

# 1 Einführung

## 1.1 Fundamentale Wechselwirkungen der Physik

Gegenwärtiger Stand der Experimente: Es gibt vier fundamentale Wechselwirkungen (elektromagnetische, schwache, starke, gravitative)

- quantenphysikalische Beschreibung
- klassische Feldtheorie:  $\rightarrow$  ist Geometrie!

### 1.1.1 Gravitation

Gravitationsfeld = metrischer Tensor einer (pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeit:

- infinitesimaler Abstand  $ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  (Pythagoras in beliebigen Koordinaten)
- daraus Kurvenlänge, Abstand als Länge der kürzesten Kurve (Geodäte)
- kürzeste Kurve soll auch "geradeste" Kurve sein: definiert Paralleltransport
- $g_{\mu\nu}$  bestimmt aus Einsteinschen Feldgleichungen zu gegebener Materieverteilung

- für "schwache" Felder:  $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM}{rc^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Sonne:  $\frac{2GM}{rc^2} \approx 4 \cdot 10^{-6}$

### 1.1.2 Elektrodynamik

Maxwellsche Gleichungen:

- 4 "Vektoren" im  $\mathbb{R}^3$ :  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{H}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{D}(\vec{r}, t)$
- Quellen: Ladungsdichte  $\rho(\vec{r}, t)$ , Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}, t)$
- 8 gekoppelte lineare partielle Differentialgleichungen, 6 Materialgleichungen

$$\begin{array}{lll} \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \operatorname{div} \vec{D} = \rho & \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} & \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} & \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \end{array}$$

Dieses System ist unter geeigneten Randbedingungen zu lösen

Vereinfachung in Spezieller Relativitätstheorie (Raum + Zeit  $\rightarrow$  vierdimensionale Raum-Zeit,  $x^\mu = (t, \vec{r})$ ):

$\vec{E}$  und  $\vec{B}$  werden zu Feldstärketensor mit Komponenten  $F_{\mu\nu}$  zusammengefaßt,  $\rho$  und  $\vec{j}$  zum Viererstrom mit Komponenten  $j_\mu$ , mit  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

- Maxwell'sche Gleichungen:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad \sum_{\mu,\rho=0}^3 g^{\mu\rho} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} = j_\nu$$

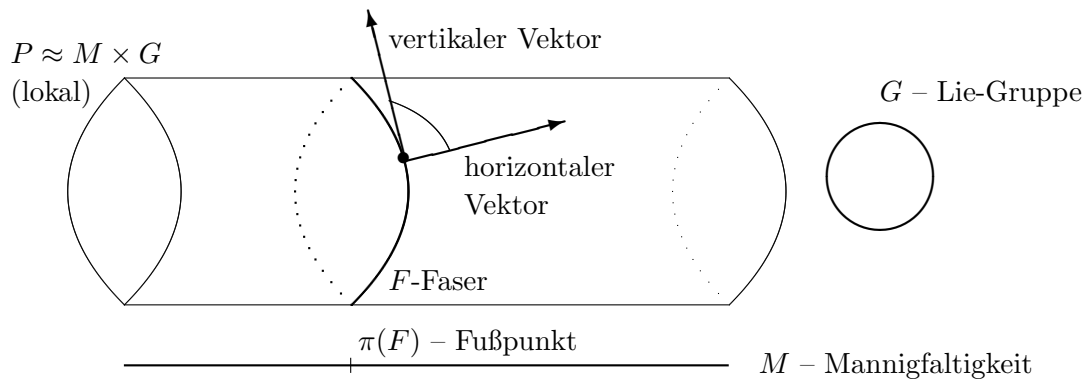
erste Gleichung identisch erfüllt durch  $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ , wobei  $A_\mu$  das Eichpotential ist

mathematische Beschreibung:  $\vec{E}, \vec{B}$  sind keine Vektoren,  $F_{\mu\nu}$  sind nicht Komponenten eines Tensors! Es sind *geometrische Objekte*, um die es in der Vorlesung gehen wird

### 1.1.3 Differentialgeometrische Beschreibung

$A_\mu$  sind Komponenten einer *Zusammenhangsform* in einem  $U(1)$ -Hauptfaserbündel  $P$

$F_{\mu\nu}$  sind Komponenten der Krümmungsform des Zusammenhangs



- vertikaler Vektor ist natürlich gegeben als Tangentialvektor an Faser
- Horizontalität ist geometrische Zusatzstruktur, ein sogenannter Zusammenhang, dieser wird durch die Zusammenhangsform (mit Komponenten  $A_\mu$ ) definiert
- Horizontale Wege definieren Paralleltransport. Krümmung der Horizontalität entspricht Kräften, die wir als Elektromagnetismus wahrnehmen

### 1.1.4 Verallgemeinerung

auf nichtabelsche Symmetriegruppen ("Yang-Mills-Theorie")

- Aus phänomenologischer Sicht:  $G = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$   
 $\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$   
 stark      schwach      Hyperladung

- nichtabelsche Anteile (d.h.  $SU(2), SU(3)$ ) in der Natur nicht direkt (als klassische Feldtheorie) beobachtbar (kurze Reichweite)
- Erklärung:
  1. Massenterm für  $SU(2)$ -Eichfelder über *Higgs-Mechanismus* (läßt sich geometrisch verstehen, siehe Vorlesung, aber besser in *nichtkommutativer Geometrie*)
  2. Confinement für  $SU(3)$ -Eichfelder (bisher nicht verstanden!  $\rightarrow 10^6$  \$)

*In der Natur werden nur solche Modelle beobachtet, die eine einfache geometrische Bedeutung haben.*

## 1.2 Inhalt der Vorlesung

- Topologische Räume, topologische Mannigfaltigkeit, Differenzierbarkeit, differenzierbare Mannigfaltigkeit (gutartige Räume)
- Tangentialraum, Vektorfelder, Tensoren, Differentialformen (Differential- und Integralrechnung auf Mannigfaltigkeiten)
- Lie-Gruppen, Lie-Algebren (Symmetrien)
- Hauptfaserbündel, Zusammenhang, Krümmung, assoziierte Vektorbündel, kovariante Ableitung
- Physikalische Modelle: Yang-Mills-Theorie, Materiefelder, Higgs-Mechanismus
- Riemannsche Mannigfaltigkeiten, Gravitationstheorie
- Spin-Struktur, Dirac-Operatoren, Standardmodell

## 1.3 Literatur

- Nakahara: "Geometry, Topology and Physics"
- Marathe, Martucci: "The Mathematical Foundations of Gauge Theories"
- Choquet-Bruhat, Dewitt-Morette: "Analysis, Manifolds and Physics: Part I+II"
- Kobayashi, Nomizu: "Foundations of Differential Geometry, Vol. 1"
- Naber: "Topology, Geometry and Gauge fields: Foundations"
- Gökeler, Schücker: "Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity"
- Dubrovin, Novikov, Fomenko: "Modern Geometry - Methods and Applications : Part I-III"

## 2 Mannigfaltigkeiten

### 2.1 Topologische Räume

#### 2.1.1 Grundlegende Definition

**Definition 1** Ein *topologischer Raum*  $(X, \mathcal{T})$  ist eine Menge  $X$  zusammen mit einer Familie  $\mathcal{T}$  von Teilmengen  $\mathcal{O}_i \subset X$ , die die folgenden Axiome erfüllen:

- Die leere Menge  $\emptyset$  und die Grundmenge  $X$  sind in  $\mathcal{T}$ :  $X, \emptyset \in \mathcal{T}$ .
- Der Durchschnitt endlich vieler Teilmengen  $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$  ist wieder in  $\mathcal{T}$ :  $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$ .
- Die Vereinigung beliebig vieler Teilmengen  $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$  ist wieder in  $\mathcal{T}$ :  $\bigcup_i \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$ .

Die Familie  $\mathcal{T}$  heißt die *Topologie* auf  $X$ . Die Mengen  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$  heißen *offene Mengen* und ihre Komplemente  $X \setminus \mathcal{O}$  heißen *abgeschlossene Mengen*. Die Elemente von  $X$  heißen *Punkte*.

$X$  und  $\emptyset$  sind offen und abgeschlossen.

**Definition 2** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $x \in X$  ein Punkt des Raumes. Eine offene Umgebung  $U$  von  $x$  ist eine offene Teilmenge, die  $x$  enthält. Eine Umgebung von  $x$  ist eine Teilmenge, die eine offene Umgebung von  $x$  als Teilmenge besitzt.

**Definition 3** Eine Familie  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  offener Untermengen von  $X$  heißt *Basis des topologischen Raumes*, falls jede offene Menge  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$  als Vereinigung von (möglicherweise unendlich vielen) Elementen aus  $\mathcal{B}$  dargestellt werden kann.

Interessant sind abzählbare Basen, die also nur aus abzählbar vielen Elementen bestehen.

#### 2.1.2 Beispiel: Metrischer Raum

Meist ist es einfacher, eine Basis anzugeben und dann die Topologie aus der Basis heraus zu erzeugen.

**Definition 4** Ein *metrischer Raum*  $(X, d)$  ist eine Menge  $X$  zusammen mit einer Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , der *Metrik*, die für beliebige Elemente  $x, y, z \in X$  die folgenden Axiome erfüllt:

1.  $d(x, y) \geq 0$ ,  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
3.  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  (Dreiecksungleichung)

Es gibt (für die Physik wichtige) Verallgemeinerungen, die imaginäre Abstände  $(d(x, y))^2 < 0$  zulassen.

Sei  $U_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$  die  $\epsilon$ -Umgebung von  $x \in X$  (oder auch die offene Kugel um  $x$  mit Radius  $\epsilon$ ).

**Definition 5** Eine Teilmenge  $\mathcal{O} \subset X$  heißt offen in  $(X, d)$ , falls für jedes  $x \in \mathcal{O}$  eine  $\epsilon$ -Umgebung  $U_\epsilon(x)$  existiert, so daß  $U_\epsilon(x) \subset \mathcal{O}$ .

**Satz 1** Die so gewonnene Familie offener Teilmengen  $\mathcal{T}$  macht  $X$  zu einem topologischen Raum  $(X, \mathcal{T})$ .

*Beweis:* Übungsaufgabe 1

Die Menge  $\mathbb{R}^1$  die reellen Zahlen wird mit  $d(x, y) := |x - y|$  zu einem metrischen und damit zu einem topologischen Raum. Die  $\epsilon$ -Umgebungen  $U_\epsilon(x)$  sind die offenen Intervalle  $(a, b)$  mit  $x = (a + b)/2$  und  $\epsilon = |b - a|/2$ .

Die offenen Intervalle bilden eine Basis der Topologie. Die offenen Intervalle  $(a, b)$  mit rationalen Endpunkten  $a, b \in \mathbb{Q}$  bilden eine abzählbare Basis der Topologie.

### 2.1.3 Abbildungen von topologischen Räumen

**Definition 6** Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt

- *injektiv:*  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- *surjektiv:*  $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
- *bijektiv:*  $f$  ist injektiv und surjektiv
- *stetig in  $x_0$ :* Für jede offene Umgebung  $U$  von  $f(x_0)$  ist das Urbild  $f^{-1}(U)$  offen in  $X$ .
- *Homöomorphismus:*  $f$  ist bijektiv und  $f, f^{-1}$  sind in jedem Punkt stetig.

### 2.1.4 Äquivalenzrelationen

**Definition 7** Eine Äquivalenzrelation  $\sim$  ist eine Beziehung zwischen Objekten mit folgenden Eigenschaften:

- $x \sim x$  (reflexiv)
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$  (symmetrisch)
- $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$  (transitiv)

Sei  $(X, \sim)$  eine Menge mit einer Äquivalenzrelation zwischen den Punkten. Dann schreiben wir  $[x] := \{y \in X, x \sim y\}$  für die Äquivalenzklasse und  $X/\sim := \{[x], x \in X\}$  für den Quotientenraum. Ein Element  $y \in X$  mit  $y \sim x$  heißt Repräsentant der Äquivalenzklasse  $[x] = [y]$ .

Äquivalenzklassen werden uns oft begegnen. Die Strategie ist meist, eine Konstruktion zunächst für einen Repräsentanten durchzuführen und dann zu zeigen, daß sie wohldefiniert (unabhängig von der Wahl des Repräsentanten) ist.

### 2.1.5 Erzeugung von topologischen Räumen

*Produkt-Topologie.* Seien  $(X_i, \mathcal{T}_i)$  topologische Räume und  $X = \prod_i X_i$  das kartesische Produkt. Für jedes  $i$  gibt es eine kanonische Projektion  $\pi_i : X \rightarrow X_i$ .

Dann wird eine Basis der Topologie auf  $X$  definiert als  $\left\{ \bigcap_{j=1}^n \pi_j^{-1}(U_j), U_j \in \mathcal{T}_j \right\}$

Offenbar bilden die offenen Hyperquader  $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$  mit  $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$  eine abzählbare Basis der Produkt-Topologie des  $\mathbb{R}^n$ .

**Satz 2** Die Produkt-Topologie auf dem  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \cdots \times \mathbb{R}^1$  ist identisch mit der metrischen Topologie des  $(\mathbb{R}^n, d)$

*Beweis:* Übungsaufgaben 2+3 für einen analogen Fall.

*Unterraum-Topologie.* Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $Y \subset X$  eine Teilmenge. Dann ist die Unterraum-Topologie  $\mathcal{S}$  auf  $Y$  definiert als  $\mathcal{S} = \{U \cap Y, U \in \mathcal{T}\}$ .

Beispiel: Topologie auf der  $n$ -Sphäre  $S^n$  als Durchschnitt offener Mengen im  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1\}$ .

*Quotientenraum-Topologie.* Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Durch  $\pi(x) := [x]$  wird eine kanonische surjektive Abbildung  $\pi : X \rightarrow X/\sim$ , die kanonische Projektion, definiert. Dann wird die Quotientenraum-Topologie  $\mathcal{S}$  auf  $X/\sim$  definiert durch  $U \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ .

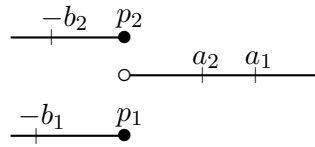
### 2.1.6 Trennung von Punkten

**Definition 8** Ein *Hausdorff-Raum* ist ein topologischer Raum  $X$ , in dem das folgende Trennungssaxiom gilt:

- Für alle  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  existieren disjunkte offene Umgebungen  $U(x)$  und  $V(y)$ .

Trennungssaxiom: Zwei verschiedene Punkte  $x, y \in X$  sollen auch durch Umgebungen getrennt werden. Es gibt verschiedene Stärken der Trennung, die uns hier aber nicht interessieren.

### Beispiel 1



z.B.  $\mathcal{O}_1 = (-b_1, 0] \cup (0, a_1)$   
 $\mathcal{O}_2 = (-b_2, 0] \cup (0, a_2)$

Alle offenen Mengen, die  $p_1$  und  $p_2$  enthalten, enthalten ein gemeinsames Intervall.

### 2.1.7 Kompaktheit

**Definition 9** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Dabei bedeutet:

- offene Überdeckung von  $X$ : eine Familie  $\{U_i\}_{i \in I}$  von offenen Mengen, deren Vereinigung  $X$  ist:  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$
- Teilüberdeckung: eine Auswahl  $\{U_j\}_{j \in J}$ , deren Vereinigung immer noch  $X$  ist

**Definition 10** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *parakompakt*, falls jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung besitzt.

Dabei bedeutet:

- Verfeinerung: eine neue Überdeckung  $\{V_j\}_{j \in J}$ , wobei jede Menge  $V_j$  in mindestens einer Menge  $U_i$  der alten Überdeckung enthalten sein muß
- lokal endlich: zu jedem  $x \in X$  gibt es eine Umgebung, die nur endlich viele Mengen  $V_j$  schneidet.

Es gibt weitere Arten von Kompaktheit, die uns hier nicht interessieren.

**Beispiel 2** Überdeckung von  $\mathbb{R}^1$  mit offenen Intervallen

- $(n - \frac{1}{4}, n + \frac{5}{4}), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \rightarrow$  Lücke  $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$
- $(\frac{1}{8} - \frac{1}{8m}, 1 - \frac{1}{8m}), \quad m \in \mathbb{Z}^+$

Es kann keine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden  $\Rightarrow \mathbb{R}^1$  ist nichtkompakt. Die Überdeckung selbst ist nicht lokal endlich, da jede Umgebung von  $\frac{1}{2}$  unendlich viele Teilmengen schneidet. Es kann aber die Teilüberdeckung mit  $m = 1$  ausgewählt werden, die auch zur Überdeckung ausreicht und lokal endlich ist.

### 2.1.8 Topologische Mannigfaltigkeit

**Definition 11** Eine *topologische Mannigfaltigkeit*  $M$  ist ein parakompakter Hausdorff-Raum mit einer abzählbaren Basis, der lokal einem  $\mathbb{R}^n$  homöomorph ist, d.h. für alle  $x \in M$  existiert eine Umgebung  $U$  und ein Homöomorphismus  $\kappa : U \mapsto \kappa(U) \subset \mathbb{R}^n$ . Das Paar  $(U, \kappa)$  heißt lokale Karte.

Das sind die minimalsten Voraussetzungen für eine sinnvolle Geometrie. Die Voraussetzungen sind eigentlich immer erfüllt und es ist viel schwieriger Gegenbeispiele zu finden (die dann sehr pathologisch sind).

Auf parakompakten Hausdorff-Räumen existiert die Zerlegung der Eins:

**Satz 3** Sei  $X$  ein parakompakter Hausdorff-Raum mit gegebener offener Überdeckung  $\{U_i\}$ . Dann existiert eine Familie stetiger Funktionen  $f_i : X \rightarrow [0, 1]$  mit folgenden Eigenschaften:

- Für jede dieser Funktionen existiert eine offene Umgebung aus der Überdeckung, so daß  $f_i(x) = 0 \forall x \in X \setminus U_i$
- Jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine Umgebung  $V$ , so daß es nur endlich viele Funktionen  $f_j$  gibt, die auf  $V$  nicht identisch verschwinden, und  $\sum_j f_j(y) = 1 \forall y \in V$ .

Über die Zerlegung der Eins werden lokal (in jeder Karte) definierte Objekte zu globalen (auf der ganzen topologischen Mannigfaltigkeit definierten) Objekten zusammengeklebt.

Wir benötigen aber noch Differenzierbarkeit!

## 2.2 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

**Definition 12** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  offene Untermengen. Eine Abbildung  $f : U \rightarrow V$  heißt *differenzierbar* in  $x \in U$ , falls eine stetige lineare Abbildung  $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  existiert, so daß

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)(h) + r(x,h) \quad \text{und} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(x,h)\|}{\|h\|} = 0, \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

Die Abbildung  $f'(x)$  heißt *Differential* von  $f$  in  $x$  im Sinne von Fréchet. Die Abbildung  $f : U \rightarrow V$  heißt *differenzierbar auf  $U$* , wenn sie in jedem Punkt  $x \in U$  differenzierbar ist.

Die Definition verallgemeinert sich auf Abbildungen zwischen Banach-Räumen (vollständigen normierten Räumen).

**Satz 4** Falls das Differential  $f'$  existiert, dann ist es eindeutig.

**Definition 13** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  offene Untermengen. Die Abbildung  $f : U \rightarrow V$  hat im Punkt  $x \in U$  eine Ableitung in Richtung des Vektors  $e \in \mathbb{R}^n$ , falls der Grenzwert

$$(\nabla_e f)(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+te) - f(x)}{t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

existiert. Der Grenzwert  $(\nabla_e f)(x)$  heißt *Richtungsableitung*.



**Satz 5** Falls  $f$  in  $x$  differenzierbar, dann existieren alle Richtungsableitungen und es gilt  $(\nabla_e f)(x) = f'(x)(e)$ .

Seien  $(e_1, \dots, e_n)$  die kanonischen Basen im  $\mathbb{R}^n$ , dann schreiben wir  $(\nabla_{e_j} f)(x) \equiv (\partial_j f)(x)$ .

**Definition 14** Sei  $\mathbb{R} \supset (a, b) \ni t \mapsto x(t) \subset \mathbb{R}^n$  eine Kurve im  $\mathbb{R}^n$ . Das Differential  $x'(t_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *Tangentialvektor* an die Kurve  $x(t)$  im Punkt  $x(t_0)$ .

**Satz 6 (Komposition von Abbildungen)** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  und  $W \subset \mathbb{R}^k$  offene Teilmengen und  $g : U \rightarrow V$  und  $f : V \rightarrow W$  differenzierbar, dann ist die Abbildung  $f \circ g : U \rightarrow W$  differenzierbar, und es gilt

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \circ g'(x)$$

*Beweis:* Übungen.

Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume und  $f : X \times Y \rightarrow Z$  eine Abbildung. Dann wird

- für festes  $x \in X$  eine Abbildung  $f_x : Y \rightarrow Z$  definiert durch  $f_x(y) = f(x, y)$ ,
- für festes  $y \in Y$  eine Abbildung  $f_y : X \rightarrow Z$  definiert durch  $f_y(x) = f(x, y)$ .

