Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wulkenhaar / Dipl.-Math. R. Schmidt

WS 2005/06

13. Übungsblatt zur Vorlesung "Geometrie von Eichtheorien"
(kovariantes Differential, Yang-Mills-Gleichungen)

Abgabe der Lösung bis Montag, 30.1.2006, vor Vorlesungsbeginn im Briefkasten 79 des Übungsleiters.

---

45. Aufgabe (8 Punkte)

Sei α eine horizontale k-Form auf P mit Werten in $\mathfrak{g}$ vom Typ Ad, d.h. $\alpha_p(Y_1, \dots, Y_k) = 0$ falls ein $Y_i \in T_pP$ vertikal ist und $(\psi_a^*\alpha)_p(Y_1, \dots, Y_k) = \mathrm{Ad}(a^{-1})(\alpha_p(Y_1, \dots, Y_k))$. Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen für das Zurückziehen der kovariante Ableitung $D\alpha$ mittels eines Schnittes $s : M \to P$ die folgende Identität gilt:

$$\begin{aligned}(s^*(D\alpha))_x(X_1, \dots, X_{k+1}) &= (d(s^*\alpha))_x(X_1, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} [(s^*\omega)_x(X_i), (s^*\alpha)_x(X_1, \dots, \overset{i}{\check{}}, \dots, X_{k+1})] ,\end{aligned}$$

für $X_i \in T_xM$. Dabei ω die Zusammenhangsform zum Zusammenhang, der die kovariante Ableitung definiert, und $\overset{i}{\check{}}$ bedeutet Weglassen des i-ten Arguments.

Hinweis: Der horizontale Teil $\mathrm{hor}(Y)$ eines Vektorfeldes Y auf P ist gegeben durch $\mathrm{hor}(Y) = Y - \mathrm{ver}(Y) = Y - \sigma(\omega(Y))$. Außerdem wird $\sigma_p(\omega_p(Y))f = \frac{d}{dt} f \circ \psi_{\exp(t\omega_p(Y))} p\big|_{t=0}$ für $f \in C^\infty(P)$ und $[\sigma(\omega(Y_1)), Y_2] = \mathcal{L}_{\sigma(\omega(Y_1))}(Y_2) = \frac{d}{dt}(\psi_{\exp(-t(\omega(Y_1)))})_*(Y_2)$ für $Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(P)$ verwendet.

46. Aufgabe (3 Punkte)

Durch Zurückziehen der Bianchi-Identität $D\Omega = 0$ auf die Basis-Mannigfaltigkeit entsteht die Identität $s^*(D\Omega) = 0$. Drücken Sie diese Identität durch die lokale Feldstärke und das lokale Eichpotential aus und schreiben Sie die Identität in lokalen Basen $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ des Tangentialraums.

47. Aufgabe (6 Punkte)

Definieren wir für die Differentialform α mit den in Aufgabe 45 gegebenen Zusatzeigenschaften einen Operator D_M durch $D_M(s^*\alpha) := s^*(D\alpha)$, so entsteht mit $\tilde{\alpha} = s^*\alpha$ und

Wahl des kanonischen Schnittes s die Identität

$$\begin{aligned}(D_M\tilde{\alpha})_x(X_1,\dots,X_{k+1}) &= (d\tilde{\alpha})_x(X_1,\dots,X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}[\mathcal{A}_x(X_i),\tilde{\alpha}_x(X_1,\dots,\overset{i}{\check{,}},\dots,X_{k+1})]\ .\end{aligned}$$

Diese Gleichung sehen wir jetzt als Definition des *kovarianten Differentials* D_M von k-Formen $\tilde{\alpha}$ auf M mit Werten in $\mathfrak{g}$ an, unabhängig davon, ob $\tilde{\alpha}$ durch Zurückziehen einer horizontale k-Form α auf P erhalten wurde.

Zeigen Sie durch Rechnung in lokalen Basen, daß $*(D_M(*\mathcal{F})) = 0$ die genau die Yang-Mills-Gleichungen sind, also die Euler-Lagrange-Gleichungen zum Yang-Mills-Wirkungsfunktional.

Bemerkung: Um Übereinstimmung mit den Gleichungen der Vorlesung zu erreichen, ist die Ad-Invarianz des Skalarprodukts zu verwenden. Sei $C \in \mathfrak{g}$ Tangentialvektor an die Kurve $t \mapsto a(t) \in G$, dann ist $\langle \mathrm{Ad}(a(t))A, \mathrm{Ad}(a(t))B\rangle_{\mathfrak{g}}$ unabhängig von t, so daß die Ableitung nach t die Identität $0 = \langle \mathrm{ad}(C)A, B\rangle_{\mathfrak{g}} + \langle A, \mathrm{ad}(C)B\rangle_{\mathfrak{g}} = \langle [C,A], B\rangle_{\mathfrak{g}} + \langle A, [C,B]\rangle_{\mathfrak{g}}$ liefert. Die daraus folgende Beziehung für die Basen $\{b_i\}$ liefert die Verbindung zur Vorlesung.

48. Aufgabe (3 Punkte)

Sei $\mathcal{F}$ die lokale Feldstärke für einen Zusammenhang in einem Hauptfaserbündel über der Basismannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \ni (t,x,y,z)$ mit Strukturgruppe $G = U(1)$. Da die Lie-Algebra von $U(1)$ mit $\mathrm{i}\mathbb{R}$ identifiziert werden kann, schreiben wir $\mathcal{F}_{(t,x,y,z)} = \mathrm{i}E_{(x,y,z)}(t) \wedge dt + \mathrm{i}B_{(x,y,z)}(t)$, wobei $E(t)$ eine 1-Form auf $\mathbb{R}^3$ ("elektrisches Feld") ist und $B(t)$ eine 2-Form auf $\mathbb{R}^3$ ("Magnetfeld") ist. Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 33, daß die Yang-Mills-Gleichungen für den metrischen Tensor $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu=\nu=t \\ -1 & \text{für } \mu=\nu\neq t \\ 0 & \text{für } \mu\neq\nu \end{cases}$ den beiden Maxwellschen Gleichungen entsprechen, in denen ρ und $\vec{j}$ zunächst vorkommen, jedoch jeweils den Wert Null annehmen (Maxwellsche Gleichungen im Vakuum).