Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wulkenhaar / Dipl.-Math. R. Schmidt WS 2005/06

9. Übungsblatt zur Vorlesung "Geometrie von Eichtheorien"
(Differentialformen)

Abgabe der Lösung bis Montag, 19.12.2005, vor Vorlesungsbeginn im Briefkasten 79 des Übungsleiters.

---

30. Aufgabe (5 Punkte)

Beweisen Sie (in Anwendung auf Differentialformen $\alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^k M)$) die Cartan-Formel

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X \ ,$$

wobei d das äußere Differential ist, $\mathcal{L}_X$ die Lie-Ableitung nach dem Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ ist und i_X das innere Produkt ist. Hinweis: Die Lie-Ableitung von Differentialformen ist ein Spezialfall von Aufgabe 25.

31. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^k N)$ eine differentielle k-Form auf N und $\phi : M \to N$ ein Diffeomorphismus zwischen Mannigfaltigkeiten. Seien d_M und d_N die äußeren Differentiale auf $\Gamma^\infty(\Lambda^k M)$ bzw. $\Gamma^\infty(\Lambda^k N)$ Beweisen Sie die Identität

$$\phi^*(d_N \alpha) = d_M(\phi^* \alpha)$$

32. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $M = \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\alpha = \alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz \in \Gamma^\infty(\Lambda^1\mathbb{R}^3)$, $\beta = \beta_x dy \wedge dz + \beta_y dz \wedge dx + \beta_z dx \wedge dy \in \Gamma^\infty(\Lambda^2\mathbb{R}^3)$ sowie $\gamma = \gamma^* dx \wedge dy \wedge dz \in \Gamma^\infty(\Lambda^3\mathbb{R}^3)$, mit $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z, \gamma^* \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dadurch werde die 1-Form α mit einem Vektor $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) \in (C^\infty(\mathbb{R}^3))^3$ und die 2-Form β mit einem Vektor $(\beta_x, \beta_y, \beta_z) \in (C^\infty(\mathbb{R}^3))^3$ identifiziert sowie γ mit der Funktion γ^*.

Bestimmen sie die Vektoren, die mit $df \in \Gamma^\infty(\Lambda^1\mathbb{R}^3)$ und $d\alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^2\mathbb{R}^3)$ identifiziert werden sowie die Funktion, die mit $d\beta \in \Gamma^\infty(\Lambda^3\mathbb{R}^3)$ identifiziert wird.

Bestimmen Sie die Funktion, die mit $\alpha \wedge \beta \in \Gamma^\infty(\Lambda^3\mathbb{R}^3)$ identifiziert wird. Sei eine weitere 1-Form $\delta \in \Gamma^\infty(\Lambda^1\mathbb{R}^3)$ mit dem Vektor $(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$ identifiziert. Bestimmen Sie den Vektor, der mit der 2-Form $\alpha \wedge \delta$ identifiziert wird.

b.w.

33. Aufgabe (3 Punkte)

Die Maxwellschen Gleichungen lauten

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad\qquad \mathrm{div}\vec{D} = \rho$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \qquad\qquad \mathrm{rot}\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}$$

Dabei ist $\mathrm{div}(A_x, A_y, A_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ die Divergenz eines Vektorfeldes und $\mathrm{rot}(A_x, A_y, A_z) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$ die Rotation eines Vektorfeldes.

Schreiben Sie unter Verwendung von Aufgabe 32 das System der Maxwellschen Gleichungen in der Sprache der Differentialformen, d.h. finden Sie Differentialformen, die den Vektoren $\vec{E}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{j} \in (C^\infty(\mathbb{R}^3))^3$ und der Funktion $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ entsprechen und drücken Sie die Operationen rot und div durch äußere Differentiale aus, so daß Gleichungen in $\Gamma^\infty(\Lambda^k\mathbb{R}^3)$ entstehen.