Westfälische Wilhelms-Universität Münster WS 2005/06
Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wulkenhaar / Dipl.-Math. R. Schmidt

7. Übungsblatt zur Vorlesung "Geometrie von Eichtheorien"
(Lie-Ableitung)

Abgabe der Lösung bis Montag, 5.12.2005, vor Vorlesungsbeginn im Briefkasten 79 des Übungsleiters.

---

23. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $t_p^q \in \Gamma^\infty(T_p^q(M))$ und $t_r^s \in \Gamma^\infty(T_r^s(M))$ Tensorfelder und $x \in M$. Dann ist punktweise ein assoziatives Produkt $(t_p^q \otimes t_r^s)_x = (t_p^q)_x \otimes (t_r^s)_x$ erklärt (Tensorprodukt). Beweisen Sie, daß für die Lie-Ableitung nach einem Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ gilt

$$\mathcal{L}_X(t_p^q \otimes t_r^s) = (\mathcal{L}_X t_p^q) \otimes t_r^s + t_p^q \otimes (\mathcal{L}_X t_r^s) \;.$$

24. Aufgabe (6 Punkte)

Beweisen Sie, daß für ein Kovektorfeld (= differentielle 1-Form) $\alpha \in \Gamma^\infty(T^*M) = \Lambda^1 M$ und Vektorfelder $X, Y \in \Gamma^\infty(TM) = \mathcal{X}(M)$ gilt

$$(\mathcal{L}_X\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\mathcal{L}_X Y) \;.$$

25. Aufgabe (5 Punkte)

Beweisen Sie, daß für Kovektorfelder $\alpha_i \in \Gamma^\infty(T^*M) = \Lambda^1 M$ und Vektorfelder $X, Y_j \in \Gamma^\infty(TM) = \mathcal{X}(M)$ sowie ein Tensorfeld $t_p^q \in \Gamma^\infty(T_p^q(M))$ gilt

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X t_p^q)(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, Y_1, \ldots, Y_q) &= X(t_p^q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, Y_1, \ldots, Y_q)) \\ &\quad - t_p^q(L_X\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, Y_1, \ldots, Y_q) \\ &\quad - t_p^q(\alpha_1, L_X\alpha_2, \ldots, \alpha_p, Y_1, \ldots, Y_q) \\ &\quad - \cdots - t_p^q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, Y_1, \ldots, L_X Y_q) \;.\end{aligned}$$

26. Aufgabe (4 Punkte)

Beweisen Sie die Operatoridentität $\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X,Y]}$ in Anwendung auf Funktionen, Vektorfelder sowie beliebige Tensorfelder.