**Satz 7 (von der impliziten Funktion)** Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^k$  offene Teilmengen,  $F : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenzierbar, und in einem Punkt  $(x_0, y_0) \in U \times V$  gelte  $F(x_0, y_0) = 0$ . Wenn das Differential  $F'_{x_0}(y_0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ , aufgefaßt als Matrix, invertierbar ist, dann existieren offene Umgebungen  $U_0 \subset U$  von  $x_0$  und  $V_0 \subset V$  von  $y_0$  sowie eine eindeutige differenzierbare Abbildung  $g : U_0 \rightarrow V_0$ , so daß  $F(x, g(x)) = 0$  für alle  $x \in U_0$ . Es gilt  $g'(x) = -(F'_x(g(x)))^{-1} \circ F'_{g(x)}(x)$ .

**Korollar 1** Sei  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  differenzierbar und  $f'(y_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  im Punkt  $y_0 \in V$  invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen  $V_0 \subset V$  von  $y_0$  und  $U_0$  von  $f(y_0)$  und eine eindeutige inverse Abbildung  $f^{-1} : U_0 \rightarrow V_0$ . Die inverse Abbildung ist differenzierbar, und es gilt  $(f^{-1})'(x) = (f'(f^{-1}(x)))^{-1}$  für alle  $x \in U_0$ .

*Beweis:* Setze  $F(x, y) = x - f(y)$  mit  $F(x_0, y_0) = 0$ .

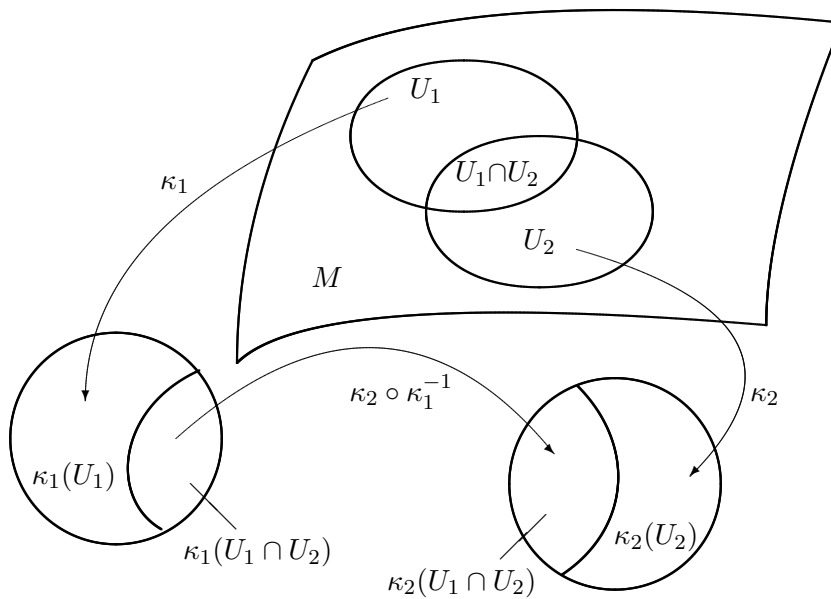
## 2.3 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

**Definition 15** Ein Atlas  $\mathcal{A}^k$  der Klasse  $C^k$  einer topologischen Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Kollektion lokaler Karten  $\{(U_\alpha, \kappa_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  mit

- $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ ,  $\kappa_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind Homöomorphismen
- die Karten sind miteinander verträglich, d.h.  $\forall (U_\alpha, \kappa_\alpha), (U_\beta, \kappa_\beta)$  mit  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  ist die Abbildung

$$\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \supset \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \kappa_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$$

differenzierbar der Klasse  $C^k$ . Diese Abbildung heißt Kartenwechsel.



**Definition 16** Eine Karte  $(U, \kappa)$  heißt verträglich mit einem Atlas  $\mathcal{A}^k$ , wenn  $\mathcal{A}^k \cup (U, \kappa)$  wieder ein Atlas der Klasse  $C^k$  ist. Zwei Atlanten  $\mathcal{A}_1^k, \mathcal{A}_2^k$  heißen verträglich, wenn  $\mathcal{A}_1^k \cup \mathcal{A}_2^k$  wieder ein Atlas der Klasse  $C^k$  ist.

**Satz 8** Verträglichkeit von Atlanten ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: HA

**Definition 17** Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse  $C^k$  ist eine topologische Mannigfaltigkeit  $M$  zusammen mit einer Äquivalenzklasse  $[\mathcal{A}^k]$  von Atlanten der Klasse  $C^k$  auf  $M$ . Die Äquivalenzklasse  $[\mathcal{A}^k]$  heißt differenzierbare Struktur auf  $M$ .

**Bemerkung 1** Ein  $C^1$ -Atlas  $\mathcal{A}^1$  auf  $M$  kann zu einem  $C^k$ -Atlas  $\mathcal{A}^k$  verfeinert werden, so daß  $\mathcal{A}^k$  und  $\mathcal{A}^1$  als  $C^1$ -Atlanten äquivalent sind. Dabei kann  $k = \infty$  (glatt = beliebig oft differenzierbar) und sogar  $k = \omega$  (reell-analytisch) sein, und

alle möglichen Verfeinerungen ergeben dieselbe glatte bzw. reell-analytische Mannigfaltigkeit. Es gibt aber topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension  $\geq 4$ , die keine differenzierbare Struktur erlauben und es gibt nichtäquivalente differenzierbare Mannigfaltigkeiten, die als topologische Mannigfaltigkeiten homöomorph sind.

**Definition 18** Eine Mannigfaltigkeit  $M$  heißt orientierbar, falls ein Atlas von  $M$  existiert, so daß für beliebige Karten  $(U_\alpha, \kappa_\alpha)$  und  $(U_\beta, \kappa_\beta)$  mit  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  das Differential des Kartenwechsels positiv ist, d.h.  $\det((\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1})'(y)) > 0$  für alle  $y \in \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ .

### 2.3.1 Abbildungen von Mannigfaltigkeiten

**Definition 19** Seien  $M, N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimensionen  $m, n$ . Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt differenzierbar, wenn für jedes Paar von Karten  $(U, \kappa), (V, \rho)$  mit  $f(U) \subset V$  der lokale Repräsentant

$$f_{\rho, \kappa} := \rho \circ f|_U \circ \kappa^{-1} : \mathbb{R}^m \supset \kappa(U) \rightarrow \rho(V) \subset \mathbb{R}^n$$

differenzierbar ist.

Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt *Diffeomorphismus*, falls  $f$  ein Homöomorphismus ist und  $f, f^{-1}$  differenzierbar sind. Die Mannigfaltigkeiten  $M, N$  heißen diffeomorph, falls es einen Diffeomorphismus  $f : M \rightarrow N$  gibt.

**Definition 20** Seien  $M, N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine differenzierbare Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt *Immersion* (bzw. *Submersion*), wenn für jeden Punkt  $x \in M$  eine Karte  $(U, \kappa)$  von  $M$  mit  $x \in U$  und eine Karte  $(V, \rho)$  von  $N$  mit  $f(U) \subset V$  existieren, so daß das Differential  $f'_{\rho, \kappa}$  der Abbildung  $f_{\rho, \kappa} = \rho \circ f \circ \kappa^{-1} : \kappa(U) \rightarrow \rho(V)$  injektiv (bzw. surjektiv) ist. Eine *Einbettung*  $f : M \rightarrow N$  ist eine injektive Immersion, die  $M$  homöomorph auf  $N$  abbildet.

### 2.3.2 Beispiele für Mannigfaltigkeiten

1.  $M = \mathbb{R}^n$
2.  $S^n$  mit stereographischer Projektion (Übung)
3.  $M_1, M_2 \rightarrow M_1 \times M_2$ , z.B.  $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n$
4. Untermannigfaltigkeiten im  $\mathbb{R}^n$  durch Niveau-Fläche  $f^{-1}(0)$
5. Lie-Gruppen

## 2.4 Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$

**Definition 21** Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  heißt differenzierbare  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn für jeden Punkt  $x_0 \in M$  eine offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$  von  $x_0$  und eine differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  existieren, so daß

- $U \cap M = f^{-1}(0)$
- für alle  $x \in U$  mit  $f(x) = 0$  hat das Differential  $f'(x) : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , aufgefaßt als Matrix, den maximalen Rang  $k$ .

In diesen Bezeichnungen ist  $k$  die Kodimension der Untermannigfaltigkeit. Untermannigfaltigkeiten der Kodimension  $k = 1$  heißen Hyperflächen.

**Beispiel 3**  $S^n$  als Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^{n+1} \ni x = (x_1, \dots, x_{n+1})$  mittels  $f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1$ . Wir wählen  $U = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Dann ist  $f'(x) = 2(x_1, \dots, x_{n+1})$  mit  $\text{rg}(f'(x)) = 1$ .

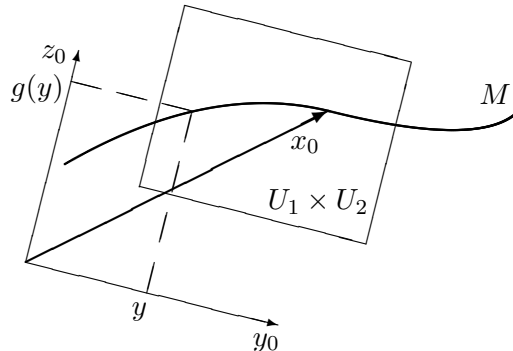
**Satz 9** Eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M$  im  $\mathbb{R}^{n+k}$  ist eine Mannigfaltigkeit im abstrakten Sinn, d.h. für jeden Punkt  $x \in M$  existiert eine Umgebung  $V$  und ein Homöomorphismus  $\kappa : V \rightarrow \kappa(V) \subset \mathbb{R}^n$ , so daß die Kartenwechsel Diffeomorphismen sind.

Der Beweis wird in mehreren Teilschritten geführt.

**Lemma 1 (angepaßte Koordinaten)** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Dann gibt es zu jedem  $x_0 \in M$  eine Zerlegung  $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  mit offenen Mengen  $U_1 \subset \mathbb{R}^n$  und  $U_2 \subset \mathbb{R}^k$  sowie eine differenzierbare Abbildung  $g : U_1 \rightarrow U_2$ , so daß  $M \cap (U_1 \times U_2) = \{(y, g(y)) , y \in U_1\}$ .

*Beweis:* Sei  $f$  die die Untermannigfaltigkeit  $M$  definierende differenzierbare Abbildung und  $x_0 \in M$ . Da  $f'(x_0)$  maximalen Rang hat, ist  $\ker f'(x_0)$  ein  $n$ -dimensionaler Unterraum  $T_{x_0} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ . Sei  $N_{x_0}$  das orthogonale Komplement von  $T_{x_0}$  im  $\mathbb{R}^{n+k}$ , d.h.  $\langle t, n \rangle = 0 \forall n \in N_{x_0}, t \in T_{x_0}$ . Damit ist  $N_{x_0} \simeq \mathbb{R}^k$  und  $T_{x_0} \simeq \mathbb{R}^n$  als Vektorräume. Das Koordinatensystem werde nun so gedreht, daß  $T_{x_0}$  gerade durch die ersten  $n$  Koordinatenrichtungen des  $\mathbb{R}^{n+k}$  aufgespannt wird und  $N_{x_0}$  durch die letzten  $k$ . In diesen Koordinaten hat  $x \in M$  die Darstellung  $x = (y, z)$  mit  $y \in \mathbb{R}^n$  und  $z \in \mathbb{R}^k$ . Speziell ist  $x_0 = (y_0, z_0)$ . Seien  $V_1 \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung von  $y_0$  und  $V_2 \subset \mathbb{R}^k$  eine offene Umgebung von  $z_0$ , so daß

$f'((y, z))$  für alle  $(y, z) \in M \cap (V_1 \times V_2)$  maximalen Rang hat.



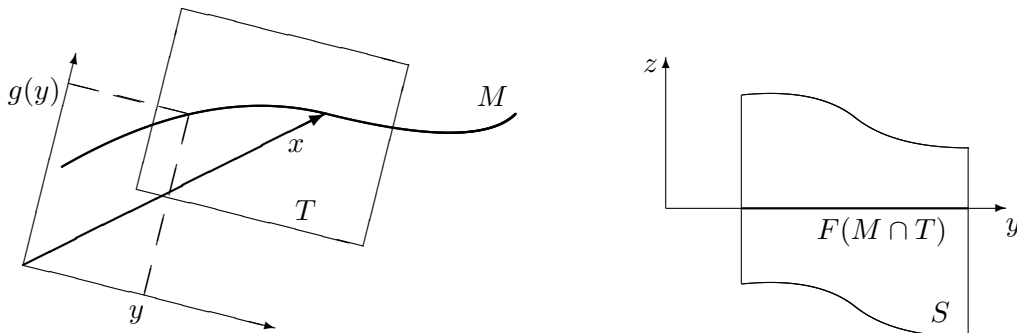
Das Differential  $f'_{y_0}(z_0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine invertierbare Matrix, denn  $f'_{y_0}(z_0)(h) = f'(y_0, z_0)(0, h)$  und  $(0, h)$  liegt im Komplement von  $\ker f'(y_0, z_0)$ . Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert eine offene Umgebung  $U_1 \subset V_1$  von  $y_0$  und eine offene Umgebung  $U_2 \subset V_2$  von  $z_0$  sowie eine eindeutige differenzierbare Abbildung  $g : U_1 \rightarrow U_2$  mit  $f(y, g(y)) = 0$  für alle  $y \in U_1$ .  $\square$

**Lemma 2 (lokales Geradebiegen)** Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  ist genau dann eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^{n+k}$ , wenn für jeden Punkt  $x \in M \subset \mathbb{R}^{n+k}$

- eine offene Umgebung  $T \subset \mathbb{R}^{n+k}$  von  $x$ ,
- eine offene Teilmenge  $S \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ,
- ein Diffeomorphismus  $F : T \rightarrow S$

existieren, so daß  $F(T \cap M) = S \cap (\mathbb{R}^n \times \underbrace{(0, \dots, 0)}_k)$ .

*Beweis:* ( $\Rightarrow$ ) Nach dem vorigen Lemma existiert eine differenzierbare Abbildung  $g : \mathbb{R}^n \supset U_1 \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^k$  mit  $M \cap (U_1 \times U_2) = \{(y, g(y)) \mid y \in U_1\}$ . Wir setzen  $T = U_1 \times U_2$  sowie  $F((y, z)) = (y, z - g(y))$  und  $S = F(T) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ .



- Injektivität:  $F(y, z) = F(u, v)$  bedeutet  $y = u$  und  $z - g(y) = v - g(u) = v - g(y)$ , also  $z = v$ .

- Differenzierbarkeit:  $F'((y, z)) = \begin{pmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ -g'(y) & I_{k \times k} \end{pmatrix}$  ist invertierbar, und damit existiert das Differential der inversen Abbildung,  $(F^{-1})'(s) = (F'(F^{-1}(s)))^{-1}$  für  $s \in S$

( $\Leftarrow$ ) Sei  $x \in M \cap T$  und die Abbildung  $F : T \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  mit  $F(x) \in \mathbb{R}^n \times \underbrace{(0, \dots, 0)}_k$

vorgegeben. Aus Injektivität folgt  $M \cap T = \{x \in T, F_{n+1}(x) = F_{n+2}(x) = \dots = F_{n+k}(x) = 0\}$ . Wir wählen  $f : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  als  $f(x) = (F_{n+1}(x), \dots, F_{n+k}(x))$ . Sei wieder  $x = (y, z)$ , so ist  $f'(x) = (-g'(y), I_{k \times k})$ , und damit hat  $f'(x)$  maximalen Rang.  $\square$

**Definition 22** Sei  $U$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Eine Abbildung  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  heißt *Immersion*, wenn  $\phi$  differenzierbar ist und  $\text{rg}(\phi'(y)) = n$  für alle  $y \in U$ .

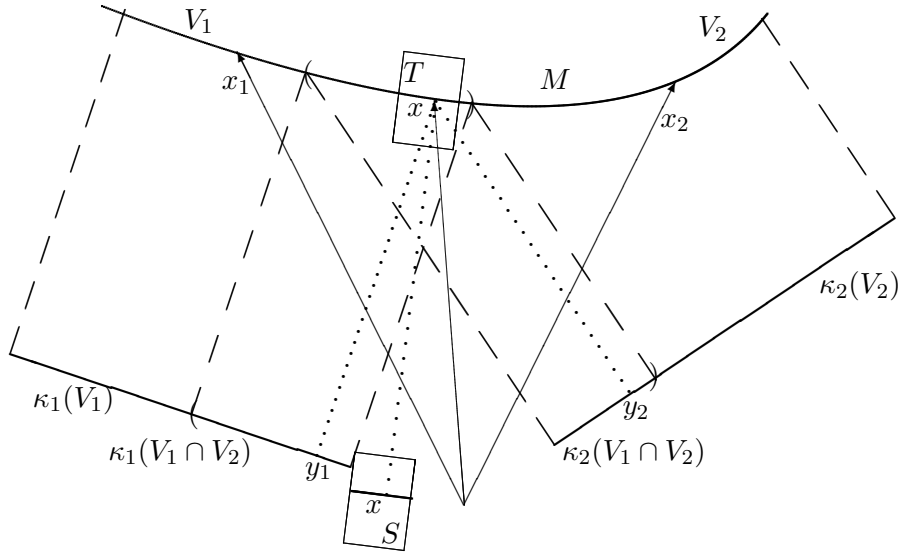
**Lemma 3** Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  ist genau dann eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+k}$ , wenn

- zu jedem  $x \in M$  eine (bezüglich der Unterraum-Topologie) offene Umgebung  $V$  von  $M$ ,
- eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,
- eine Immersion  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$

existieren, so daß  $U$  durch  $\phi$  homöomorph auf  $V$  abgebildet wird.

*Beweis:* Wir zeigen nur ( $\Rightarrow$ ), die Umkehrung benötigt Lemma 2. Nach Lemma 1 existieren offene Teilmengen  $U_1 \subset \mathbb{R}^n$  und  $U_2 \subset \mathbb{R}^k$  sowie eine differenzierbare Abbildung  $g : U_1 \rightarrow U_2$ , so daß  $M \cap (U_1 \times U_2) = \{(y, g(y)), y \in U_1\}$ . Wir setzen  $V = M \cap (U_1 \times U_2)$  und  $U = U_1$  sowie  $\phi(y) = (y, g(y))$ . Surjektivität folgt aus Lemma 1. Sei  $\phi(y_1) = \phi(y_2)$ , dann ist  $y_1 = y_2$  und, da  $g$  eindeutig,  $g(y_1) = g(y_2)$ . Also ist  $\phi$  injektiv, und damit ein Homöomorphismus, denn  $U$  und  $V$  sind offen.

Wir haben  $\phi'(y) = \begin{pmatrix} I_{n \times n} \\ g'(y) \end{pmatrix}$ . Da  $g$  differenzierbar auf  $U$  ist auch  $\phi$  differenzierbar in  $y$  und außerdem  $\text{rg}(\phi'(y)) = n$ .  $\square$



*Beweis des Satzes:* Da  $\phi : U \rightarrow V$  ein Homöomorphismus, ist auch die Einschränkung des Inversen  $\kappa : \phi^{-1}|_V : V \rightarrow U$  ein Homöomorphismus. Damit definiert  $(V, \kappa)$  eine Karte der topologischen Mannigfaltigkeit  $M$ . Es bleibt zu zeigen, daß die Kartenwechsel Diffeomorphismen sind. Seien also zwei Karten  $(V_j, \kappa_j)$ ,  $j = 1, 2$  gegeben mit  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ . Als Komposition von Homöomorphismen ist klar, daß  $\kappa_2 \circ \phi_1 : \kappa_1(V_1 \cap V_2) \rightarrow \kappa_2(V_1 \cap V_2)$  wieder ein Homöomorphismus ist. Es bleibt zu zeigen, daß diese Abbildung auch differenzierbar ist.

Sei  $y_1 \in \kappa_1(V_1 \cap V_2)$  und  $x = \phi_1(y_1) \in M$  sowie  $y_2 = \kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}(y_1) = \kappa_2(x) \in \kappa_2(V_1 \cap V_2)$ . Nach Lemma 2 existieren offene Teilmengen  $T, S \in \mathbb{R}^{n+k}$ , mit  $\phi_1(y_1) \in T$ , und ein Diffeomorphismus  $F : T \rightarrow S$ , so daß  $F(M \cap T) = S \cap \underbrace{(\mathbb{R}^n \times (0, \dots, 0))}_k$ .

Wir können  $M \cap T \subset V_1 \cap V_2$  annehmen, so daß  $W_j := \kappa_j(M \cap T) \subset \kappa_j(V_1 \cap V_2)$  offen.

