Westfälische Wilhelms-Universität Münster WS 2005/06
Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wulkenhaar / Dipl.-Math. R. Schmidt

8. Übungsblatt zur Vorlesung "Geometrie von Eichtheorien"

(Adjungierte Darstellung, Differentialformen)

Abgabe der Lösung bis Montag, 12.12.2005, vor Vorlesungsbeginn im Briefkasten 79 des Übungsleiters.

---

27. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe G. Beweisen Sie die Identität

$$\mathrm{Ad}(\exp(A))B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}(A))^k B \equiv \exp(\mathrm{ad}(A))B$$

für $B \in \mathfrak{g}$ und $A \in V \subset \mathfrak{g}$, wobei V eine hinreichend kleine Umgebung von $0 \in \mathfrak{g}$ ist. Hinweis: Eine Möglichkeit besteht darin, die linke Seite auf eine reell analytische Funktion f anzuwenden und $f(g\exp(A)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A^k f)(g)$ zu verwenden, mit $g \in G$.

28. Aufgabe (5 Punkte)

Das innere Produkt zwischen einem Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ und einer differentiellen k-Form $\alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^k M)$, $k \geq 1$, ist eine differentielle $(k-1)$-Form definiert durch

$$(i_X\alpha)(Y_1, \dots, Y_{k-1}) := \alpha(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}) ,$$

für $Y_i \in \mathcal{X}(M)$. Sei $\mathcal{L}_X$ die Lie-Ableitung nach dem Vektorfeld X.
Beweisen Sie, daß $i_{[X,Y]}\alpha = \mathcal{L}_X(i_Y\alpha) - i_Y(\mathcal{L}_X\alpha)$.

29. Aufgabe (7 Punkte)

Seien $Y \in \mathcal{X}(N)$ ein Vektorfeld und $\alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^k N)$ eine differentielle k-Form auf N und $\phi : M \to N$ ein Diffeomorphismus zwischen Mannigfaltigkeiten. Beweisen Sie, daß für Lie-Ableitung und inneres Produkt gilt

$$\phi^*(\mathcal{L}_Y\alpha) = \mathcal{L}_{\phi_*^{-1}Y}(\phi^*\alpha) \in \Gamma^\infty(\Lambda^k M) ,$$
$$\phi^*(i_Y\alpha) = i_{\phi_*^{-1}Y}(\phi^*\alpha) \in \Gamma^\infty(\Lambda^{k-1} M) .$$