Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wulkenhaar / Dipl.-Math. R. Schmidt

WS 2005/06

11. Übungsblatt zur Vorlesung "Geometrie von Eichtheorien"
(Zusammenhänge)

Abgabe der Lösung bis Montag, 16.1.2006, vor Vorlesungsbeginn im Briefkasten 79 des Übungsleiters.

---

37. Aufgabe (3 Punkte)

Sei G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Die Maurer-Cartan-Form ist die (eindeutige) differentielle 1-Form auf G mit Werten in $\mathfrak{g}$, die linksinvariant ist, d.h. $(L_a^*\Theta) = \Theta$, und $\Theta(A) = A$ für alle $A \in \mathfrak{g}$ erfüllt.

Beweisen Sie die Strukturgleichung $(d\Theta)(A,B) + [\Theta(A), \Theta(B)] = 0$ für $A, B \in \mathfrak{g}$.

38. Aufgabe (6 Punkte)

Sei G eine abgeschlossene Untergruppe der $GL(n,\mathbb{R})$ und $g : M \to G$. Wir fassen g als matrixwertige Funktion auf, d.h. $g(x) = \sum_{i,j=1}^n e_{ij} g_{ij}(x)$. Dabei ist $g_{ij} \in C^\infty(M)$ und $\{e_{ij}\}$ eine Basis des Vektorraums $M_n(\mathbb{R})$. Sei Θ die Maurer-Cartan-Form auf G.

Beweisen Sie, daß $(g^*\Theta)_x = g(x)^{-1}(dg)_x$ gilt, mit $(dg)_x = \sum_{i,j=1}^n e_{ij}(dg_{ij})_x$. Schreiben Sie dann (für Matrizengruppen) die Formel für die Eichtransformation der Zusammenhangsform bzw. des lokalen Eichpotentials in eine Form um, die in der Physik üblich ist.

39. Aufgabe (7 Punkte)

Sei P ein Hauptfaserbündel über M mit Strukturgruppe G und seien Abbildungen $\kappa : P \to G$ und $u : P \to G$ gegeben. Sei $\lambda : P \to G$ definiert durch $\lambda(p) = \kappa(p) \cdot u(p) \cdot \kappa(p)^{-1}$. Beweisen Sie, daß für die Maurer-Cartan-Form Θ (die linksinvariante 1-Form auf G mit Werten in $\mathfrak{g}$ und $\Theta(A) = A$ für alle $A \in \mathfrak{g}$) gilt

$$(\lambda^*\Theta)_p = \mathrm{Ad}(\kappa(p))\big(\mathrm{Ad}(u(p)^{-1})\big((\kappa^*\Theta)_p\big)\big) + \mathrm{Ad}(\kappa(p))\big((u^*\Theta)_p\big) - \mathrm{Ad}(\kappa(p))\big((\kappa^*\Theta)_p\big)\ .$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Tangentialabbildung $\lambda'_p X_p \in T_{\lambda(p)}G$ eines Tangentialvektors $X_p \in T_pP$ und schreiben Sie $\lambda'_p X_p = L'_{\lambda(p)} B$ für $B \in \mathfrak{g}$.

b.w.

40. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $(P, M, G, \pi, \psi, \{\chi\})$ ein Hauptfaserbündel, ω eine Zusammenhangsform auf P und Ω dessen Krümmung. Sei $s : U \to \pi^{-1}(U)$ der kanonische Schnitt über $U \subset M$ definiert durch $\kappa(s(x)) = e$ für alle $x \in U$, mit $\kappa = \mathrm{pr}_2 \circ \chi : U \to G$. Seien $\mathcal{A} = s^*\omega$ und $\mathcal{F} = s^*\Omega$ das lokale Eichpotential und der lokale Feldstärketensor.

Drücken Sie mit Hilfe der Strukturgleichung $\Omega_p(X, Y) = (d\omega)_p(X, Y) + [\omega_p(X), \omega_p(Y)]$, für $X, Y \in T_pP$, den lokalen Feldstärketensor durch das lokale Eichpotential aus. Achtung: $s : U \to \pi^{-1}(U)$ ist kein Diffeomorphismus, so daß die formellen Rechenregeln für Zurückziehen von Differentialformen und Transport von Vektorfeldern nicht automatisch gelten!