Damit haben wir auf  $W_j$  die Darstellung  $F \circ \phi_j = (\psi_j, \underbrace{0, \dots, 0}_k)$  mit  $\psi_j : W_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Da  $F$  ein Diffeomorphismus und  $\phi_j$  eine Immersion, ist  $(F \circ \phi_j)'(w_j) = F'(\phi_j(w_j))\phi_j'(w_j)$  differenzierbar auf  $W_j$  und hat den Rang  $n$ . Außerdem ist  $F \circ \phi_j$  injektiv, und damit ist  $\psi_j : W_j \rightarrow \psi_j(W_j)$  ein Diffeomorphismus. Somit ist  $\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1} = \psi_2^{-1} \circ \psi_1 : W_1 \rightarrow W_2$  ein Diffeomorphismus.  $\square$

Folglich ist jede  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^n$  auch eine Mannigfaltigkeit. Es gilt aber auch die Umkehrung:

**Satz 10 (Whitney)** *Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine Immersion  $i : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  für  $m \geq 2n$  und eine Einbettung  $e : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  für  $m \geq 2m + 1$ .*

**Definition 23** Eine Teilmenge  $M \subset N$  heißt Untermannigfaltigkeit von  $N$ , wenn für jeden Punkt  $x \in M$  eine Karte  $(U, \kappa)$  von  $N$  um  $x$  existiert, so daß  $\kappa(M \cap U)$  eine Untermannigfaltigkeit der offenen Teilmenge  $\kappa(U) \subset \mathbb{R}^n$  ist. Eine Untermannigfaltigkeit  $M$  von  $N$  heißt abgeschlossen, wenn das Komplement  $N \setminus M$  offen ist.

## 2.5 Lie-Gruppen

**Definition 24** Eine Lie-Gruppe  $G$  ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit der algebraischen Struktur einer Gruppe, so daß beide Strukturen verträglich sind. d.h. die Abbildung  $G \times G \ni (g, h) \mapsto gh^{-1} \in G$  ist differenzierbar.

**Definition 25** Eine Untergruppe  $H$  einer Lie-Gruppe  $G$  heißt Lie-Untergruppe, wenn  $H$  eine Untermannigfaltigkeit von  $G$  ist.

**Satz 11** Die Gruppe  $GL(n, \mathbb{R})$  der invertierbaren reellen  $n \times n$ -Matrizen ist eine Lie-Gruppe und hat als Mannigfaltigkeit die Dimension  $n^2$ .

*Beweis:*  $GL(n, \mathbb{R})$  ist eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^{n^2}$ , denn ist  $g \in GL(n, \mathbb{R})$  und für eine  $n \times n$  Matrix  $h$  gelte  $\|g - h\| \leq \|g^{-1}\|^{-1}$ , dann ist auch  $h = (e - (g - h)g^{-1})g$  invertierbar, und  $h^{-1}$  ist durch die Neumannsche Reihe gegeben:  $h^{-1} = g^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} ((g - h)g^{-1})^k$ . Damit ist  $GL(n, \mathbb{R})$  global einer Teilmenge des  $\mathbb{R}^{n^2}$  homöomorph, nämlich zu sich selbst, mit der Karte  $(GL(n, \mathbb{R}), \text{id})$ . Die Äquivalenzklasse dieses Atlases definiert eine differenzierbare Struktur auf  $GL(n, \mathbb{R})$ .

Alternativ:  $\det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  ist offen, da die Determinante stetig ist.

Zu zeigen bleibt die Verträglichkeit mit den Gruppenoperationen. Sei  $U = GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{2n^2}$ , dann ist das Differential der Multiplikation  $m : U \ni (g, h) \mapsto gh \in \mathbb{R}^{n^2}$  gegeben durch  $m'(g, h) = (R_h, L_g)$ , wobei  $R_h$  die Rechtsmultiplikation mit  $h$  und  $L_g$  die Linksmultiplikation mit  $g$  bedeutet. Für die Inversion  $i : GL(n, \mathbb{R}) \ni g \rightarrow g^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$  haben wir  $i'(g)(t) = -g^{-1}tg^{-1}$ , so daß die Gruppenoperationen verträglich sind mit der Mannigfaltigkeits-Struktur.  $\square$

Entsprechend ist die Gruppe  $GL(n, \mathbb{C})$  der invertierbaren komplexen  $n \times n$ -Matrizen ist eine Lie-Gruppe der Dimension  $2n^2$  und die Gruppe  $GL(n, \mathbb{H})$  der invertierbaren quaternionischen  $n \times n$ -Matrizen eine Lie-Gruppe der Dimension  $4n^2$ .

**Satz 12** Die Gruppe  $SL(n, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}), \det g = 1\}$  ist eine abgeschlossene Lie-Untergruppe von  $GL(n, \mathbb{R})$  der Dimension  $n^2 - 1$ .

*Beweis:* Mit der offenen Untermenge  $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$  setzen wir  $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(g) = \det g - 1$ . Dann ist  $SL(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(0)$  und das Differential ist wegen  $\det'(g)(t) = \det g \operatorname{tr}(g^{-1}t)$  für  $g \in SL(n, \mathbb{R})$  durch  $f'(g)(t) = \operatorname{tr}(g^{-1}t)$  gegeben,



und hat somit den Rang 1. Damit ist  $SL(n, \mathbb{R})$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Mit der globalen Karte  $(GL(n, \mathbb{R}), \text{id})$  von  $GL(n, \mathbb{R})$  wird  $SL(n, \mathbb{R})$  zu einer Untermannigfaltigkeit von  $GL(n, \mathbb{R})$  und damit zu einer Lie-Untergruppe. Diese Untermannigfaltigkeit ist abgeschlossen, denn sei  $g \in GL(n, \mathbb{R}) \setminus SL(n, \mathbb{R})$ , dann ist  $\det g \neq 1$ . Da die Determinante stetig ist, ist das Urbild  $\det^{-1}$  einer offenen Kugel um  $\det g$ , die 1 nicht enthält, offen. Damit ist die  $SL(n, \mathbb{R})$  eine abgeschlossene Lie-Untergruppe von  $GL(n, \mathbb{R})$ .  $\square$

Damit ist noch nicht bewiesen, daß diese Gruppe auch eine Lie-Gruppe ist! Wir werden später beweisen, daß jede abgeschlossene Lie-Untergruppe einer Lie-Gruppe wieder eine Lie-Gruppe ist.

Entsprechend ist die Gruppe  $SL(n, \mathbb{C})$  der komplexen  $n \times n$ -Matrizen mit Determinante 1 eine abgeschlossene Lie-Untergruppe der Dimension  $2n^2 - 2$ .

**Satz 13** Die orthogonale Gruppe  $O(n, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}), g^T g = e\}$  ist eine abgeschlossene Lie-Untergruppe der Dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

*Beweis:* Sei  $Sym \subset \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$  der Raum aller symmetrischen Matrizen. Mit der offenen Untermenge  $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$  setzen wir  $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow Sym$ ,  $f(g) = g^T g - e$ . Dann ist  $O(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(0)$  und das Differential ist die lineare Abbildung  $f'(g)(t) = g^T t + t^T g$ . Setzt man  $t = \frac{1}{2}(g^T)^{-1}s$  mit  $s \in Sym$ , so ist  $f'(g)(t) = s$ . Damit ist  $f'(g)$  surjektiv, hat also maximalen Rang. Da  $f$  stetig, wird  $O(n, \mathbb{R})$  eine abgeschlossene Lie-Untergruppe der  $GL(n, \mathbb{R})$ .  $\square$

Die orthogonale Gruppe  $O(n, \mathbb{R})$  ist kompakt und hat zwei Zusammenhangskomponenten, die eine bestehend aus den Matrizen  $g \in O(n, \mathbb{R})$  mit  $\det g = +1$  und die andere bestehend aus den Matrizen  $g \in O(n, \mathbb{R})$  mit  $\det g = -1$ . Beide sind damit selbst Mannigfaltigkeiten, und die Matrizen mit  $\det g = +1$  sind zugleich eine Gruppe, die spezielle orthogonale Gruppe  $SO(n, \mathbb{R})$ .

Völlig analog werden folgende Gruppen zu abgeschlossenen Lie-Untergruppen:

- $O(n, \mathbb{C}) \subset GL(n, \mathbb{C})$  mit  $f(g) = g^T g - e$ , Dimension= $n^2 - n$ , nichtkompakt (für  $n > 1$ )

$SO(n, \mathbb{C})$  als Zusammenhangskomponente mit  $\det g = 1$

- $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$  mit  $f(g) = g^* g - e$ , Dimension= $n^2$ , kompakt
- $SU(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$  mit  $f(g) = (g^* g - e, \det g - 1)$ , Dimension= $n^2 - 1$ , kompakt

- $Sp(2n, \mathbb{R}) \subset GL(2n, \mathbb{R})$  mit  $f(g) = g^T \omega g - \omega$ ,  $\omega = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}$ , Dimension= $2n^2 + n$ , nicht kompakt

- $Sp(2n, \mathbb{C}) \subset GL(2n, \mathbb{C})$  mit  $f(g) = g^T \omega g - \omega$ ,  $\omega = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}$ , Dimension= $4n^2 + 2n$ , nicht kompakt

- $Sp(n) \subset GL(n, \mathbb{H})$  mit  $f(g) = g^*g - e$ , Dimension= $2n^2 + n$ , kompakt

## 3 Tensorbündel

### 3.1 Tangentialraum

#### 3.1.1 Abstrakte Definition

Sei  $M$  eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit  $C^\infty(M)$  die Algebra der (unendlich oft) differenzierbaren reellen Funktionen auf  $M$ , d.h. der Abbildungen  $f : M \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ , so daß für eine Karte  $(U, \kappa)$  mit  $x \in U$  die Abbildung  $f \circ \kappa^{-1} : \mathbb{R}^n \ni \kappa_1(U) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar ist. Die Algebra-Struktur ist punktweise definiert, d.h.  $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$  und  $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$ .

Besonders nützlich sind die Koordinaten-Funktionen  $x \mapsto x^i$ . Sei  $t = (t^1, \dots, t^n) \in \mathbb{R}^n$ , dann definieren wir eine Abbildung  $a^i : \mathbb{R}^n \ni t \mapsto t^i \in \mathbb{R}$  und die Koordinaten-Funktionen in einer gegebenen Karte  $(U, \kappa)$  als  $x^i := a^i \circ \kappa : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 26** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Ein Tangentialvektor  $v_x$  im Punkt  $x \in M$  ist eine lineare Abbildung  $v_x : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , die die Leibniz-Regel erfüllt:  $v_x(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 v_x(f_1) + \alpha_2 v_x(f_2)$  und  $v_x(f_1 f_2) = v_x(f_1) f_2(x) + f_1(x) v_x(f_2)$  für  $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$  und  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .

Insbesondere verschwindet  $v_x$  auf (lokal) konstanten Funktionen  $f(x) = \alpha 1(x)$ , mit  $1(x) = 1 \forall x \in U$ , da  $v_x(\alpha) = \alpha v_x(1) = \alpha v_x(1 \cdot 1) = \alpha v_x(1) 1(x) + \alpha 1(x) v_x(1) = 2\alpha v_x(1)$ .

Der Raum  $T_x M$  aller Tangentialvektoren im Punkt  $x \in M$  wird durch  $(\alpha v_x + \beta u_x)(f) = \alpha v_x(f) + \beta u_x(f)$  zu einem linearen Raum, dem Tangentialraum der Mannigfaltigkeit im Punkt  $x$ .

#### 3.1.2 Darstellung in einer Karte

In einer gegebenen Karte  $(U, \kappa)$  von  $M$  ergibt die Anwendung eines Tangentialvektors auf die Koordinaten-Funktionen  $v_x(x^i) = v_x^i \in \mathbb{R}$ . Wir setzen  $f = f \circ \kappa^{-1} \circ \kappa = \hat{f} \circ \kappa$ , mit  $\hat{f} : \mathbb{R}^n \supset \kappa(U) \rightarrow \mathbb{R}$  und wenden den Mittelwertsatz an:  $\hat{f}(t) = \hat{f}(t_0) + \sum_{i=1}^n (t^i - t_0^i) \frac{\partial \hat{f}}{\partial t^i} \Big|_{\hat{t}=t_0+s(t-t_0)}$  für ein  $s \in (0, 1)$ .

Mit  $t = \kappa(x)$  und  $t_0 = \kappa(x_0)$  wird daraus  $f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x^i(x) - x_0^i(x)) \frac{\partial \hat{f}}{\partial t^i} \Big|_{\hat{t}=\kappa(x_0)+s(\kappa(x)-\kappa(x_0))}$ . Anwenden von  $v_x$  ergibt, da  $f(x_0)$  und  $x_0^i$  konstante Funktionen sind,  $v_x(f) = \sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial \hat{f}}{\partial t^i} \Big|_{\hat{t}=\kappa(x_0)+s(\kappa(x)-\kappa(x_0))}$ . Im Limes  $x \rightarrow x_0$

ergibt sich  $v_{x_0}(f) = \sum_{i=1}^n v_{x_0}^i \frac{\partial (f \circ \kappa^{-1})}{\partial t_0^i} \Big|_{\kappa(x_0)}$ . Symbolisch schreibt man dafür auch  $v_x = \sum_{i=1}^n v_x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Man betrachtet dann  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$  als Basis von  $T_x M$ . Andererseits

können wir die partiellen Ableitungen wieder zu einem Differential zusammenfassen:  $\sum_{i=1}^n v_x^i \frac{\partial(f \circ \kappa^{-1})}{\partial t^i} \Big|_{\kappa(x)} = (f \circ \kappa^{-1})'(\kappa(x))v_x^{(\kappa)}$  mit  $v_x^{(\kappa)} = (v_x^1, \dots, v_x^n) \in \mathbb{R}^n$ .  
Als Konsequenz erhalten wir:

**Satz 14** Jede Karte  $(U, \kappa)$  definiert einen Isomorphismus von Vektorräumen  $i_{(U, \kappa)} : T_x M \ni v_x \mapsto v_x^{(\kappa)} \in \mathbb{R}^n$ .

Seien  $(U_1, \kappa_1)$  und  $(U_2, \kappa_2)$  zwei Karten von  $M$  und  $x \in U_1 \cap U_2$ . In diesen Karten habe der Tangentialvektor  $v_x \in T_x M$  die Darstellung

$$\begin{aligned} v_x(f) &= (f \circ \kappa_1^{-1})'(\kappa_1(x))v_x^{(\kappa_1)} = (f \circ \kappa_2^{-1})'(\kappa_2(x))v_x^{(\kappa_2)} \\ &= (f \circ \kappa_1^{-1} \circ \kappa_1 \circ \kappa_2^{-1})'(\kappa_2(x))v_x^{(\kappa_2)} \\ &= (f \circ \kappa_1^{-1})'(\kappa_1(x)) \circ (\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1})'(\kappa_2(x))v_x^{(\kappa_2)} \end{aligned}$$

Folglich transformieren sich die Kartendarstellungen von Tangentialvektoren beim Kartenwechsel gemäß  $v_x^{(\kappa_1)} = (\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1})'(\kappa_2(x))v_x^{(\kappa_2)}$ . Vor allem in der Relativitätstheorie wird dieses Transformationsverhalten als Definition eines kontravarianten Vektors angesehen:

**Definition 27** Ein Objekt ist ein Vektor, wenn es sich unter Kartenwechsel wie ein Vektor transformiert.

### 3.1.3 Tangentialvektoren an Kurven

**Definition 28** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $I = (a, b) \in \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Eine Kurve auf  $M$  ist eine Abbildung  $\gamma : I \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ . Zwei Kurven  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow M$  heißen äquivalent im Punkt  $x_0 \in M$ , wenn  $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = x_0$  und  $\frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_1) \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_2) \Big|_{t=t_0}$  für alle Karten  $(U, \kappa)$  mit  $x_0 \in U$ .

**Satz 15** Jede Äquivalenzklasse  $[\gamma]_x$  von Kurven im Punkt  $x \in M$  definiert einen Tangentialvektor im Punkt  $x$  durch  $v_x(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) \Big|_{t=t_0}$  für  $\gamma \in [\gamma]_x$  und  $f \in C^\infty(M)$ .

*Beweis:* Leibniz-Regel:

$$\begin{aligned} v_x(fg) &= \frac{d}{dt}(fg \circ \gamma(t)) \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}((f \circ \gamma(t))(g \circ \gamma(t))) \Big|_{t=t_0} \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) \Big|_{t=t_0} g \circ \gamma(t_0) + f \circ \gamma(t_0) \frac{d}{dt}(g \circ \gamma(t)) \Big|_{t=t_0} \\ &= v_x(f)g(x) + f(x)v_x(g) \end{aligned}$$

Unabhängigkeit vom Repräsentanten  $\gamma_1 \in [\gamma]_x$ :

$$v_{1,x}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1(t)) \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}(f \circ \kappa^{-1} \circ \kappa \circ \gamma_1(t)) \Big|_{t=t_0}$$

$$\begin{aligned}
&= (f \circ \kappa^{-1})'(\kappa \circ \gamma_1(t_0)) \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma_1(t)) \Big|_{t=t_0} \\
&= (f \circ \kappa^{-1})'(\kappa \circ \gamma(t_0)) \frac{d}{dt}(\kappa \circ \gamma(t)) \Big|_{t=t_0} \\
&= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) \Big|_{t=t_0} = v_x(f) \quad \square
\end{aligned}$$

**Satz 16** Jeder Tangentialvektor  $v_x$  definiert eine Äquivalenzklasse von Kurven  $[\gamma]_x$  so daß  $v_x(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \Big|_{t=t_0}$ .

*Beweis:* Eine Karte  $(U, \kappa)$  mit  $x \in U$  definiert einen Isomorphismus  $v_x \mapsto v_x^{(\kappa)} = (v_x^1, \dots, v_x^n) \in \mathbb{R}^n$ . Wir setzen  $\gamma(t) = \kappa^{-1}(\kappa(x) + (t - t_0)v_x^{(\kappa)})$ . Dann ist  $\gamma(t_0) = x$  und

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) \Big|_{t=t_0} &= (f \circ \kappa^{-1})'(\kappa(x)) \frac{d}{dt}(\kappa(x) + (t - t_0)v_x^{(\kappa)}) \Big|_{t=t_0} \\
&= (f \circ \kappa^{-1})'(\kappa(x))v_x^{(\kappa)} = v_x(f) \quad \square
\end{aligned}$$

Damit besteht eine 1:1-Korrespondenz zwischen Tangentialvektoren in  $x \in M$  und Äquivalenzklassen von Kurven durch  $x$ .

### 3.1.4 Tangentialabbildung

Sei  $\phi : M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung von Mannigfaltigkeiten mit  $\phi(x) = y$ . Dann induziert diese Abbildung eine Abbildung von Tangentialräumen  $\phi'_x : T_x M \ni v_x \mapsto \phi'_x(v_x) \in T_{\phi(x)} N$  durch  $(\phi'_x(v_x))(f) = v_x(f \circ \phi)$  für  $f \in C^\infty(N)$ .

### 3.1.5 Kotangentialraum

**Definition 29** Der Kotangentialraum  $T_x^* M$  in  $x \in M$  ist der Raum der linearen Funktionale auf  $T_x M$ , d.h. der linearen Abbildungen  $T_x M \ni \omega_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wenn  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$  Basis von  $T_x M$ , dann bezeichnen wir mit  $\{dx^j\}$  die duale Basis von  $T_x^* M$  mit  $dx^j(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \delta_i^j$ . In dieser Basis ist  $\omega_x = \sum_{j=1}^n \omega_{xj} dx^j$ .

## 3.2 Tangentialbündel

**Satz 17** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \kappa_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ . Der Raum  $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$  wird zu einer  $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Atlas  $\mathcal{A}^T = \{(U_\alpha^T, \kappa_\alpha^T)\}_{\alpha \in I}$  und Punkten  $v_x \in T_x M$ ,  $x \in M$ . Dabei ist  $U_\alpha^T = \bigcup_{x \in U_\alpha} T_x M$  und  $\kappa_\alpha^T(v_x) = (\kappa_\alpha(x), v_x^{(\kappa_\alpha)}) \in \mathbb{R}^{2n}$ .

*Beweis:* Zu überprüfen ist die Verträglichkeit der Karten, d.h. daß  $\kappa_2^T \circ (\kappa_1^T)^{-1} : \kappa_1^T(U_1^T \cap U_2^T) \rightarrow \kappa_2^T(U_1^T \cap U_2^T)$  ein Diffeomorphismus ist. Wir haben

$$\kappa_2^T \circ (\kappa_1^T)^{-1}(\kappa_1(x), v_x^{(\kappa_1)}) = \kappa_2(v_x) = (\kappa_2(x), v_x^{(\kappa_2)})$$

$$= ((\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1})(\kappa_1(x)), (\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1})'v_x^{(\kappa_1)}) . \quad \square$$

Aus in Kürze ersichtlichen Gründen heißt  $TM$  das Tangentialbündel von  $M$ .

### 3.2.1 Natürliche Strukturen auf $TM$

1. Es existiert eine kanonische surjektive Projektion  $\pi : TM \rightarrow M$ ,  $\pi(v_x) = x$ . Die kanonische Projektion ist differenzierbar: Sei  $(U_1^T, \kappa_1^T)$  eine Karte von  $TM$  und  $(U_2, \kappa_2)$  eine Karte von  $M$ , dann ist die Abbildung  $\kappa_2 \circ \pi \circ (\kappa_1^T)^{-1} : \kappa_1(U_1) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \kappa_2(U_2)$  gegeben durch

$$\kappa_2 \circ \pi \circ (\kappa_1^T)^{-1}(\kappa_1(x), v_x^{(\kappa_1)}) = \kappa_2 \circ \pi(v_x) = \kappa_2(x) = (\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1})(\kappa_1(x))$$

2. Sei  $\mathcal{A} = \{U_\alpha \kappa_\alpha\}$  ein Atlas von  $M$ . Dann existiert für jede Karte  $(U_\alpha, \kappa_\alpha) \in \mathcal{A}$  eine Abbildung  $\chi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  mit  $\chi_\alpha(v_x) = (\pi(v_x), v_x^{(\kappa_\alpha)})$ . Damit ist

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\chi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U_\alpha \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm.

