordpol und $S = (0,0,-1) \in \mathbb{R}^3$ der Südpol ist. Geben Sie eine Trivialisierung $\chi_N : \pi^{-1}(U_N) \to U_N \times U(1)$ und $\chi_S : \pi^{-1}(U_S) \to U_S \times U(1)$ an und bestimmen Sie den zugehörigen Kozyklus $\rho_{SN} \in U(1)$.

35. Aufgabe (8 Punkte)

Quaternionisches Hopf-Bündel. Die Bündelmannigfaltigkeit ist die $S^7 \subset \mathbb{H}^2$, realisiert durch $p = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{H}^2 \;,\; \|q_1\|^2 + \|q\|^2 = 1\}$. Dabei ist $\mathbb{H}$ die Algebra der Quaternionen, die als 2×2-Matrizen der Form $q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ aufgefaßt werden können. In dieser Darstellung ist $\|q\| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$ durch die Determinante gegeben, und damit ist jedes $q \neq 0$ invertierbar. Die Quaternionen mit $\det q = 1$ bilden eine Gruppe, die nach Aufgabe 13 als $SU(2) = \{q \in \mathbb{H}, \|q\| = 1\}$ identifiziert wird. Die adjungierte Matrix liefert das adjungierte Quaternion $q^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$. Damit gilt $q^*q = qq^* = \|q\|^2 I_{2\times 2}$. Diese Strukturen erlauben die Definition einer Wirkung der Gruppe $u \in SU(2) \subset \mathbb{H}$ auf S^7 durch $\psi_u(q_1, q_2) = (q_1 u, q_2 u)$.

Zeigen Sie, daß die Gruppenwirkung frei ist und daß der Quotientenraum $S^7/SU(2)$ isomorph zur Sphäre S^4 ist. Geben Sie einen möglichst einfachen Diffeomorphismus $\phi : S^7/SU(2) \to S^4$ explizit an.

Sei $\{U_N, U_S\}$ die Überdeckung der S^4 durch zwei Karten $U_N = S^4 \backslash \{N\}$ und $U_S = S^4 \backslash \{S\}$, wobei $N = (0,0,0,0,1) \in \mathbb{R}^5$ der Nordpol und $S = (0,0,0,0,-1) \in \mathbb{R}^5$ der Südpol ist. Geben Sie eine Trivialisierung $\chi_N : \pi^{-1}(U_N) \to U_N \times U(1)$ und $\chi_S : \pi^{-1}(U_S) \to U_S \times U(1)$ an und bestimmen Sie den zugehörigen Kozyklus $\rho_{SN} \in SU(2)$.

36. Aufgabe (4 Punkte)

Die Stiefel-Mannigfaltigkeit $V_k(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge aller k-Tupel von orthonormalen Vektoren im $\mathbb{R}^n$, d.h. $V_k(\mathbb{R}^n) = \{(v_1, \ldots, v_k)\ , v_k \in \mathbb{R}^n\ , \langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}\}$. Die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_k(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge der k-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Sei $\pi : V_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ die Abbildung, die jedem k-Tupel von orthonormalen Vektoren den dadurch aufgespannten Unterraum zuordnet. Beweisen Sie, daß $V_k(\mathbb{R}^n)$ ein Hauptfaserbündel über $G_k(\mathbb{R}^n)$ mit Strukturgruppe $O(k, \mathbb{R})$ wird.

(Es genügt, die Trivialisierung $\pi^{-1}(U) \simeq U \times O(k, \mathbb{R})$ für *eine* Umgebung $U \subset G_k(\mathbb{R}^n)$ zu beschreiben. Das Auffinden einer Überdeckung von $G_k(\mathbb{R}^n)$ mit zugehörigen Kozyklen ist nicht erforderlich.)