Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wulkenhaar / Dipl.-Math. R. Schmidt

WS 2005/06

2. Übungsblatt zur Vorlesung "Geometrie von Eichtheorien"
(Topologische Grundlagen)

Abgabe der Lösung bis Montag, 31.10.2005, vor Vorlesungsbeginn im Briefkasten 79 des Übungsleiters.

---

4. Aufgabe (5 Punkte)

Beweisen Sie, daß der Einheitskreis $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x^2 + y^2 = 1\}$ kompakt ist.

5. Aufgabe (5 Punkte)

Auf dem topologischen Raum $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen wird durch $x \sim y \ \Leftrightarrow\ x - y \in \mathbb{Z}$ (ganze Zahl) eine Äquivalenzrelation definiert. Identifizieren Sie den Raum $\mathbb{R}/\sim$, d.h. finden Sie einen (möglichst einfachen) Homöomorphismus $f : \mathbb{R}/\sim \to Y$ (Bijektivität und Stetigkeit sind zu diskutieren).

In Verallgemeinerung auf den n-dimensionalen Fall wird eine Äquivalenzrelation im $\mathbb{R}^n$ definiert durch $(x_1, x_2, \ldots x_n) \sim (y_1, y_2, \ldots, y_n) \ \Leftrightarrow\ x_i - y_i \in \mathbb{Z}$ für jede Komponente i. Identifizieren Sie den Raum $\mathbb{R}^n/\sim$, wieder durch Angabe eines Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^n/\sim \to Y$ (auf die Diskussion von Bijektivität und Stetigkeit kann verzichtet werden).

6. Aufgabe (5 Punkte)

Auf dem topologischen Raum $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ wird eine Äquivalenzrelation definiert durch $(x_1, x_2, \ldots x_{n+1}) \sim (y_1, y_2, \ldots y_{n+1}) \ \Leftrightarrow\ x_i = \lambda y_i$ mit dem gleichen $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (positive reelle Zahl) für alle i. Identifizieren Sie den Raum $X/\sim$ durch Angabe eines Homöomorphismus $f : X \to Y$.

Was passiert, wenn $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zugelassen wird (ohne weitere Diskussion)?