**Satz 18** Die Abbildung  $\chi_\alpha$  ist ein Diffeomorphismus und  $\text{pr}_2 \circ \chi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)} : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

**Definition 30** Das Tupel  $TM = (TM, M, \pi, \mathbb{R}^n, \{\chi_\alpha\})$  heißt Tangentialbündel der Mannigfaltigkeit  $M$ . Im Tupel ist  $TM$  die Bündelmannigfaltigkeit,  $M$  die Basismannigfaltigkeit,  $\pi$  die kanonische Projektion,  $\mathbb{R}^n$  die typische Faser, und  $\{\chi_\alpha\}$  eine Familie lokaler Trivialisierungen. Der Raum  $\pi^{-1}(x) = T_x M$  heißt die Faser über  $x \in M$ .

## 3.3 Vektorbündel

**Definition 31** Ein Vektorbündel  $E$  über der Basis  $M$  mit typischer Faser  $F$  ist ein Tupel  $(E, M, \pi, F, \{\chi_\alpha\})$ , wobei  $E, M$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten und  $F$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum sind und

- $\pi : E \rightarrow M$  ist differenzierbare Surjektion (Projektion)
- $E$  besitzt eine Familie lokaler Trivialisierungen, d.h. es existiert eine Überdeckung  $\{U_\alpha\}$  von  $M$  und eine Familie von Diffeomorphismen  $\chi_\alpha :$

$\pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ , so daß

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\chi_\alpha} & U_\alpha \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U_\alpha \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm ist und

$$\text{pr}_2 \circ \chi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \rightarrow F$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Dabei ist  $E$  die Bündelmannigfaltigkeit,  $M$  die Basismannigfaltigkeit,  $\pi$  die kanonische Projektion,  $F$  die typische Faser und  $\{\chi_\alpha\}$  eine Familie lokaler Trivialisierungen. Der Raum  $\pi^{-1}(x) = E_x$  heißt die Faser über  $x \in M$ .

**Definition 32** Ein lokaler *Schnitt* eines Vektorbündels ist eine Abbildung  $s : U \rightarrow E$  mit  $U \subset M$  offen und  $\pi \circ s = \text{id}_U$ . Ein auf  $U = M$  definierter Schnitt heißt globaler Schnitt.

Jedes Vektorbündel besitzt einen ausgezeichneten Schnitt, den Nullschnitt. Glatte Schnitte eines Vektorbündels bilden einen unendlich-dimensionalen Vektorraum  $\Gamma^\infty(E)$  mit  $(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2)(x) = \alpha_1 s_1(x) + \alpha_2 s_2(x)$

**Definition 33** Eine Familie  $(s_1, \dots, s_n)$  von Schnitten heißt linear unabhängig, wenn für alle Punkte  $x$  aus dem gemeinsamen Definitionsbereich das System  $(s_1(x), \dots, s_n(x))$  linear unabhängig ist.

Damit ist jedes Element einer Familie linear unabhängiger Schnitte in jedem Punkt des gemeinsamen Definitionsbereichs verschieden von 0.

**Satz 19** Sei  $F$  ein  $k$ -dimensionaler Vektorraum. Dann gibt es eine 1:1-Korrespondenz zwischen lokalen Trivialisierungen  $\chi$  über  $U \subset M$  und Systemen  $\{s_i\}$  von  $k$  linear unabhängigen Schnitten über  $U$ .

*Beweis:* ( $\Rightarrow$ ) Sei  $\chi$  vorgegeben und  $\{b_i\}$  eine Basis von  $F$ . Dann setzen wir  $s_i(x) = \chi^{-1}(x, b_i)$ .

( $\Leftarrow$ ) Sei  $s_i$  vorgegeben, dann bilden die  $s_i$  in  $\pi^{-1}(x)$  eine Basis. Also ist  $\pi^{-1}(x) \ni e = \sum_{i=1}^k e_i s_i(x)$ . Wir setzen  $\chi : \pi^{-1}(U) \ni e \mapsto (x, \sum_{i=1}^k e_i b_i) \in U \times F$ .  $\square$

**Definition 34** Das Bündel  $E$  heißt global trivial, falls ein System von  $k$  linear unabhängigen Schnitten des Bündels existiert, d.h. ein Diffeomorphismus  $\chi : E \rightarrow M \times F$ .

### 3.3.1 Beispiele von Vektorbündeln

- triviales Bündel  $E = M \times F$ .
- Tangentialbündel  $TM$ , im allgemeinen nicht trivial
- duales Bündel: Sei  $E = \bigcup_{x \in M} E_x$  ein Vektorbündel und  $E_x^*$  der Raum der linearen Funktionale auf  $E_x = \pi^{-1}(x)$ , dann ist  $E^* = \bigcup_{x \in M} E_x^*$  ein Vektorbündel mit kanonischer Projektion  $\tilde{\pi} : E^* \rightarrow M$  und Trivialisierungen

$$\tilde{\chi} : \tilde{\pi}^{-1}(U) \rightarrow U \times F^* , \quad \tilde{\chi}(e^*) := (\tilde{\pi}(e^*), (\chi|_{\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\pi}(e^*))})^{-1*}(e^*)) .$$

Dabei ist für  $e^* \in E_x^*$  und  $v \in F$

$$((\chi|_{\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\pi}(e^*))})^{-1*}(e^*))(v) := e^*((\chi|_{\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\pi}(e^*))})^{-1}v)$$

- direkte Summe von Vektorbündeln:  $E_1, E_2$  Vektorbündel über  $M$ , dann ist  $E_1 \oplus E_2 = \bigcup_{x \in M} ((E_1)_x \oplus (E_2)_x)$  ein Vektorbündel.
- Tensorprodukte von Vektorbündeln (später)

## 3.4 Vektorfelder

Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{X}(M) = \Gamma^\infty(TM)$  den unendlich-dimensionalen Vektorraum der glatten Schnitte des Tangentialbündels. Elemente aus  $\mathfrak{X}(M)$  heißen Vektorfelder. Die Auswertung eines Vektorfeldes in einem Punkt  $x \in M$  liefert einen Tangentialvektor  $X_x = X(x) \in T_x M$ .

Ein Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ist eine lineare Abbildung  $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , mit  $(Xf)(x) = X_x(f)$ , die die Leibniz-Regel erfüllt:

$$X(f_1 f_2) = X(f_1) \cdot f_2 + f_1 \cdot X(f_2)$$

**Definition 35** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Familie von  $n$  linear unabhängigen Vektorfeldern auf einer offenen Umgebung von  $M$  heißt lokales Bezugssystem.

### 3.4.1 $\mathfrak{X}(M)$ als Lie-Algebra

Ist das Produkt von Vektorfeldern  $XY(f) := X(Y(f))$  wieder ein Vektorfeld? Nein, da die Leibniz-Regel nicht erfüllt ist!

$$\begin{aligned} XY(f_1 f_2) &= X(Y(f_1 f_2)) = X(Y(f_1) \cdot f_2 + f_1 \cdot Y(f_2)) \\ &= X(Y(f_1)) \cdot f_2 + Y(f_1) \cdot X(f_2) + X(f_1) \cdot Y(f_2) + f_1 \cdot X(Y(f_2)) \\ &\neq XY(f_1) \cdot f_2 + f_1 \cdot XY(f_2) . \end{aligned}$$

Dagegen ist der Kommutator  $[X, Y] = XY - YX$  wieder ein Vektorfeld, da in obiger Rechnung die Terme  $Y(f_1) \cdot X(f_2) + X(f_1) \cdot Y(f_2)$  herausfallen.

Eigenschaften des Kommutators:

- $[X, Y] = -[Y, X], \quad [X, X] = 0$  (Antisymmetrie)
- $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$  (Linearität)
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  (Jacobi-Identität)

**Definition 36** Ein Vektorraum  $L$  mit einer bilinearen Abbildung  $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$ , der Lie-Klammer, für die  $[X, X] = 0 \quad \forall X \in L$  gilt und die die Jacobi-Identität  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in L$  erfüllt, heißt *Lie-Algebra*.

Bemerkung:  $0 = [X+Y, X+Y] = [X, X] + [X, Y] + [Y, X] + [Y, Y] = [X, Y] + [Y, X]$ , also  $[X, Y] = -[Y, X]$

Damit ist der Raum aller Vektorfelder  $\mathfrak{X}(M)$  eine Lie-Algebra.

weitere Beispiele: Sei  $A$  eine assoziative Algebra, dann ist  $A$  auch eine Lie-Algebra mit Lie-Klammer  $[a, b] = ab - ba$ .

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe, dann bilden die linksinvarianten Vektorfelder (die später definiert werden) eine Lie-Algebra der gleichen Dimension wie  $G$ . Diese wird einfach als Lie-Algebra von  $G$  bezeichnet.

### 3.4.2 $\mathfrak{X}(M)$ als Modul über der Algebra $C^\infty(M)$

Der Raum  $\mathfrak{X}(M)$  aller Vektorfelder auf  $M$  ist ein  $C^\infty(M)$ -Modul, d.h. für  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und  $f \in C^\infty(M)$  ist  $fX \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $(fX)(f_1) = f \cdot X(f_1)$ . Es gilt  $(f_1 f_2)X = f_1(f_2 X)$  sowie die üblichen linearen Strukturen der Operation.

Solche Moduln über einer Algebra spielen eine große Rolle in verallgemeinerten (nichtkommutativen) Geometrien. Nicht die Vektorbündel selbst, sondern der Raum der Schnitte von Vektorbündeln besitzt eine nichtkommutative Verallgemeinerung. Die Klassifikation dieser Räume ist Gegenstand der K-Theorie.

### 3.4.3 Integralkurven

**Definition 37** Sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Die Abbildung  $\gamma_{x_0} : \mathbb{R} \supset (a, b) \rightarrow M$  mit

- $\gamma_{x_0}(0) = x_0, \quad 0 \in (a, b)$
- $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_{x_0}(t)) = (Xf)(\gamma_{x_0}(t)) \quad \forall t \in (a, b)$

heißt *Integralkurve* des Vektorfeldes  $X$  durch den fixierten Punkt  $x_0$ .

Aus Existenz- und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung folgt lokal (in einer Umgebung von  $x_0$ ) die Existenz und Eindeutigkeit von Integralkurven. Die Frage ist dann, wieweit sie ausgedehnt werden können.

Die Behandlung dynamischen Systeme (z.B. klassische Mechanik) führt zum Problem des Auffindens von Integralkurven (Trajektorien im Phasenraum).

**Definition 38** Eine lokale einparametrische Gruppe von Diffeomorphismen der Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Abbildung  $\phi : M \times \mathbb{R} \supset D \rightarrow M$  mit



1.  $\phi(\cdot, 0) = \text{id}_M$
2. Falls  $(x, s)$ ,  $(\phi(x, s), t)$  und  $(x, s + t)$  in  $D$  liegen, dann ist  $\phi(\phi(x, s), t) = \phi(x, s + t)$ .
3. Für alle  $x \in M$  existieren Umgebungen  $U_x \subset M$  von  $x$  und Zahlen  $\epsilon_x > 0$ , so daß  $\phi(\cdot, t) : U_x \rightarrow \phi(U_x, t)$  ein Diffeomorphismus ist für alle  $t \in (-\epsilon_x, \epsilon_x)$ .
4.  $\phi$  ist unendlich oft differenzierbar in  $t$ .

**Satz 20** *Jedem glatten Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  entspricht eindeutig eine lokale einparametrische Gruppe von Diffeomorphismen  $\phi_X$ , so daß  $\gamma_{x_0}(t) = \phi_X(x, t)$  die Integralkurve von  $X$  durch  $x_0$  ist.*

*Beweis:* Wir setzen  $(Xf)(x_0) = \left. \frac{d}{dt} f(\phi_X(x_0, t)) \right|_{t=0}$ . Zu zeigen ist, daß diese Zuordnung  $\phi_X \mapsto X$  bijektiv ist.

Surjektivität: Sei  $X$  ein beliebiges Vektorfeld, dann existiert lokal die Integralkurve  $\gamma_{x_0}(t)$ , und wir setzen  $\phi_X(x_0, t) = \gamma_{x_0}(t)$ . Dann folgen 1. der Definition und 3.+4. aus Sätzen über Lösungen von Differentialgleichungen. Bleibt 2: Die Kurven  $\phi_X(x_0, t + s)$  und  $\phi_X(\phi(x_0, s), t)$  erfüllen dieselbe Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} f(\phi_X(x_0, t + s)) \right|_{t=\tau} &= \left. \frac{d}{dt} f(\phi_X(x_0, t)) \right|_{t=s+\tau} = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma_{x_0}(t)) \right|_{t=s+\tau} \\ &= (Xf)(\gamma_{x_0}(s + \tau)) = (Xf)(\phi(x_0, s + \tau)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} f(\phi_X(\phi_X(x_0, s), t)) \right|_{t=\tau} &= \left. \frac{d}{dt} f(\gamma_{\phi_X(x_0, s)}(t)) \right|_{t=\tau} = (Xf)(\gamma_{\phi_X(x_0, s)}(\tau)) \\ &= (Xf)(\phi(\phi_X(x_0, s), \tau)) , \end{aligned}$$

und sie gehen für  $t = 0$  durch den gleichen Punkt  $\phi_X(x_0, s) = \phi_X(\phi_X(x_0, s), 0)$ . Also folgt 2.

Injektivität folgt aus Eindeutigkeit der Lösung von Differentialgleichungen.  $\square$

**Definition 39** Ein Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  heißt vollständig, wenn die zugehörige einparametrische Gruppe  $\phi_X(x, t)$  von Diffeomorphismen global auf  $M \times \mathbb{R}$  definiert ist.

### 3.4.4 Zurückziehen von Funktionen und Transport von Vektorfeldern

**Definition 40** Sei  $\phi : M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und  $f \in C^\infty(N)$ . Dann ist das Zurückziehen (pull back) von Funktionen  $\phi^* : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$  definiert als  $(\phi^* f)(x) = (f \circ \phi)(x)$  mit  $x \in M$ .

Sei  $\phi$  zusätzlich ein Diffeomorphismus, dann ist der Transport  $\phi_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$  von Vektorfeldern definiert durch  $(\phi_* X)_y = \phi'(\phi^{-1}(y))X_{\phi^{-1}(y)}$  mit  $y \in N$ .

Rechenregeln

1.  $\phi_*(hX) = (h \circ \phi^{-1})\phi_*X = (\phi^{-1*}h)\phi_*X$ ,  $h \in C^\infty(M)$
2.  $(\phi^*X)f = X(f \circ \phi) \circ \phi^{-1} = (\phi^{-1})^*(X(\phi^*f))$ ,  $f \in C^\infty(N)$
3.  $\psi_* \circ \phi_* = (\psi \circ \phi)_*$
4.  $\phi_*[X, Y] = [\phi_*X, \phi_*Y]$

Beweis:

$$\begin{aligned}\phi_*(hX)_y &= \phi'(\phi^{-1}(y))(hX)_{\phi^{-1}(y)} = \phi'(\phi^{-1}(y))(h(\phi^{-1}(y)) \cdot X_{\phi^{-1}(y)}) \\ &= (h \circ \phi^{-1})(y)\phi'(\phi^{-1}(y))X_{\phi^{-1}(y)} \\ &= ((h \circ \phi^{-1})(\phi_*X))_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((\phi_*X)f)(y) &= (\phi_*X)_y(f) = (\phi'(\phi^{-1}(y))X_{\phi^{-1}(y)})(f) = X_{\phi^{-1}(y)}(f \circ \phi) \\ &= (X(\phi^*f))_{\phi^{-1}(y)} = (X(f \circ \phi) \circ \phi^{-1})(y) = ((\phi^{-1})^*(X(\phi^*f)))(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\phi_*X, \phi_*Y](f) &= \phi_*X(\phi_*Y(f)) - \phi_*Y(\phi_*X(f)) \\ &= \phi_*X((\phi^{-1})^*(Y(\phi^*f))) - \phi_*Y((\phi^{-1})^*(X(\phi^*f))) \\ &= (\phi^{-1})^*X(\phi^*((\phi^{-1})^*(Y(\phi^*f)))) - (\phi^{-1})^*Y(\phi^*((\phi^{-1})^*(X(\phi^*f)))) \\ &= (\phi^{-1})^*((XY - YX)(\phi^*f)) = (\phi_*[X, Y])(f)\end{aligned}$$

**Definition 41** Sei  $\phi : M \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus der Mannigfaltigkeit  $M$ . Ein Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  heißt invariant unter dem Diffeomorphismus  $\phi$ , wenn  $\phi_*X = X$  gilt.

Bemerkung: Ausgewertet im Punkt  $\phi(x)$  bedeutet das  $X_{\phi(x)} = \phi'(x)X_x$  für alle  $x \in M$ . Diese Invarianz läßt sich auch als  $X \circ \phi^* = \phi^* \circ X$  schreiben nach der 2. Rechenregel für den Transport von Vektorfeldern.

### 3.5 Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe, dann bezeichnen wir mit  $L_a : G \rightarrow G$ ,  $L_a(b) = ab$ , die Linksmultiplikation mit  $a \in G$ . Nach Definition einer Lie-Gruppe ist die Linksmultiplikation ein Diffeomorphismus. Damit induziert  $L_a$  einen Transport  $(L_a)_* : \mathfrak{X}(G) \ni X \mapsto (L_a)_*X \in \mathfrak{X}(G)$  von Vektorfeldern auf  $G$ .

**Definition 42** Ein Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(G)$  heißt linksinvariant, wenn  $(L_a)_*X = X$  für alle  $a \in G$ .

**Satz 21** Die linksinvarianten Vektorfelder auf einer Lie-Gruppe  $G$  bilden eine endlich-dimensionale Lie-Unteralgebra  $(\mathfrak{g}, [ , ])$  der Lie-Algebra  $\mathfrak{X}(G)$ .

*Beweis:*  $[(L_a)_*X, (L_a)_*Y] = (L_a)_*[X, Y]$  □

Wir nennen  $\mathfrak{g}$  die Lie-Algebra von  $G$ . Wenn  $e$  das Einselement von  $G$  ist, dann gilt  $L'_a(e)X_e = X_a$ . Damit sind linksinvariante Vektorfelder durch ihre Werte im Einselement bestimmt, d.h.  $\mathfrak{g} \simeq T_eG$  als Isomorphismus von Vektorräumen.

### 3.5.1 Exponentialabbildung

**Satz 22** Sei  $\mathfrak{g}$  die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe  $G$  und  $e$  das Einselement von  $G$ .

1. Jedes Element  $A \in \mathfrak{g}$  generiert eine globale einparametrische Gruppe  $\phi_A$  von Diffeomorphismen
2.  $\phi_A(e, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow G$  ist Homomorphismus von Lie-Gruppen, d.h.  $\phi_A(e, s+t) = \phi_A(e, s)\phi_A(e, t)$  für alle  $s, t \in \mathbb{R}$
3.  $\phi_{sA}(e, t) = \phi_A(e, st)$  für alle  $s, t \in \mathbb{R}$

*Beweis:* Sei  $\phi_A(e, \cdot) : I \rightarrow G$  die lokale Integralkurve von  $A$  durch  $e$  mit  $I = (t_{\min}, t_{\max})$ , d.h.  $\phi_A(e, 0) = e$  und  $(Af)(\phi_A(e, t)) = \frac{d}{dt}(f \circ \phi_A(e, t))$  für alle  $f \in C^\infty(G)$ .

Wir zeigen zunächst: Falls  $s, t, s+t \in I$ , dann gilt  $\phi_A(e, s)\phi_A(e, t) = \phi_A(e, s+t)$ . Wir bezeichnen  $g = \phi_A(e, s)$  und betrachten die Kurven

$$\begin{aligned}\gamma : I \ni t &\mapsto g \cdot \phi_A(e, t) \in G, \\ \tilde{\gamma} : (t_{\min} - s, t_{\max} - s) \ni t &\mapsto \phi_A(e, s+t) \in G.\end{aligned}$$

Dann sind  $\gamma, \tilde{\gamma}$  Integralkurven von  $A$  durch  $g = g \cdot \phi_A(e, 0) = \phi_A(e, s)$ , denn

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) &= \frac{d}{dt}(f \circ L_g(\phi_A(e, t))) = \frac{d}{dt}((L_g^*f)(\phi_A(e, t))) = (A(L_g^*f))(\phi_A(e, t)) \\ &= (A(L_g^*f))(L_{g^{-1}} \circ L_g \circ \phi_A(e, t)) = (((L_g)_*A)f)(L_g \circ \phi_A(e, t)) \\ &= (Af)(g\phi_A(e, t)) = (Af)(\gamma(t))\end{aligned}$$

und

$$\frac{d}{dt}(f \circ \tilde{\gamma}(t)) = \frac{d}{dt}(f \circ \phi_A(e, t+s)) = (Af)(\phi_A(e, t+s)) = (Af)(\tilde{\gamma}(t)).$$

Da die Integralkurve eindeutig, stimmen  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  auf dem gemeinsamen Definitionsbereich  $I \cap (t_{\min} - s, t_{\max} - s)$  überein.

Wir zeigen nun  $I = \mathbb{R}$ . Angenommen,  $t_{\max} < \infty$ . Mit  $\alpha = \min(t_{\max}, |t_{\min}|)$  setzen wir  $\gamma(t) = \phi_A(e, \frac{\alpha}{2})\phi_A(e, t - \frac{\alpha}{2})$ . Dann ist  $\gamma(0) = \phi_A(e, \frac{\alpha}{2})\phi_A(e, -\frac{\alpha}{2}) = e$  und mit  $g = \phi_A(e, \frac{\alpha}{2})$  gilt für  $t \in (t_{\min} + \frac{\alpha}{2}, t_{\max} + \frac{\alpha}{2})$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) &= \frac{d}{dt}((L_g^*f)(\phi_A(e, t - \frac{\alpha}{2}))) = (A(L_g^*f))(\phi_A(e, t - \frac{\alpha}{2})) \\ &= (((L_g)_*A)f)(L_g \circ \phi_A(e, t - \frac{\alpha}{2})) \\ &= (Af)(\gamma(t))\end{aligned}$$

Damit ist  $\gamma(t)$  eine Fortsetzung der Integralkurve über  $I$  hinaus. Durch Iteration des Verfahrens wird  $I$  auf ganz  $\mathbb{R}$  ausgedehnt.

Schließlich sei  $\gamma(t) = \phi_X(e, st)$ , dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) &= \frac{d}{dt}(f \circ \phi_A(e, st)) = s \frac{d}{d(st)}(f \circ \phi_A(e, st)) = s(Af)(\phi_A(e, st)) \\ &= ((sA)f)(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Damit ist  $\phi_A(e, st)$  die Integralkurve von  $sA$  durch  $e$ , d.h.  $\phi_{sA}(e, t) = \phi_A(e, st)$ .  
□

**Definition 43** Sei  $\mathfrak{g}$  die Lie-Algebra von  $G$ . Die Abbildung  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ ,  $\exp(A) = \phi_A(e, 1)$  heißt Exponentialabbildung von  $G$ .

**Satz 23** Die Exponentialabbildung  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  ist ein lokaler Diffeomorphismus um den Nullvektor  $0 \in \mathfrak{g}$ . Es gilt

1.  $\exp(0) = e$
2.  $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$
3.  $\exp((t+s)A) = \exp(tA) \exp(sA)$

für  $s, t \in \mathbb{R}$  und  $A \in \mathfrak{g}$ .

*Beweis:* Eigenschaften der globalen einparametrischen Gruppe von Diffeomorphismen  $\phi_A$ . □

**Satz 24** Falls  $f$  eine reell-analytische Funktion auf  $G$  und  $A \in \mathfrak{g}$ , dann ist  $f(a \exp A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A^k f)(a)$  für  $a \in G$ .

*Beweis:* Sei  $\phi_A(e, t) = \exp(tA)$  die Integralkurve von  $A$  durch  $e$ , dann ist  $(Af)(a) = (Af)(L_a \phi_A(e, t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ L_a \circ \phi_A(e, t))|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(a \exp(At))|_{t=0}$ . Analog folgt  $Af(a \exp(sA)) = \frac{d}{dt} f(a \exp(sA) \exp(tA))|_{t=0} = \frac{d}{ds} f(a \exp(sA))$ . Durch Iteration erhalten wir  $A^k f(a \exp(sA)) = \frac{d^k}{ds^k} f(a \exp(sA))$ . Da  $f$  analytisch, ist  $f(a \exp(sA)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \left( \frac{d^k}{ds^k} f(a \exp(sA)) \Big|_{s=0} \right)$ . Für  $s = 1$  und mit der zuvor hergeleiteten Formel bei  $s = 0$  folgt die Behauptung. □

Daraus folgt zunächst

$$f(a \exp(tA) \exp(tB)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (B^k f)(a \exp(tA)) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{t^{k+l}}{k!l!} (A^l (B^k f))(a).$$

Die Frage ist nun, ob es eine formale Potenzreihe  $C(t) = \sum_{i=1}^{\infty} t^i C_i \in \mathfrak{g}$  gibt, so daß  $f(a \exp(tA) \exp(tB)) = f(a \exp(C(t)))$  gilt. Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$t^1 : \quad C_1 f = (A + B)f$$

$$\begin{aligned}
t^2 : \quad & \left(\frac{C_1^2}{2} + C_2\right)f = \left(\frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2} + AB\right)f \\
& \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}[A, B], \\
t^3 : \quad & \left(\frac{C_1^3}{6} + \frac{C_2C_1 + C_1C_2}{2} + C_3\right)f = \left(\frac{A^3}{6} + \frac{B^3}{6} + \frac{A^2B + AB^2}{2}\right)f \\
& \Rightarrow C_3 = \frac{1}{12}([A, [A, B]] + [B, [B, A]]),
\end{aligned}$$

Man kann beweisen, daß  $C_i \in \mathfrak{g}$  (Baker-Campbell-Hausdorff Formel).

### 3.5.2 Karten der Lie-Gruppe

Sei  $V \subset \mathfrak{g}$  eine offene Umgebung des Nullvektors, dann ist  $U_e = \exp(V) \subset G$  eine offene Umgebung des Einselements und  $U_a = L_a \exp(V)$  eine offene Umgebung von  $a \in G$ . Wir definieren durch  $\kappa_a = \exp^{-1} \circ L_{a^{-1}}$  eine Abbildung  $\kappa_a : U_a \rightarrow V$ . Dann ist  $(U_a, \kappa_a)$  eine Karte von  $G$ . Für  $a, b \in G$  ist der Kartenwechsel  $\kappa_a \circ \kappa_b^{-1} : \kappa_b(U_a \cap U_b) \rightarrow \kappa_a(U_a \cap U_b)$  gegeben durch

$$\kappa_a \circ \kappa_b^{-1}(A) = \kappa_a \circ L_b(\exp A) = \exp^{-1}(L_{a^{-1}b}(\exp A)).$$

Da  $\exp$  und  $L_{a^{-1}b}$  Diffeomorphismen sind, ist auch der Kartenwechsel ein Diffeomorphismus.

**Satz 25** *Sei  $G$  eine Lie-Gruppe und  $H$  eine (im Sinne der Konvergenz von Folgen) abgeschlossene Untergruppe von  $G$ . Dann ist  $H$  eine Lie-Untergruppe von  $G$  mit Lie-Algebra  $\mathfrak{h} = \{A \in \mathfrak{g}, \exp(tA) \in H \forall t \in \mathbb{R}\}$ , und die Gruppenoperationen  $H \times H \ni (a, b) \mapsto a^{-1}b \in H$  sind differenzierbar, d.h.  $H$  selbst eine Lie-Gruppe.*

Bemerkung: Wir hatten zuvor Lie-Untergruppen der  $GL(n, \mathbb{K})$  konstruiert, aber die Differenzierbarkeit der Gruppenoperationen noch nicht bewiesen.

*Beweis:* Zu zeigen ist zunächst, daß  $\mathfrak{h}$  ein linearer Raum ist, d.h.  $A + B \in \mathfrak{h}$  für  $A, B \in \mathfrak{h}$ . (Daß  $tA \in \mathfrak{h}$  für  $A \in \mathfrak{h}$ , folgt aus der Definition.) Aus der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel folgt

$$H \ni \exp(tA) \exp(tB) = \exp(t(A + B + X(t)))$$

mit  $X(t) \in \mathfrak{g}$ . Wir wählen eine gegen Null strebende Folge positiver Zahlen  $t_i$ , so daß  $C_i = t_i(A + B + X(t_i)) \neq 0$ . Dann ist  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{C_i}{\|C_i\|} = \frac{A+B}{\|A+B\|}$  mit der Norm definiert über  $T_e G \simeq \mathbb{R}^n$ . Sei nun  $t \in \mathbb{R}$  fixiert und  $c_i \in \mathbb{Z}$  so gewählt, daß  $c_i \|C_i\| < t \leq (c_i + 1) \|C_i\|$ . Da  $C_i$  gegen Null strebt, ist  $\lim_{i \rightarrow \infty} c_i \|C_i\| = t$ . Dann folgt

$$H \ni (\exp(C_i))^{c_i} = \exp(c_i C_i) = \exp\left(c_i \|C_i\| \frac{C_i}{\|C_i\|}\right)$$

Da  $H$  abgeschlossen, erhalten wir für  $i \rightarrow \infty$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \exp\left(c_i \|C_i\| \frac{C_i}{\|C_i\|}\right) = \exp\left(t \frac{(A+B)}{\|A+B\|}\right) \in H \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Somit ist  $\mathfrak{h}$  ein linearer Raum. Analog folgt für den nächsten Term der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$H \ni \exp(tA) \exp(tB) \exp(-t(A+B)) = \exp\left(\frac{t^2}{2}([A, B] + X(t))\right),$$

daß für  $A, B \in \mathfrak{h}$  auch  $[A, B] \in \mathfrak{h}$  ist.

Seien  $n$  und  $r$  die Dimensionen von  $\mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{h}$ . Wir zeigen, daß  $H$  eine  $r$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $G$  ist, indem wir für jeden Punkt  $a \in H$  eine Karte  $(U, \kappa)$  von  $G$  angeben, so daß  $\kappa(U \cap H) = \kappa(U) \cap \{\mathbb{R}^r \times \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-r}\}$ .

Sei  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$  und  $\phi : \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \rightarrow G$  gegeben durch  $\phi(X \oplus Y) = \exp(X) \exp(Y)$ . Wir wissen, daß  $\phi$  ein Diffeomorphismus auf einer Umgebung  $V = V_{\mathfrak{h}} \times V_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$  von 0 ist. Dabei kann  $V_{\mathfrak{m}}$  so gewählt werden, daß  $\exp(V_{\mathfrak{m}} \setminus \{0\}) \cap H = \emptyset$  ist. Denn sei  $X_i \in \mathfrak{m}$  eine gegen Null strebende Folge mit  $\exp(X_i) \in H$ , dann ist analog zum ersten Teil  $\lim_{i \rightarrow \infty} \exp(c_i \|X_i\| \frac{X_i}{\|X_i\|}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \exp(t \frac{X_i}{\|X_i\|}) \in H$ , so daß  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{X_i}{\|X_i\|} \in \mathfrak{h}$  wäre, im Widerspruch zu  $\frac{X_i}{\|X_i\|} \in \mathfrak{m}$ .

Wählen wir  $U_e = \phi(V)$  und  $\kappa_e = \phi^{-1}$ , dann ist  $(U, \kappa)$  eine Karte von  $G$  um  $e \in H$  mit  $\kappa_e(U_e \cap H) = V_{\mathfrak{h}} \times \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-r} = \kappa_e(U_e) \cap (\mathbb{R}^r \times \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-r})$ .

Andere Karten  $(U_a, \kappa_a)$  um  $a \in H$  ergeben sich durch Linksmultiplikation:  $(U_a = L_a U_e, \kappa_a = \phi^{-1} \circ L_{a^{-1}})$ . Somit ist  $H$  eine Untermannigfaltigkeit von  $G$ , also eine Lie-Untergruppe.

Karten auf  $H$  werden nun durch Einschränkung dieser Karten auf  $H$  erhalten: Für  $a \in H$  setzen wir  $U_a^H := U_a \cap H$  und  $\kappa_a^H = \text{pr}_1 \circ \kappa_a$ , wobei  $\text{pr}_1$  die Einschränkung von  $V_{\mathfrak{h}} \times \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-r}$  auf die ersten  $r$  Komponenten ist. Entsprechend ist  $(\kappa_a^H)^{-1} = L_a \circ \exp : \mathfrak{h} \rightarrow H$ .

Seien nun  $a, b \in H$  mit  $a \in U_{\hat{a}}^H$  und  $b \in U_{\hat{b}}^H$ . Die Multiplikation  $m : U_{\hat{a}}^H \times U_{\hat{b}}^H \rightarrow U_{\hat{a}\hat{b}}^H$  ist differenzierbar, wenn die Abbildung  $\kappa_{\hat{a}\hat{b}}^H \circ m \circ ((\kappa_{\hat{a}}^H)^{-1}, (\kappa_{\hat{b}}^H)^{-1}) : V_{\mathfrak{h}} \times V_{\mathfrak{h}} \rightarrow V_{\mathfrak{h}}$  differenzierbar ist. Das ist aber eine Kombination aus Linksmultiplikation und Exponentialabbildung, welche differenzierbar ist. Entsprechend haben wir für  $a \in U_{\hat{a}}^H$  die Darstellung  $a = \hat{a} \exp(A)$  mit  $A \in \mathfrak{h}$  und  $a^{-1} = \exp(-A) \hat{a}^{-1}$  mit  $A \in \mathfrak{h}$ . Dann ist die Inversion  $i : a \mapsto a^{-1}$  differenzierbar, wenn  $(\kappa_{\hat{a}^{-1}}^H \circ i \circ (\kappa_{\hat{a}}^H)^{-1})$  differenzierbar ist. Diese Abbildung ist aber die Kombination aus Exponentialabbildung und Multiplikation und deshalb differenzierbar.  $\square$

## 3.6 Tensorbündel

### 3.6.1 Tensoren

**Definition 44** Seien  $V_i, i = 1, \dots, n$ , und  $W$  Vektorräume. Eine Abbildung  $F : \times_{i=1}^n V_i \rightarrow W$  heißt  $n$ -Linearform, wenn sie in jeder Komponente  $V_i$  linear ist.

Natürliche Vektorraum-Struktur:  $(\alpha F_1 + \beta F_2)(v_1, \dots, v_n) = \alpha F_1(v_1, \dots, v_n) + \beta F_2(v_1, \dots, v_n)$ .

**Definition 45** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$  und  $V^*$  sein Dualraum. Eine Multilinearform  $F : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  $p$ -fach

kovarianter und  $q$ -fach kontravarianter Tensor. Das Paar  $(p, q)$  heißt die Valenz des Tensors. Der zugehörige Vektorraum der Multilinearformen mit dieser Struktur wird mit  $V_p^q$  bezeichnet.

Operationen

- skalare Multiplikation:

$$(\alpha f)(X_1, \dots, X_p, \xi^1, \dots, \xi^q) = \alpha \cdot f(X_1, \dots, X_p, \xi^1, \dots, \xi^q)$$

- Addition von Tensoren der gleichen Valenz:

$$\begin{aligned} & (f_1 + f_2)(X_1, \dots, X_p, \xi^1, \dots, \xi^q) \\ &= f_1(X_1, \dots, X_p, \xi^1, \dots, \xi^q) + f_2(X_1, \dots, X_p, \xi^1, \dots, \xi^q) \end{aligned}$$

- Multiplikation von Tensoren  $f_1 \in V_p^q, f_2 \in V_{r-p}^{s-q}$ :

$$\begin{aligned} & (f_1 \otimes f_2)(X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_r, \xi^1, \dots, \xi^q, \xi^{q+1}, \dots, \xi^s) \\ &= f_1(X_1, \dots, X_p, \xi^1, \dots, \xi^q) f_2(X_{p+1}, \dots, X_r, \xi^{q+1}, \dots, \xi^s) \end{aligned}$$

$$f_1 \otimes f_2 \neq f_2 \otimes f_1$$

- Symmetrisierung, Antisymmetrisierung

- Kontraktion:  $f \in V_p^q \rightarrow \hat{f} \in V_{p-1}^{q-1}$  bezüglich der  $k$ -ten und  $l$ -ten Komponente:

$$\begin{aligned} & \hat{f}(X_1, \dots, \widehat{X}_k, \dots, X_p, \xi^1, \dots, \widehat{\xi}^l, \dots, \xi^q) \\ &= \sum_{i=1}^n f(X_1, \dots, X_{k-1}, e_i, X_{k+1}, \dots, X_p, \xi^1, \dots, \xi^{l-1}, e^{*i}, \xi^{l+1}, \dots, \xi^q), \end{aligned}$$

wobei  $e_i$  eine Basis von  $V$  und  $e^{*j}$  die dazu duale Basis von  $V^*$  ist

- Überschieben=Multiplikation+Kontraktion

### 3.6.2 Tensorprodukte von Vektorbündeln

Seien  $E_1, E_2$  Vektorbündel über  $M$ , dann definieren wir  $E_1 \otimes E_2 = \bigcup_{x \in M} (E_1)_x \otimes (E_2)_x$  und statten  $E_1 \otimes E_2$  mit folgenden Karten aus: TODO

Beispiele sind  $T_p^q(M) = \bigotimes_{i=1}^p TM \otimes \bigotimes_{j=1}^q T^*M$  und  $\Lambda^k M = \Lambda^k T^*M \equiv \bigwedge_{j=1}^k T^*M$  (vollständig antisymmetrisierte Tensorprodukte von  $T^*M$ ).

Schnitte dieser Bündel liefern Tensorfelder:

- $\Gamma^\infty(TM) = \mathfrak{X}(M)$  – Vektorfelder
- $\Gamma^\infty(T^*M)$  – Kovektorfelder
- $\Gamma^\infty(T_p^q(M))$  – Tensorfelder vom Typ  $(p, q)$
- $\Gamma^\infty(\Lambda^k M)$  –  $k$ -Formen

### 3.6.3 Lie-Ableitung nach einem Vektorfeld

Sei  $\phi : M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus von Mannigfaltigkeiten. Dann induziert  $\phi$  einen Transport  $\phi^* : \Gamma^\infty(T_p^q(N)) \rightarrow \Gamma^\infty(T_p^q(M))$  der Tensorfelder durch

$$(\phi^* t_p^q)_x(v_1, \dots, v_p, v^{*1}, \dots, v^{*q}) = (t_p^q)_{\phi(x)}((\phi_* v_1, \dots, \phi_* v_p, (\phi^{-1})^* v^{*1}, \dots, (\phi^{-1})^* v^{*q})),$$

für  $v_i \in \Gamma^\infty(TM)$  und  $v^{*j} \in \Gamma^\infty(T^*M)$ . Dabei ist  $((\phi^{-1})^* v^*)(v) = v^*(\phi_* v)$  für  $v^* \in \Gamma^\infty(T^*N)$  und  $v \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Definition 46** Sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ein Vektorfeld und  $T$  ein geometrisches Objekt auf  $M$ , also z.B. eine Funktion oder ein Schnitt eines Vektorbündels. Die Lie-Ableitung von  $T$  nach dem Vektorfeld  $X$  ist wieder ein geometrisches Objekt vom gleichen Typ wie  $T$  und definiert als

$$(\mathcal{L}_X T)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( ((\phi_X^*)_t T)_x - t_x \right).$$

Dabei ist der Transport  $(\phi_X)_t^*$  von  $T$  vom Punkt  $\phi_X(x, t)$  in den Punkt  $x$  induziert durch die von  $X$  erzeugte einparametrische Gruppe von lokalen Diffeomorphismen  $\phi_X(x, t)$ . Dieser Transport ist entsprechend der Natur des geometrischen Objekts zu wählen, also z.B.

$$\begin{aligned} ((\phi_X)_t^* f)(x) &= f((\phi_X)_t(x)) \quad \text{für } f \in C^\infty(M), \\ ((\phi_X)_t^* Y)_x &= ((\phi_X)_{-t} Y)_x = (\phi_X)'_{-t}(\phi_X(x, t)) Y_{\phi_X(x, t)} \quad \text{für } Y \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

Die Idee ist also, das Objekt  $T$  an der Stelle  $\phi_X(x, t)$  mit jenem an der Stelle  $x$  zu vergleichen. Das ist direkt aber nicht möglich, da es sich dabei um verschiedene Räume handelt. Also wird der Transport  $(\phi_X)_t^*$  verwandt, um  $T_{\phi_X(x, t)}$  an die Stelle  $x$  zu bringen und dort verglichen.

**Satz 26** Die Lie-Ableitung von Funktionen bzw. Vektorfeldern nach einem Vektorfeld  $X$  ist gegeben durch  $\mathcal{L}_X f = Xf$  bzw.  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ .

*Beweis:* Wir haben

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X f)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( (f(\phi_X)_t(x)) - f(x) \right) = \frac{d}{dt} (f \circ \phi_X(x, t)) \Big|_{t=0} = (Xf)(\phi_X(x, 0)) \\ &= (Xf)(x) \end{aligned}$$



Sei  $\phi_Y(x, s)$  die durch das Vektorfeld  $Y$  erzeugte einparametrische Gruppe von lokalen Diffeomorphismen. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
((\mathcal{L}_X Y)f)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( ((\phi_X)_{-t}^* Y)_x - Y_x \right) (f) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( (\phi_X)_t^* (Y((\phi_X)_{-t}^* f))(x) - Y_x f \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left( (Y((\phi_X)_{-t}^* f))(\phi_X(x, t)) \right) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} ((\phi_X)_{-t}^* f) \circ (\phi_Y)_s \circ (\phi_X)_t(x) \Big|_{t,s=0} \\
&= \frac{d}{ds} (X(f \circ (\phi_Y)_s))(x) \Big|_{s=0} - \frac{d}{ds} (Xf)((\phi_Y)_s(x)) \Big|_{s=0} \\
&= (X(Y(f)))(x) - (Y(X(f)))(x) = [X, Y](f)(x)
\end{aligned}$$

### 3.6.4 Adjungierte Darstellung

**Definition 47** Sei  $G$  eine Lie-Gruppe. Die Abbildung  $G \ni g \mapsto \alpha_a(g) = aga^{-1} \in G$ , für  $a \in G$ , heißt innerer Automorphismus von  $G$ .

**Satz 27** Ein innerer Automorphismus von  $G$  induziert einen Automorphismus der Lie-Algebra  $\text{Ad}(a) = (\alpha_a)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ .

*Beweis:* Für allgemeine  $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$  gilt  $(\alpha_a)_*[X, Y] = [(\alpha_a)_*X, (\alpha_a)_*Y]$ . Zu zeigen bleibt, daß für  $A \in \mathfrak{g}$  auch  $\text{Ad}(a)A \in \mathfrak{g}$ . Wir haben  $(\alpha_a)_*A = (L_a \circ R_{a^{-1}})_*A = (L_a)_* \circ (R_{a^{-1}})_*A = (R_{a^{-1}})_*A$ , da Links- und Rechtsmultiplikation kommutieren. Weitere Anwendung von  $(L_b)_*$  zeigt, daß  $(\alpha_a)_*A \in \mathfrak{g}$ .  $\square$

**Satz 28** Der Automorphismus  $\text{Ad}(a)$  induziert eine Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  auf sich selbst durch  $\text{ad}(B)A = \frac{d}{dt}(\text{Ad}(\exp(Bt))A) \Big|_{t=0}$ . Es gilt  $\text{ad}(B)A = [B, A]$ .

Diese Darstellung heißt die adjungierte Darstellung der Lie-Algebra.

*Beweis:* In einem Zwischenschritt zum Beweis von  $\mathcal{L}_B A = [B, A]$  hatten wir für  $A, B \in \mathfrak{g}$  und  $f \in C^\infty(G)$

$$([B, A]f)(g) = \frac{d}{dt} (A((\phi_B)_{-t}^* f))(\phi_B(g, t)) \Big|_{t=0}$$

hergeleitet. Die Integralkurve für linksinvariante Vektorfelder ist gerade  $\exp$ , d.h.  $\phi_B(g, t) = g \exp(tB) = R_{\exp(tB)}g$ . Damit finden wir

$$\begin{aligned}
([B, A]f)(g) &= \frac{d}{dt} (A(R_{\exp(-tB)}^* f))(R_{\exp(tB)}g) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} (R_{\exp(tB)}^* (A(R_{\exp(-tB)}^* f)))(g) \Big|_{t=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt} \left( ((R_{\exp(-tB)})_* A) f \right) (g) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left( (\text{Ad}(\exp(tB)) A) f \right) (g) \Big|_{t=0} \\
&= (\text{ad}(B) A) f (g) .
\end{aligned}$$

Daß  $\text{ad}(B)$  eine Darstellung ist, folgt aus der Jacobi-Identität:

$$\begin{aligned}
\text{ad}([A, B])C &= [[A, B], C] = -[C, [A, B]] = [A, [B, C]] + [B, [C, A]] \\
&= [A, \text{ad}(B)C] - [B, \text{ad}(A)C] = \text{ad}(A)(\text{ad}(B)C) - \text{ad}(B)(\text{ad}(A)C) \\
&= [\text{ad}(A), \text{ad}(B)]C . \quad \square
\end{aligned}$$

Außerdem ist  $\text{ad}(A) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  eine Derivation, denn

$$\begin{aligned}
\text{ad}(C)[A, B] &= [C, [A, B]] = -[A, [B, C]] - [B, [C, A]] = [[C, A], B] + [A, [C, B]] \\
&= [\text{ad}(C)A, B] + [A, \text{ad}(C)B] .
\end{aligned}$$

### 3.7 Differentialformen

**Definition 48** Eine differentielle  $k$ -Form ist ein Schnitt des Vektorbündels  $\Lambda^k T^*M = \Lambda^k M$ .

Folgerung: Eine differentielle  $k$ -Form im Punkt  $x \in M$  ist eine  $k$ -lineare vollständig antisymmetrische Abbildung  $\alpha_x : \times_{i=1}^k T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ . Damit wird die  $k$ -Form  $\alpha$  selbst eine Abbildung  $\alpha : \times_{i=1}^k \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ .

**Definition 49** Das äußere Produkt ist die Abbildung  $\wedge : \Gamma^\infty(\Lambda^k M) \times \Gamma^\infty(\Lambda^l M) \rightarrow \Gamma^\infty(\Lambda^{k+l} M)$  definiert durch

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \sigma_\pi \alpha(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)}) \beta(X_{\pi(k+1)}, \dots, X_{\pi(k+l)}) .$$

Dabei ist  $S_n$  die Gruppe der Permutationen der Zahlen  $1, \dots, n$  und  $\sigma_\pi$  das Vorzeichen der Permutation, d.h. die Anzahl der Transpositionen, die  $1, 2, \dots, n$  in  $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$  überführt.

Es gilt

- $(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2) \wedge \beta = c_1 \alpha_1 \wedge \beta + c_2 \alpha_2 \wedge \beta, \quad f_1, f_2 \in C^\infty(M),$
- $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma,$
- $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha, \quad \alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^k M), \beta \in \Gamma^\infty(\Lambda^l M).$

**Definition 50** Das innere Produkt zwischen einem Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und einer differentiellen  $k$ -Form  $\alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^k M)$ ,  $k \geq 1$ , ist eine differentielle  $(k-1)$ -Form definiert durch

$$(i_X \alpha)(Y_1, \dots, Y_{k-1}) := \alpha(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}) ,$$

für  $Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Definition 51** Ein  $k$ -Vektorfeld ist ein Schnitt des Vektorbündels  $\Lambda^k TM$ .

Dann ist punktweise die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma^\infty(\Lambda^k TM) \times \Gamma^\infty(\Lambda^k T^*M) \rightarrow C^\infty(M)$  definiert durch  $\langle X_1 \wedge \dots \wedge X_k, \alpha \rangle = k! \alpha(X_1, \dots, X_k)$ .

**Definition 52** Die Abbildung  $\rfloor : \Gamma^\infty(\Lambda^k TM) \times \Gamma^\infty(\Lambda^{k+l} T^*M) \ni (X, \alpha) \rightarrow X \rfloor \alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^l T^*M)$  definiert durch  $(X \rfloor \alpha)(X_1, \dots, X_l) = \langle X \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_l, \alpha \rangle$  heißt Verjüngung der  $k+l$ -Form  $\alpha$  mit dem  $k$ -Vektorfeld  $X$ .

Es gilt:

- $(f_1 X_1 + f_2 X_2) \rfloor \alpha = f_1 (X_1 \rfloor \alpha) + f_2 (X_2 \rfloor \alpha)$ ,
- $X \rfloor (f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2) = f_1 (X \rfloor \alpha_1) + f_2 (X \rfloor \alpha_2)$ ,

### 3.7.1 Äußeres Differential

**Definition 53** Ein System von linearen Abbildungen  $d_k : \Gamma^\infty(\Lambda^k M) \rightarrow \Gamma^\infty(\Lambda^{k+1} M)$  heißt äußere Ableitung, wenn

1.  $d_{k+1} \circ d_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ ,
2.  $d_{k+l}(\alpha \wedge \beta) = d_k \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge d_l \beta \quad \forall \alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^k M), \beta \in \Gamma^\infty(\Lambda^l M)$ ,
3.  $d_0 f(X) = Xf \quad \forall f \in C^\infty(M), X \in \mathfrak{X}(M)$ ,
4. Die Abbildungen  $d_k$  sind lokal, d.h. wenn für eine offene Umgebung  $U \subset M$  gilt  $\alpha|_U = \beta|_U$ , dann ist  $(d\alpha)|_U = d(\alpha|_U) = d(\beta|_U) = (d\beta)|_U$ .

**Satz 29** Es existiert genau ein System von linearen Abbildungen  $d_k$ , das 1-4 erfüllt.

*Beweis:* Sei  $\alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^k M)$ . Wir definieren die Operatoren  $d_k$  durch

$$(d_k \alpha)(X_0, X_1, \dots, X_k) := \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\alpha(X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, X_k)) \\ + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_k),$$

für  $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ . Dabei bedeutet  $\check{X}_i$ , daß das Vektorfeld  $X_i$  wegzulassen ist. Eigenschaften 3 und 4 folgen direkt aus der Definition. Wir überprüfen 1:

$$(d_{k+1} \circ d_k \alpha)(X_0, X_1, X_1, \dots, X_{k+1}) \\ = \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i((d_k \alpha)(X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ + \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} (d_k \alpha)([X_i, X_j], X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} X_i(X_j(\alpha(X_0, \dots, \check{X}_j, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1}))) \\
&+ \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{j=i+1}^k (-1)^{i+j+1} X_i(X_j(\alpha(X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}))) \\
&+ \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} [X_i, X_j](\alpha(X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_k)) \\
&+ \sum_{i=2}^{k+1} \sum_{0 \leq j < l < i} (-1)^{i+j+l} X_i(\alpha([X_j, X_l], X_0, \dots, \check{X}_j, \dots, \check{X}_l, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+1}))) \\
&+ \sum_{i=1}^k \sum_{0 \leq j < i} \sum_{l=i}^{k+1} (-1)^{i+j+l+1} X_i(\alpha([X_j, X_l], X_0, \dots, \check{X}_j, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_l, \dots, X_{k+1}))) \\
&+ \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{i < j < l \leq k+1} (-1)^{i+j+l+2} X_i(\alpha([X_j, X_l], X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, \check{X}_l, \dots, X_{k+1}))) \\
&+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} \sum_{l=0}^i (-1)^{i+j+l+1} X_l(\alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \check{X}_l, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}))) \\
&+ \sum_{0 \leq i < l < k+1} \sum_{j=l}^{k+1} (-1)^{i+j+l+2} X_l(\alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_l, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}))) \\
&+ \sum_{0 \leq i < j < k+1} \sum_{l=j+1}^{k+1} (-1)^{i+j+l+3} X_l(\alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, \check{X}_l, \dots, X_{k+1}))) \\
&+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j+l+1} \alpha([X_i, X_j], X_l, X_0, \dots, \check{X}_l, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}) \\
&+ \sum_{0 \leq i < l \leq k} \sum_{j=l+1}^{k+1} (-1)^{i+j+l+2} \alpha([X_i, X_j], X_l, X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_l, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}) \\
&+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} \sum_{l=j+1}^{k+1} (-1)^{i+j+l+3} \alpha([X_i, X_j], X_l, X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, \check{X}_l, \dots, X_{k+1}) \\
&+ \sum_{0 \leq l < m < i < j \leq k+1} (-1)^{i+j+l+m} \alpha([X_l, X_m], [X_i, X_j], X_0, \dots, \check{X}_l, \dots, \check{X}_m, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}) \\
&+ \sum_{0 \leq l < i < m < j \leq k+1} (-1)^{i+j+l+m+1} \alpha([X_l, X_m], [X_i, X_j], X_0, \dots, \check{X}_l, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_m, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}) \\
&+ \sum_{0 \leq l < i < j < m \leq k+1} (-1)^{i+j+l+m+2} \alpha([X_l, X_m], [X_i, X_j], X_0, \dots, \check{X}_l, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, \check{X}_m, \dots, X_{k+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{0 \leq i < l < m < j \leq k+1} (-1)^{i+j+l+m+2} \alpha([X_l, X_m], [X_i, X_j], X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_l, \dots, \check{X}_m, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+1}) \\
& + \dots
\end{aligned}$$

Wir überprüfen 2:

$$\begin{aligned}
& (d_{k+l}(\alpha \wedge \beta))(X_0, X_1, \dots, X_{k+l}) \\
& = \sum_{i=0}^{k+l} (-1)^i X_i ((\alpha \wedge \beta)(X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{k+l})) \\
& + \sum_{0 \leq i < j \leq k+l} (-1)^{i+j} (\alpha \wedge \beta)([X_i, X_j], X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{k+l}) \\
& = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{i=0}^{k+l} (-1)^i \sum_{\pi \in S_{0, \dots, \check{i}, \dots, k+l}} \sigma_\pi X_i (\alpha(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)}) \beta(X_{\pi(k+1)}, \dots, X_{\pi(k+l)})) \\
& + \frac{1}{(k+l)!} \sum_{-1 \leq i < j \leq k+l} (-1)^{i+j} \sum_{\pi \in S_{-1, 0, \dots, \check{i}, \dots, \check{j}, \dots, k+l}} \alpha(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)}) \beta(X_{\pi(k+1)}, \dots, X_{\pi(k+l)})
\end{aligned}$$

mit  $X_{-1} = [X_i, X_j]$ . Andererseits haben wir

$$\begin{aligned}
& ((d_k \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d_l \beta))(X_0, X_1, \dots, X_{k+l}) \\
& =
\end{aligned}$$

Bleibt die Eindeutigkeit: In einer Umgebung  $U \subset M$  kommutieren die Vektorfelder  $X_i$  entlang der Koordinatenfunktionen  $x^i$ :  $[X_i, X_j] = 0$ . Wir setzen  $\alpha(X_1, \dots, X_k) = \alpha_{1, \dots, k}$ . Dann vereinfacht sich die Formel zu

$$\begin{aligned}
(d_k \alpha)|_U(X_0, \dots, X_k) & = (d_k \alpha)_{0, \dots, k}|_U \\
& = \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i (\alpha(X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, X_k))|_U \\
& = \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i \alpha_{0, \dots, \check{i}, \dots, k}|_U
\end{aligned}$$

Sei  $\{d'_k\}$  ein zweites System, das 1-4 erfüllt, dann gilt  $(d'_k \alpha)|_U(X_0, \dots, X_k) = (d'_k \alpha)_{0, \dots, k}|_U$  wegen 4. Da  $d$  und  $d'$  auf Funktionen übereinstimmen, folgt die Übereinstimmung auf allen Formen.  $\square$

Wir werden den Formengrad-Index am Differential meist weglassen und einfach  $d$  schreiben. Dann ist insbesondere  $d^2 = 0$ .

### 3.7.2 Differentialformen im $\mathbb{R}^n$

Für  $M = U \subset \mathbb{R}^n$  stimmen die Koordinaten-Funktionen  $x^i$  mit den  $i$ -ten Komponenten von  $x \subset U$  überein. Dann sind die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  Vektorfelder

entlang der Integralkurven  $\gamma_i(t) = (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$ , denn

$$\begin{aligned} (X_i f)(\gamma_i(t)) &= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_i(t)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(0, \dots, 0, t+h, 0, \dots, 0) - f(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i}(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Ein beliebiger Tangentialvektor  $v_x \in T_x U$  läßt sich nun schreiben als  $v_x = \sum_{i=1}^n v_x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

Für die Differentiale der Koordinaten-Funktionen gilt wegen  $(df)(X) = Xf$  die Identität  $(dx^i)(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_i^j$ . Damit bilden die  $\{dx^i\}_{i=1}^n$  eine Basis des Kotangentenraums  $T_x^* U$ , die zur Basis  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$  von  $T_x U$  dual ist. Da Differentialformen  $\alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^k U)$  im Punkt  $x \in U$  das antisymmetrische Tensorprodukt von Kotangentenvektoren sind, können sie als  $\alpha_x = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{1}{k!} \alpha_{x i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  geschrieben werden. Es gilt gerade

$$\alpha_x \left( \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \right) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \sigma_\pi \alpha_{x i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(k)}}$$

Ist speziell  $\alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^n U)$ , dann erhalten wir  $\alpha_x = \alpha_{x[1 \dots n]} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  mit  $\alpha_{x[1 \dots n]} := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \sigma_\pi \alpha_{x i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(n)}}$ .

Wenn nun  $\alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^n U)$  auf dem Komplement  $U \setminus V$  einer kompakten Teilmenge  $V \subset U$  verschwindet, dann können wir  $\alpha$  über  $U$  integrieren:

$$\int_U \alpha \equiv \int_U \alpha_{x[1 \dots n]} dx^1 dx^1 \dots dx^n.$$

Diese Integration läßt sich zu einer Integration auf Mannigfaltigkeiten ausdehnen.

### 3.7.3 Integration auf Mannigfaltigkeiten

Zur Erinnerung: Auf parakompakten Hausdorff-Räumen  $M$  mit gegebener offener Überdeckung  $\{U_i\}$  existiert eine Zerlegung der Eins, d.h. eine Familie stetiger Funktionen  $f_i : M \rightarrow [0, 1]$  mit folgenden Eigenschaften:

- Für jede dieser Funktionen existiert eine offene Umgebung aus der Überdeckung, so daß  $f_i(x) = 0 \forall x \in M \setminus U_i$
- Jeder Punkt  $x \in M$  besitzt eine Umgebung  $V$ , so daß es nur endlich viele Funktionen  $f_j$  gibt, die auf  $V$  nicht identisch verschwinden, und  $\sum_j f_j(y) = 1 \forall y \in V$ .

Eine Mannigfaltigkeit  $M$  heißt orientierbar ist, wenn ein Atlas  $(U_i, \kappa_i)$  von  $M$  existiert, so daß für beliebige Karten  $(U_i, \kappa_i)$  und  $(U_j, \kappa_j)$  mit  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  gilt  $\det(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1})'(x) > 0 \forall x \in \kappa_j(U_i \cap U_j)$ .

**Definition 54** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit fixiertem Atlas  $(U_i, \kappa_i)$  und  $\{f_i\}$  eine Zerlegung der Eins bezüglich  $\{U_i\}$ . Das Integral einer  $n$ -Form  $\alpha \in \Gamma^\infty(M)$  über  $M$  ist definiert als

$$\int_M \alpha = \sum_i \int (\kappa_i^{-1})^*(f_i \alpha).$$

**Satz 30** Eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  ist genau dann orientierbar, wenn eine nirgends verschwindende  $n$ -Form existiert, d.h. ein  $\mu \in \Gamma^\infty(\Lambda^n M)$  mit  $\mu_x \neq 0 \forall x \in M$ . In diesem Fall heißt  $\mu$  die Volumenform von  $M$ .

Sei  $\alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^{n-k} M)$  und  $\beta \in \Gamma^\infty(\Lambda^k M)$ , dann ist  $\alpha \wedge \beta \in \Gamma^\infty(\Lambda^n M)$  und läßt sich über  $M$  integrieren. Das liefert eine Bilinearform  $(\cdot, \cdot) : \Gamma^\infty(\Lambda^{n-k} M) \times \Gamma^\infty(\Lambda^k M) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge \beta$$

**Satz 31 (von Stokes)** Sei  $M$  eine orientierte  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit stückweise glattem Rand  $\partial M$  mit induzierter Orientierung und  $\alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^{n-1} M)$ . Dann gilt

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha$$

### 3.7.4 de Rham-Kohomologie

**Definition 55** Eine Differentialform  $\alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^k M)$  heißt *geschlossen* oder *Kozykel*, wenn  $d_k \alpha = 0$ , und *exakt* oder *Korand*, wenn es ein  $\beta \in \Gamma^\infty(\Lambda^{k-1} M)$  gibt mit  $\alpha = d_{k-1} \beta$ .

Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} Z^k(M) &= \{\alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^k M), d_k \alpha = 0\}, \\ B^k(M) &= \{d_{k-1} \beta, \beta \in \Gamma^\infty(\Lambda^{k-1} M)\}. \end{aligned}$$

Wegen  $d_k \circ d_{k-1} = 0$  gilt

$$B^k(M) \subset Z^k(M) \subset \Gamma^\infty(\Lambda^k M).$$

**Definition 56** Der Quotientenraum

$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$$

heißt die  $k$ -te Kohomologiegruppe von  $M$  im Sinne von de Rham. Elemente  $[\alpha] \in H^k(M)$  heißen de Rhamsche Kohomologieklassen. Die Dimension von  $H^k(M)$  heißt  $k$ -te Betti-Zahl  $b_k(M) = \dim(H^k(M))$ .

Elemente von  $H^k(M)$  sind also Äquivalenzklassen  $[\alpha]$  von Kozykeln  $\alpha \in Z^k(M)$ , mit  $\alpha_1 \sim \alpha_2$  wenn  $\alpha_1 - \alpha_2 \in B^k(M)$ . Das äußere Produkt von Differentialformen induziert ein Produkt von Kohomologieklassen  $\wedge : H^k(M) \times H^l(M) \ni ([\alpha], [\beta]) \mapsto [\alpha \wedge \beta] \in H^{k+l}(M)$ , denn

$$(\alpha + d\gamma) \wedge (\beta + d\delta) = \alpha \wedge \beta + d(\gamma \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \delta + \gamma \wedge d\delta) .$$

Die reellen Vektorräume  $B^k(M)$ ,  $Z^k(M)$  und  $\Gamma^\infty(\Lambda^k M)$  sind unendlich-dimensional, dagegen ist der Quotientenraum  $H^k(M)$  im allgemeinen endlich-dimensional. Es zeigt sich, daß die  $H^k(M)$  nicht von der differenzierbaren Struktur von  $M$  abhängen und topologische Eigenschaften von  $M$  beschreiben. Eine wichtige topologische Größe ist die Euler-Charakteristik von  $M$ ,

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k(M) .$$

**Lemma 4 (von Poincaré)** *Sei  $U$  ein sternförmiges Gebiet des  $\mathbb{R}^n$ , d.h. eine zusammenhängende offene Teilmenge mit einem Punkt  $x_0 \in U$ , so daß für jeden Punkt  $x \in U$  auch alle Punkte der Verbindungsstrecke  $tx + (1-t)x_0$ ,  $t \in [0, 1]$ , in  $U$  liegen. Dann gilt  $H^0(U) = \mathbb{R}$  und  $H^k(U) = \{0\}$  für  $k > 0$ .*

**Satz 32**  $H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{für } 0 < k < n \end{cases}$

Die durch Integration von Differentialformen gewonnene Bilinearform überträgt sich auf die Integration von Kohomologieklassen: Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit ohne Rand ( $\partial M = \emptyset$ ) und  $[\alpha] \in H^{n-k}M$  und  $[\beta] \in H^kM$ , dann haben wir

$$\begin{aligned} (\alpha + d\gamma, \beta + d\delta) &= \int_M ((\alpha + d\gamma) \wedge (\beta + d\delta)) \\ &= \int_M (\alpha \wedge \beta + d(\gamma \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \delta + \gamma \wedge d\delta)) \\ &= \int_M \alpha \wedge \beta . \end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß diese Bilinearform nicht ausgeartet ist, d.h. wenn  $(\alpha, \beta) = 0$  für alle  $\beta$ , dann folgt  $\alpha = 0$ . Dadurch wird ein kanonischer Isomorphismus  $H^k(M) \simeq H^{n-k}(M)^*$ , die Poincaré-Dualität, definiert. Besonders wichtig ist der Fall  $n = 4l$  und  $k = 2l$  und  $(, ) : H^{2l}(M) \times H^{2l}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Zahl der positiven Eigenwerte minus der Zahl der negativen Eigenwerte heißt die Signatur von  $M$  und ist eine topologische Invariante  $\sigma(M)$ .



## 3.8 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

**Definition 57** Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  ist eine Mannigfaltigkeit  $M$  zusammen mit einem Tensorfeld  $g \in \Gamma^\infty(T^*M \otimes T^*M)$ , dem *metrischen Tensor*, so daß

- $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  ist symmetrisch,
- Für alle  $x \in M$  ist die Bilinearform  $g_x : T_xM \times T_xM \rightarrow \mathbb{R}$  nichtausgeartet, d.h. falls  $g_x(v, w) = 0$  für alle  $v \in T_xM$  genau dann, wenn  $w = 0$ .

Falls  $g_x(v, v) > 0$  für alle  $x \in M$  und  $v \in T_xM, v \neq 0$ , so ist  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit im eigentlichen Sinn, ansonsten eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Im ersten Fall liefert der metrische Tensor in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit ein inneres Produkt von Tangentialvektoren:  $\langle v, w \rangle = g_x(v, w)$  für  $v, w \in T_xM$ .

Riemannsche Mannigfaltigkeiten bilden die geometrische Grundlage für die Einsteinsche Gravitationstheorie. Das wird später behandelt werden.

### 3.8.1 Hodge-Dualität

Eine nichtausgeartete Bilinearform  $g_x$  auf  $T_xM$  liefert eine Isomorphismus  $g_x : T_xM \rightarrow T_x^*M$  durch  $(g_x(v))(w) = g_x(v, w)$ . Entsprechend ist  $g_x^{-1} : T_x^*M \rightarrow T_xM$  ebenfalls ein Isomorphismus. Dieser wird genutzt, um Differentialformen in Multi-Vektorfelder umzuwandeln:

$$\Lambda^k g^{-1} : \Gamma^\infty(\Lambda^k T^*M) \rightarrow \Gamma^\infty(\Lambda^k TM)$$

**Definition 58** Sei  $(M, g)$  eine orientierte  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $(e_1, \dots, e_n)$  ein lokales Orthonormalsystem, d.h.  $e_i \in \mathfrak{X}(U)$  mit  $g_x(e_i, e_j) = \delta_{ij}$  für alle  $x \in U \subset M$ . Die  $n$ -Form  $v_g \in \Gamma^\infty(\Lambda^n; )$  heißt kanonische Volumenform, falls  $(v_g(e_1, \dots, e_n))(x) = 1$  für alle  $x \in U$ .

**Definition 59 (Hodge-Stern)** Sei  $(M, g)$  eine orientierte  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^k M)$ . Dann ist

$$*\alpha := \Lambda^k g^{-1}(\alpha) \lrcorner v_g \in \Gamma^\infty(\Lambda^{n-k} M)$$

die duale Form im Sinne von Hodge/Kodaira.

Seien  $\alpha, \beta \in \Gamma^\infty(\Lambda^k M)$ , dann ist  $\alpha \wedge *\beta \in \Gamma^\infty(\Lambda^n M)$ . Diese Form kann über die Mannigfaltigkeit integriert werden und liefert eine Bilinearform

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \int_M \alpha \wedge *\beta$$

(kanonisches Skalarprodukt in  $\Gamma^\infty(\Lambda^k M)$ ). Es gilt  $**\alpha = (-1)^{k(n-k) + \frac{1}{2}(n-s)}\alpha$ , wobei  $s$  die Signatur von  $(M, g)$  bezeichnet, d.h. die Zahl der positiven Eigenwerte von  $g$  minus der Zahl der negativen Eigenwerte von  $g$ .

**Definition 60** Der durch

$$\langle \alpha, \delta_{k+1}\beta \rangle = \langle d_k\alpha, \beta \rangle, \quad \alpha \in \Gamma^\infty(\Lambda^k M), \beta \in \Gamma^\infty(\Lambda^{k+1} M),$$

definierte Operator  $\delta_{k+1} : \Gamma^\infty(\Lambda^{k+1} M) \rightarrow \Gamma^\infty(\Lambda^k M)$  heißt der zum äußeren Differential duale Operator im Sinne von Hodge/Kodaira.

Es gilt  $\delta = (-1)^{k(n-k) + \frac{1}{2}(n-s)} * d*$

Oft wird  $\delta$  auch das Kodifferential genannt, jedoch ist  $\delta$  kein Differential. Es gilt zwar  $\delta^2 = 0$ , d.h.  $\delta_k \circ \delta_{k+1} = 0$ , aber  $\delta$  ist keine Derivation des äußeren Produkts,  $\delta_{k+l}(\alpha \wedge \beta) \neq (\delta_k\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\delta_l\beta)$ .

**Definition 61** Der Laplace-Beltrami-Operator der orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  ist der Operator  $\Delta = d \circ \delta + \delta \circ d : \Gamma^\infty(\Lambda^k M) \rightarrow \Gamma^\infty(\Lambda^k M)$ .

## 4 Hauptfaserbündel und Zusammenhänge

### 4.1 Gruppenwirkung auf Mannigfaltigkeiten

**Definition 62** Sei  $G$  eine Lie-Gruppe. Eine Mannigfaltigkeit  $M$  heißt rechte  $G$ -Mannigfaltigkeit, wenn eine Abbildung  $\psi : M \times G \rightarrow M$ , die rechte Gruppenwirkung, erklärt ist, so daß

- $\psi_a : M \rightarrow M$  definiert durch  $\psi_a(x) = \psi(x, a)$  ist ein Diffeomorphismus für alle  $a \in G$ ,
- $\psi_a \circ \psi_b(x) = \psi_{ba}(x)$

Die Gruppenwirkung heißt

- transitiv, wenn für je zwei Elemente  $x, y \in M$  ein  $a \in G$  existiert mit  $y = \psi(x, a)$ ,
- effektiv, wenn aus  $\psi_a(x) = x$  für alle  $x$  folgt  $a = e$ ,
- frei (d.h. ohne Fixpunkt), wenn aus der Existenz eines  $x \in M$  mit  $\psi_a(x) = x$  folgt  $a = e$ .

**Satz 33** Sei  $(M, G)$  eine rechte  $G$ -Mannigfaltigkeit. Dann generiert jedes Element  $A \in \mathfrak{g}$  (Lie-Algebra von  $G$ ) eine lokale einparametrische Gruppe von Diffeomorphismen  $\phi(x, t) := \psi(x, \exp(tA))$  und damit ein Vektorfeld  $A_*$  auf  $M$  definiert durch

$$(A_*f)(x) = \left. \frac{d}{dt} \left( f \circ \psi_{\exp(tA)}(x) \right) \right|_{t=0}, \quad f \in C^\infty(M).$$

*Beweis:* Es gilt  $\phi(x, 0) = \psi_e(x) = x$  und  $\phi(\phi(x, s), t) = \psi_{\exp(At)}(\psi_{\exp(As)}(x)) = \psi_{\exp(As) \cdot \exp(At)}(x) = \psi_{\exp(A(s+t))}(x) = \phi(x, t + s)$   $\square$

Das Vektorfeld  $A_*$  heißt Killingfeld bzw. fundamentales Vektorfeld der Gruppenwirkung.

**Satz 34** • Die Abbildung  $\sigma : \mathfrak{g} \ni A \mapsto \sigma(A) = A_* \in \mathfrak{X}(M)$  ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren.

- $G$  wirkt effektiv  $\Rightarrow \sigma$  ist injektiv
- $G$  wirkt frei  $\Rightarrow$  falls  $A \neq 0$ , dann ist  $A_* \neq 0$  überall auf  $M$ .

*Beweis:* Linearität:

$$\begin{aligned} (\sigma(A+B)f)(x) &= \left. \frac{d}{dt} \left( f \circ \psi_{\exp(t(A+B))}(x) \right) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left( f \circ \psi_{\exp(tA)} \circ \psi_{\exp(tB)}(x) \right) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left( f \circ \psi_{\exp(tA)} \right) \right|_{t=0} \circ \psi_{\exp(0 \cdot B)}(x) + f \circ \psi_{\exp(0 \cdot A)} \circ \left. \frac{d}{dt} \left( \psi_{\exp(tB)}(x) \right) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

$$= (A_*f)(x) + (B_*f)(x)$$

Lie-Klammer:

$$\begin{aligned}
([A_*, B_*]f)(x) &= ((\mathcal{L}_{A_*} B_*)f)(x) = \frac{d}{dt} \left( ((\psi_{\exp(-tA)})_* B_*)f(x) \right) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \left( B_*((\psi_{\exp(-tA)})^* f)((\psi_{\exp(-tA)})^{-1}(x)) \right) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \left( ((\psi_{\exp(-tA)})^* f) \circ \psi_{\exp(sB)} \circ (\psi_{\exp(tA)}(x)) \right) \Big|_{t=0, s=0} \\
&= \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \left( f \circ \psi_{\exp(tA) \cdot \exp(sB) \cdot \exp(-tA)}(x) \right) \Big|_{t=0, s=0} \\
&= \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \left( f \circ \psi_{\exp(sB + \frac{1}{2}[tA, sB] + \frac{1}{2}[sB, -tA] + \mathcal{O}(st^2, s^2t))}(x) \right) \Big|_{t=0, s=0} \quad (\text{aus BCH}) \\
&= \frac{d}{dt} \left( ([tA, B] + \mathcal{O}(t^2))_* f(x) \right) \Big|_{t=0} \\
&= ([A, B]_* f)(x) \quad (\text{aus Linearität von } \sigma)
\end{aligned}$$

Injektivität: Sei  $\sigma(A) = 0$ , dann  $\frac{d}{dt}(f \circ \psi_{\exp(tA)}(x)) \Big|_{t=0} = 0$  für alle  $x$ . Damit gilt  $\psi_{\exp(tA)}(x) = x$  für alle  $x$ . Wenn  $G$  effektiv wirkt, so ist  $\exp(tA) = e$  und damit  $A = 0$ .

Nullverschiedenheit: Angenommen,  $\sigma(A) = 0$  in  $x_0 \in M$ , dann ist  $\frac{d}{dt}(f \circ \psi_{\exp(tA)}(x_0)) \Big|_{t=0} = 0$  und  $\psi_{\exp(tA)}(x_0) = x_0$ . Wenn  $G$  frei wirkt, dann folgt  $\exp(tA) = e$  und damit  $A = 0$ . Das bedeutet, daß aus  $A \neq 0$  stets  $A^* \neq 0$  folgt.  $\square$

## 4.2 Hauptfaserbündel

**Definition 63** Seien  $P, M$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten,  $G$  eine Lie-Gruppe und es gelte

1.  $\psi : P \times G \rightarrow P$  ist eine freie rechte Gruppenwirkung
2.  $M$  ist der Faktorraum der Gruppenwirkung,  $M = P/G$  mit der kanonischen Projektion  $\pi : P \rightarrow P/G = M$
3. Es existiert eine Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $M$  und eine Familie von Diffeomorphismen  $\chi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$ , den lokalen Trivialisierungen, so daß

$$\begin{array}{ccc}
\pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\chi_i} & U_i \times G \\
\pi \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\
& U_i &
\end{array}$$

ein kommutatives Diagramm ist

- $\text{pr}_2 \circ \chi_i(\psi_g(p)) = (\text{pr}_2 \circ \chi_i(p)) \cdot g$

Dann heißt die Struktur  $(P, M, G, \pi, \psi, \{\chi_i\})$  ein Hauptfaserbündel über  $M$  mit Strukturgruppe  $G$ .

Bemerkungen:

- $M = \{[p], p \in P\}$  und  $p_1 \sim p_2$  wenn ein  $g \in G$  existiert mit  $\psi_g(p_1) = p_2$ . Damit wirkt  $G$  transitiv auf den Fasern  $\pi^{-1}(x)$ .
- $G$  wirkt frei  $\Rightarrow \psi_p : G \rightarrow P$  ist injektiv (dabei ist  $\psi_p(g) = \psi(p, g)$  für festgehaltenes  $p \in P$ ). Denn sei  $\psi_p(a) = \psi_p(b)$ , so  $\psi_a(p) = \psi_b(p)$  und  $\psi_{b^{-1}} \circ \psi_a(p) = \psi_{ab^{-1}}(p) = p$ . Wenn  $G$  frei wirkt, dann ist  $a = b$ .
- $\psi_p : G \rightarrow \pi^{-1}(\pi(p))$  ist ein Diffeomorphismus. Damit ist jede Faser  $\pi^{-1}(x)$  diffeomorph zu  $G$ .
- Sei  $(U_i, \chi_i)$  eine Familie von lokalen Trivialisierungen, und  $\kappa_i := \text{pr}_2 \circ \chi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow G$ . Dann ist  $\kappa_i(\psi_g p) \cdot (\kappa_j(\psi_g p))^{-1} = \kappa_i(p) \cdot g \cdot (\kappa_j(p) \cdot g)^{-1} = \kappa_i(p) \cdot (\kappa_j(p))^{-1}$  unabhängig von  $g \in G$  und projiziert sich damit auf eine Abbildung  $\rho_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  definiert durch  $\rho_{ij}(x) = \kappa_i(p) \cdot (\kappa_j(p))^{-1}$  für  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Es gilt

1.  $\rho_{ii} = e$
2.  $\rho_{ij} = \rho_{ji}^{-1}$
3. Für  $U_i, U_j, U_k$  mit  $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$  gilt  $\rho_{ij} \cdot \rho_{jk} = \rho_{ik}$

Die  $\{\rho_{ij}\}$  bilden damit eine Kozyklus im Sinne der Homologietheorie

**Satz 35** Eine Überdeckung  $\{U_i\}$  von  $M$  und ein zugehöriger Kozyklus  $\{\rho_{ij}\}$  genügen zur Rekonstruktion des Bündels.

*Beweisidee:* Wir setzen  $X = \bigcup_i U_i \times G$  (disjunkte Vereinigung) und

$$(i, x, g) \sim (i', x', g') \Leftrightarrow x = x' \in U_j \cap U_j \text{ und } g' = \rho_{i'i}(x) \cdot g$$

Dann ist  $P = X / \sim$  ein Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe  $G$  über  $M$ . Die freie rechte Gruppenwirkung auf  $P$  ist gegeben durch  $\psi_a[(i, x, g)] := [i, x, ga]$  und die Projektion ist  $\pi[(i, x, g)] = x$

#### 4.2.1 Beispiele

1. triviales Bündel  $P = M \times G$
2. Homogene Räume. Sei  $G$  eine Lie-Gruppe und  $H \subset G$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ . Es gibt eine natürliche rechte Gruppenwirkung von  $H$  auf  $G$ . Das definiert ein Hauptfaserbündel  $G$  über  $G/H$  mit Strukturgruppe  $H$ . Die Basismannigfaltigkeit  $G/H$  ist ein homogener Raum.
3. komplexes und quaternionisches Hopf-Bündel
4. Bündel der lokalen Bezugssysteme

## 4.2.2 Die Gruppe der lokalen Eichtransformationen

**Definition 64** Ein Diffeomorphismus  $\theta : P \rightarrow P$  heißt Automorphismus des Hauptfaserbündels, falls

- es existiert ein Diffeomorphismus  $\tilde{\theta} : M \rightarrow M$ , so daß

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\theta} & P \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & M \end{array} \quad \text{ein kommutatives Diagramm ist}$$

- $\theta$  kommutiert mit der rechten Gruppenwirkung,  $\theta \circ \psi_g = \psi_g \circ \theta \quad \forall g \in G$

Ein vertikaler Automorphismus  $\hat{\theta} : P \rightarrow P$  ist ein Automorphismus des Hauptfaserbündels mit  $\tilde{\theta} = \text{id}_M$ .

Wir bezeichnen mit  $\text{Aut}(P)$  die Gruppe der Automorphismen des Hauptfaserbündels  $P$  und mit  $\text{Aut}_M(P)$  die Gruppe der vertikalen Automorphismen.

**Definition 65** Die Gruppe  $\mathcal{G} = \text{Aut}_M(P)$  heißt Gruppe der lokalen Eichtransformationen.

**Satz 36** Einem vertikalen Automorphismus  $\hat{\theta}$  entspricht genau eine äquivariante Abbildung  $u : P \rightarrow G$  (differenzierbar) mit  $u(\psi_a(p)) = a^{-1}u(p)a$ .

*Beweis:* Sei  $\hat{\theta} \in \mathcal{G}$  gegeben, setze  $\hat{\theta}(p) = \psi_{u(p)}p$  (Verschiebung durch rechte Gruppenwirkung). Dann ist  $\hat{\theta}(\psi_a p) = \psi_a(\hat{\theta}(p)) = \psi_a(\psi_{u(p)}(p)) = \psi_{u(p) \cdot a}(p) = \psi_{u(p) \cdot a} \psi_{a^{-1}} \circ \psi_a(p) = \psi_{a^{-1} \cdot u(p) \cdot a}(\psi_a(p))$ .  $\square$

Die Gruppe der lokalen Eichtransformationen wirkt auf natürliche Weise auf Schnitten des Hauptfaserbündels  $s : M \supset U \rightarrow P$ ,  $\pi \circ s = \text{id}_U$  durch  $\hat{s}(x) := \hat{\theta} \circ s(x) = \psi_{u(s(x))}s(x)$

## 4.3 Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln

Sei  $(P, M, G, \pi, \psi)$  ein Hauptfaserbündel und  $p \in P$ . Die rechte Gruppenwirkung  $\psi : P \times G \rightarrow P$  induziert eine Abbildung  $\sigma : \mathfrak{g} \ni A \mapsto A_* \in \mathfrak{X}(P)$ . Die so erhaltenen Vektorfelder  $A_*$  heißen *vertikale Vektorfelder*, und Tangentialvektoren  $A_*(p) \in T_p P$  sind tangential an die Faser  $\pi^{-1}(\pi(p))$ , d.h. an die Kurve in  $P$ , die durch die Gruppenwirkung mit  $\exp(tA)$  gebildet wird.

Sei  $V_p \subset T_p P$  der Tangentialraum an die Faser. Da  $\sigma$  injektiv ist (die Gruppenwirkung ist frei, insbesondere effektiv) und die Faser isomorph zu  $G$  ist, ist tatsächlich  $V_p = \sigma(\mathfrak{g})_p$ .

**Definition 66** Ein Zusammenhang  $\Gamma$  auf einem Hauptfaserbündel  $P$  ist eine Zuordnung  $P \ni p \mapsto H_p \subset T_p P$ , die folgende Bedingungen erfüllt:

- Komplementarität:  $T_p P = H_p \oplus V_p \quad \forall p \in P$
- Rechtsinvarianz:  $\psi'_g(H_p) = H_{\psi_g(p)}$
- die Zuordnung  $p \mapsto H_p$  ist glatt

Wenn  $X \in \mathfrak{X}(P)$ , dann ist  $\text{hor}X$  punktweise definiert durch  $T_p P \ni X_p = \text{ver}X_p + \text{hor}X_p$  ein glattes Vektorfeld.

### 4.3.1 Die Zusammenhangsform

$\psi_p : G \rightarrow \pi^{-1}(\pi(p))$  induziert Isomorphismus von Vektorräumen  $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow V_p$ .

**Definition 67** Die Zusammenhangsform des Zusammenhangs  $\Gamma$  ist die differentielle 1-Form  $\omega$  mit Werten in  $\mathfrak{g}$  definiert durch

$$\omega_p(X) := \sigma^{-1}(\text{ver}X_p)$$

**Satz 37** Für die Zusammenhangsform  $\omega$  gilt:

1.  $\omega_p(X) = 0$  für  $X \in H_p$
2.  $\omega(A_*) = A$
3.  $\psi_a^* \omega = \text{Ad}(a^{-1})\omega$  im Sinne von  $(\psi_a^* \omega)(X) = \text{Ad}(a^{-1})(\omega(X))$

*Beweis:* 1. und 2. folgen aus der Definition. Bleibt 3:

$$(\psi_a^* \omega)_p(X) = \omega_{\psi_a(p)}((\psi_a)_* X) = \sigma^{-1}(\text{ver}(\psi'_a X_p)_{\psi_a(p)})$$

Wir zerlegen  $X_p = \text{ver}X_p + \text{hor}X_p$ , dann ist  $\psi'_a(\text{hor}X_p) \in H_{\psi_a(p)}$  und deshalb  $\psi'_a(\text{ver}X_p) \in V_{\psi_a(p)}$ . Folglich ist

$$(\psi_a^* \omega)_p(X) = \omega_{\psi_a(p)}((\psi_a)_* X) = \sigma^{-1}((\psi'_a(\text{ver}X_p))_{\psi_a(p)})$$

Sei  $(\text{ver}X_p) = \sigma(A)$ , dann haben wir

$$\begin{aligned} (((\psi_a)_* \sigma(A))f)(p) &= (\sigma(A)(\psi_a^* f))(\psi_{a^{-1}}(p)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} (\psi_a^* f) \circ \psi_{\exp(tA)}(\psi_{a^{-1}}(p)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} f \circ \psi_{a^{-1} \cdot \exp(tA) \cdot a}(p) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} f \circ \psi_{\exp(t \text{Ad}(a^{-1})A)}(p) \right|_{t=0} \\ &= (\sigma(\text{Ad}(a^{-1})A))f(p) \end{aligned}$$

und somit

$$(\psi_a^* \omega)_p(X) = \omega_{\psi_a(p)}((\psi_a)_* X) = (\text{Ad}(a^{-1})A) = \text{Ad}(a^{-1})(\omega_p(X))$$

**Satz 38** Sei eine Einsform  $\omega$  mit Werten in  $\mathfrak{g}$  gegeben, so daß

- $\omega_p(\sigma(A)) = A$
- $\psi_a^* \omega = \text{Ad}(a^{-1})\omega$

dann definiert  $P \ni p \mapsto H_p := \ker \omega_p$  einen Zusammenhang  $\Gamma$  auf  $P$ .

### 4.3.2 Kovariante Ableitung

**Definition 68** Sei  $\alpha$  eine differentielle  $k$ -Form auf  $P$  mit Werten in einem beliebigen Vektorraum. Dann definiert ein Zusammenhang  $\Gamma$  auf  $P$  eine kovariante Ableitung  $D\alpha$  durch

$$(D\alpha)_p(X_1, \dots, X_{k+1}) := (d\alpha)_p(\text{hor}X_1, \dots, \text{hor}X_{k+1}).$$

**Definition 69** Die 2-Form  $\Omega$  auf  $P$  mit Werten in  $\mathfrak{g}$  definiert durch  $\Omega = D\omega$  heißt Krümmungsform des Zusammenhangs.

**Satz 39**  $\psi_a^* \Omega = \text{Ad}(a^{-1})\Omega$

*Beweis:*  $d$  kommutiert mit Diffeomorphismen.

**Satz 40**  $d\omega(X, Y) = -[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X, Y)$

*Beweis:*

- $X, Y$  vertikal,  $X = A_*, Y = B_*$

$$d\omega(A_*, B_*) = A_*\omega(B_*) - B_*\omega(A_*) - \omega[A_*, B_*] = A_*B - B_*A - \omega[A_*, B_*]$$

$A_*B = 0$  da konstante Funktion auf  $P$

- $X, Y$  horizontal, Definition von  $\Omega$
- $X = A_*$  vertikal,  $Y$  horizontal:

$$d\omega[A_*, Y] = A_*\omega(Y) - Y\omega(A_*) - \omega([A_*, Y]) = 0$$

wegen  $[A_*, Y] = \mathcal{L}_{A_*}Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}((\psi_{\exp(-tA)})_*Y - Y)$  horizontal

$$([\omega, \omega]^\wedge)(X, Y) = \frac{1}{1!1!}[\omega(X), \omega(Y)] - [\omega(Y), \omega(X)] = 2[\omega(X), \omega(Y)] \text{ deshalb } \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]^\wedge$$

**Satz 41 (Bianchi-Identität)**  $D\Omega = 0$

$$\text{Beweis: } D\Omega(X, Y, Z) = d\Omega(\text{hor}X, \text{hor}Y, \text{hor}Z) = (dd\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]^\wedge - \frac{1}{2}[\omega, d\omega]^\wedge)(\text{hor}X, \text{hor}Y, \text{hor}Z) = 0$$



### 4.3.3 Eichtransformationen der Zusammenhangsform

**Definition 70** Eine differentielle  $k$ -Form  $\alpha$  auf  $G$  heißt linksinvariant, wenn  $(L_g^*\alpha)_a = \alpha_a$  gilt für alle  $g \in G$ .

**Definition 71** Die Maurer-Cartan-Form  $\Theta$  auf  $G$  ist die (eindeutige) linksinvariante differentielle 1-Form mit Werten in  $\mathfrak{g}$  definiert durch

$$\Theta(A) = A, \quad A \in \mathfrak{g}$$

**Satz 42** Sei  $\hat{\theta}$  ein vertikaler Automorphismus des Hauptfaserbündels und  $u : P \rightarrow G$  die entsprechende äquivariante Abbildung. Dann gilt für die Zusammenhangsform  $\omega$  und die Krümmungsform  $\Omega$

$$\begin{aligned} (\hat{\theta}^*\omega)_p &= \text{Ad}(u(p)^{-1})\omega_p + (u^*\Theta)_p, \\ (\hat{\theta}^*\Omega)_p &= \text{Ad}(u(p)^{-1})\Omega_p. \end{aligned}$$

*Beweis:* Sei  $X_p \in T_p P$  der Tangentialvektor an die Kurve  $t \mapsto p(t)$ , mit  $p(0) = p$ , d.h.  $X_p f = \frac{d}{dt} f \circ p(t) \Big|_{t=0}$ . Sei  $\hat{p} := \hat{\theta}(p) = \psi_{u(p)}(p)$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} (\hat{\theta}'_p X_p)_{\hat{p}} f &= X_p(\hat{\theta}^* f) = \frac{d}{dt}(\hat{\theta}^* f) \circ p(t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f \circ \hat{\theta}(p(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f \circ \psi_{u(p(t))} p(t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\psi_{u(p)}^* f) \circ p(t) \Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}(\psi_p^* f) \circ u(p(t)) \Big|_{t=0} \\ &= X_p(\psi_{u(p)}^* f) + X_p(u^*(\psi_p^* f)) \\ &= (\psi'_{u(p)} X_p)_{\hat{p}} f + (\psi'_p(u(p)' X_p)_{u(p)})_{\hat{p}} f \end{aligned}$$

Dabei ist  $\psi'_{u(p)} : T_p P \rightarrow T_{\hat{p}} P$  sowie  $u'_p : T_p P \rightarrow T_{u(p)} G$  und  $\psi'_p : T_{u(p)} G \rightarrow T_{\hat{p}} P$ . Folglich gilt

$$\begin{aligned} (\hat{\theta}^*\omega)_p(X_p) &= \omega_{\hat{p}}(\hat{\theta}'_p X_p) \\ &= \omega_{\hat{p}}(\psi'_{u(p)} X_p) + \omega_{\hat{p}}(\psi'_p(u'_p X_p)_{u(p)}) \\ &= \text{Ad}(u(p)^{-1})\omega_p(X_p) + \omega_{\hat{p}}(\psi'_p(u'_p X_p)_{u(p)}) \end{aligned}$$

Sei  $B \in \mathfrak{g}$  durch  $T_{u(p)} G \ni u'_p(X_p) =: L'_{u(p)}(B)$  definiert. Wir differenzieren die Gleichung

$$\psi_p \circ L_{u(p)}(g) = \psi_{u(p) \cdot g}(p) = \psi_g \circ \psi_{u(p)}(p) = \psi_g \hat{p}$$

für  $g = \exp(tB)$ :

$$\frac{d}{dt} f \circ \psi_p \circ L_{u(p)}(\exp(tB)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (L_{u(p)}^*(\psi_p^* f)) \circ \exp(tB) \Big|_{t=0}$$

$$\begin{aligned}
&= B(L_{u(p)}^*(\psi_p^* f)) = (L'_{u(p)} B)_{u(p)}(\psi_p^* f) \\
&= (u'_p X_p)_{u(p)}(\psi_p^* f) = (\psi'_p(u(p)' X_p)_{u(p)})_{\hat{p}} f \\
&= \frac{d}{dt} f \circ \psi_{\exp(tB)}(\hat{p}) \Big|_{t=0} = (\sigma_{\hat{p}}(B)) f .
\end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
\omega_{\hat{p}}((\psi'_p(u'_p X_p)_{u(p)})_{\hat{p}}) &= B = \Theta_e(B) = \Theta_e(L'_{u(p)^{-1}}(u'_p X_p)) \\
&= \Theta_{u(p)}(u'_p X_p) = (u^* \Theta)_p(X_p) .
\end{aligned}$$

Damit folgt schließlich

$$(\hat{\theta}^* \omega)_p(X_p) = \text{Ad}(u(p)^{-1}) \omega_p(X_p) + (u^* \Theta)_p(X_p) .$$

Für die Krümmungsform erhalten wir, da der zweite Anteil vertikal ist,

$$\begin{aligned}
(\hat{\theta}^* \Omega)_p(X_p, Y_p) &= \Omega_{\hat{p}}(\hat{\theta}'_p X_p, \hat{\theta}'_p Y_p) \\
&= \Omega_{\hat{p}}(\psi'_{u(p)} X_p, \psi'_{u(p)} Y_p) \\
&= \text{Ad}(u(p)^{-1})(\Omega_p(X_p, Y_p)) .
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

#### 4.3.4 Zusammenhänge in lokaler Trivialisierung

**Definition 72** Sei eine Trivialisierung  $\chi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  gegeben, und sei  $\kappa = \text{pr}_2 \circ \chi : U \rightarrow G$ . Dann wird durch die Forderung  $\kappa \circ s = e$  ein Schnitt  $s : U \rightarrow P$  ausgezeichnet. Für diesen Schnitt heißt  $\mathcal{A} = s^* \omega$  das lokale Eichpotential und  $\mathcal{F} = s^* \Omega$  der lokale Feldstärketensor.

$\mathcal{A}$  ist eine differentielle 1-Form auf  $U$  mit Werten in  $\mathfrak{g}$  und  $\mathcal{F}$  ist eine differentielle 2-Form auf  $U$  mit Werten in  $\mathfrak{g}$ .

**Satz 43** *Es gilt*

$$\begin{aligned}
\omega_p &= \text{Ad}(\kappa(p)^{-1})(\pi^* \mathcal{A})_p + (\kappa^* \Theta)_p \\
\Omega_p &= \text{Ad}(\kappa(p)^{-1})(\pi^* \mathcal{F})_p
\end{aligned}$$

*Dabei ist  $\Theta$  die Maurer-Cartan-Form der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ .*

*Beweis:* Die Aufgabe besteht darin, die Zusammenhangsform im Punkt  $p$  durch jene im Punkt  $s(\pi(p))$  auszudrücken.

Für alle  $p \in \pi^{-1}(U)$  gilt  $\psi(s \circ \pi(p), \kappa(p)) = p$ , denn  $\kappa(\psi(s \circ \pi(p), \kappa(p))) = \kappa(s \circ \pi(p)) \cdot \kappa(p) = \kappa(p)$  wegen  $\kappa \circ s = e$ . Außerdem liegen  $p$  und  $\psi(s \circ \pi(p), \kappa(p))$  in der gleichen Faser.

Sei jetzt  $t \mapsto p(t)$  eine Kurve in  $\pi^{-1}(U)$  mit  $p(0) = p$  und  $X_p$  Tangentialvektor an diese Kurve. Dann gilt für  $f \in C^\infty(P)$

$$\begin{aligned}
X_p f &= \left. \frac{d}{dt} f \circ p(t) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} f \circ \psi(s \circ \pi(p(t)), \kappa(p(t))) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} f \circ \psi_{\kappa(p)}(s \circ \pi(p(t))) \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt} f \circ \psi_{s \circ \pi(p)}(\kappa(p(t))) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} (\pi^*(s^*(\psi_{\kappa(p)}^* f)))(p(t)) \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt} (\kappa^*(\psi_{s \circ \pi(p)}^* f))(p(t)) \right|_{t=0} \\
&= X_p(\pi^*(s^*(\psi_{\kappa(p)}^* f))) + X_p(\kappa^*(\psi_{s \circ \pi(p)}^* f))(p(t)) \\
&= ((\psi_{\kappa(p)})'_{s(\pi(p))}(s'_{\pi(p)}(\pi'_p X_p))) f + ((\psi_{s \circ \pi(p)})'_{\kappa(p)}(\kappa'_p X_p)) f .
\end{aligned}$$

Dadurch bekommen wir

$$\omega_p(X_p) = \omega_p((\psi_{\kappa(p)})'_{s(\pi(p))}(s'_{\pi(p)}(\pi'_p X_p))) + \omega_p((\psi_{s \circ \pi(p)})'_{\kappa(p)}(\kappa'_p X_p)) .$$

Im ersten Term haben wir

$$\begin{aligned}
\omega_p((\psi_{\kappa(p)})'_{s(\pi(p))}(s'_{\pi(p)}(\pi'_p X_p))) &= (\psi_{\kappa(p)}^* \omega)_{s(\pi(p))}(s'_{\pi(p)}(\pi'_p X_p)) \\
&= \text{Ad}(\kappa(p)^{-1})(\omega_{s(\pi(p))}(s'_{\pi(p)}(\pi'_p X_p))) \\
&= \text{Ad}(\kappa(p)^{-1})((\pi^* \mathcal{A})_p(X_p)) .
\end{aligned}$$

Im zweiten Teil führen wir eine ähnliche Rechnung wie zuvor bei den Eichtransformationen aus. Sei  $B \in \mathfrak{g}$  definiert durch  $L'_{\kappa(p)} B = \kappa'_p X_p$ . Wir haben

$$\psi_{s \circ \pi(p)}(L_{\kappa(p)} g) = \psi_{\kappa(p) \cdot g}(s \circ \pi(p)) = \psi_g(\psi_{\kappa(p)}(s \circ \pi(p))) = \psi_{g p}$$

Sei  $g(t) = \exp(tB)$ , dann gilt

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} f \circ \psi_{s \circ \pi(p)}(L_{\kappa(p)} \exp(tB)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} (L_{\kappa(p)}^*(\psi_{s \circ \pi(p)}^* f)) \exp(tB) \right|_{t=0} \\
&= B_e(L_{\kappa(p)}^*(\psi_{s \circ \pi(p)}^* f)) \\
&= (\kappa'_p X_p)(\psi_{s \circ \pi(p)}^* f) = ((\psi_{s \circ \pi(p)})'_{\kappa(p)}(\kappa'_p X_p)) f \\
&= \left. \frac{d}{dt} f \circ \psi_{\exp(tB)} p \right|_{t=0} = \sigma_p(B) f .
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\omega_p((\psi_{s \circ \pi(p)})'_{\kappa(p)}(\kappa'_p X_p)) &= \omega_p(\sigma_p(B)) = B = \Theta_e(B) = \Theta_e(L'_{\kappa(p)^{-1}}(\kappa'_p X_p)) \\
&= \Theta_{\kappa(p)}(\kappa'_p X_p) = (\kappa^* \Theta)_p(X_p) .
\end{aligned}$$

Für die Feldstärke bekommen wir, da der zweite Teil vertikal ist,

$$\begin{aligned}
\Omega_p(X_p, Y_p) &= \Omega_p((\psi_{\kappa(p)})'_{s(\pi(p))}(s'_{\pi(p)}(\pi'_p X_p)), (\psi_{\kappa(p)})'_{s(\pi(p))}(s'_{\pi(p)}(\pi'_p Y_p))) \\
&= \text{Ad}(\kappa(p)^{-1})(\Omega_{s(\pi(p))}(s'_{\pi(p)}(\pi'_p X_p), s'_{\pi(p)}(\pi'_p Y_p))) \\
&= \text{Ad}(\kappa(p)^{-1})(\pi^* \mathcal{F})_p(X_p, Y_p)
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

### 4.3.5 Eichtransformationen in lokaler Trivialisierung

Ein vertikaler Automorphismus  $\hat{\theta} : P \rightarrow P$  induziert eine Eichtransformation  $\omega \mapsto \hat{\omega} = \hat{\theta}^*\omega$ . Sei  $\omega$  in der gegebenen Trivialisierung durch das lokale Eichpotential  $\mathcal{A}$  beschrieben, dann gilt

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_p &= (\hat{\theta}^*\omega)_p = \text{Ad}(u(p)^{-1})\omega_p + (u^*\Theta)_p \\ &= \text{Ad}(u(p)^{-1})(\text{Ad}(\kappa(p)^{-1})(\pi^*\mathcal{A})_p + (\kappa^*\Theta)_p) + (u^*\Theta)_p\end{aligned}$$

Andererseits wird  $\hat{\omega}$  in der gegebenen Trivialisierung durch das lokale Eichpotential  $\hat{\mathcal{A}}$  beschrieben:

$$\hat{\omega}_p = \text{Ad}(\kappa(p)^{-1})(\pi^*\hat{\mathcal{A}})_p + (\kappa^*\Theta)_p.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}(\pi^*\hat{\mathcal{A}})_p &= \text{Ad}(\kappa(p))(\text{Ad}(u(p)^{-1})(\text{Ad}(\kappa(p)^{-1})(\pi^*\mathcal{A})_p)) \\ &\quad + \text{Ad}(\kappa(p))(\text{Ad}(u(p)^{-1})(\kappa^*\Theta)_p) + \text{Ad}(\kappa(p))(u^*\Theta)_p - \text{Ad}(\kappa(p))(\kappa^*\Theta)_p\end{aligned}$$

Es gilt

$$\text{Ad}(\kappa(p)) \circ \text{Ad}(u(p)^{-1}) \circ \text{Ad}(\kappa(p)^{-1}) = \text{Ad}(\kappa(p) \cdot u(p)^{-1} \cdot \kappa(p)^{-1}) = \text{Ad}(\lambda(p)^{-1})$$

mit  $\lambda(p) := \kappa(p) \cdot u(p) \cdot \kappa(p)^{-1} \in G$ . Sei  $X_p$  Tangentialvektor an die Kurve  $t \mapsto p(t)$  mit  $p(0) = p$ . Dann finden wir den induzierten Tangentialvektor  $\lambda'_p X_p = L'_{\lambda(p)} B \in T_{\lambda(p)} G$  an die Kurve  $\lambda(p(t))$  mit  $B \in \mathfrak{g}$  mittels  $f \in C^\infty(G)$  als

$$\begin{aligned}(L'_{\lambda(p)} B)f &= \left. \frac{d}{dt} f \circ \kappa(p(t)) \cdot u(p(t)) \cdot \kappa(p(t))^{-1} \right|_{t=0} \\ &= X_p(\kappa^*(R_{u(p)}^*(R_{\kappa(p)^{-1}}^* f))) + X_p(u^*(R_{\kappa(p)^{-1}}^*(L_{\kappa(p)}^* f))) \\ &\quad - X_p(\kappa^*(L_{\lambda(p)}^*(R_{\kappa(p)^{-1}}^* f)))\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}B_e &= (L_{\lambda(p)^{-1}})'_{\lambda(p)} \left( (R_{\kappa(p)^{-1}})'_{\kappa(p) \cdot u(p)} \left( (R_{u(p)})'_{\kappa(p)} (\kappa'_p X_p) \right) \right) \\ &\quad + (L_{\lambda(p)^{-1}})'_{\lambda(p)} \left( (L_{\kappa(p)})'_{u(p) \cdot \kappa(p)^{-1}} \left( (R_{\kappa(p)^{-1}})'_{u(p)} (u'_p X_p) \right) \right) \\ &\quad - (L_{\lambda(p)^{-1}})'_{\lambda(p)} \left( (R_{\kappa(p)^{-1}})'_{\kappa(p) \cdot u(p)} \left( (L_{\lambda(p)})'_{\kappa(p)} (\kappa'_p X_p) \right) \right)\end{aligned}$$

Darauf wenden wir  $\Theta$  an und verwenden  $\Theta(R'_{a^{-1}} A) = \Theta(\alpha'_a A) = \alpha'_a A = \text{Ad}(a)A = \text{Ad}(a)\Theta(A)$ :

$$\begin{aligned}B &= \Theta_e(B_e) = \Theta_e((L_{\lambda(p)^{-1}})'_{\lambda(p)} \lambda'_p X_p) = \Theta_{\lambda(p)}(\lambda'_p X_p) \\ &= \Theta_{\lambda(p)} \left( (R_{\kappa(p)^{-1}})'_{\kappa(p) \cdot u(p)} \left( (R_{u(p)})'_{\kappa(p)} (\kappa'_p X_p) \right) \right) \\ &\quad + \Theta_{\lambda(p)} \left( (L_{\kappa(p)})'_{u(p) \cdot \kappa(p)^{-1}} \left( (R_{\kappa(p)^{-1}})'_{u(p)} (u'_p X_p) \right) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \Theta_{\lambda(p)} \left( (R_{\kappa(p)^{-1}})'_{\kappa(p) \cdot u(p)} \left( (L_{\lambda(p)})'_{\kappa(p)} (\kappa'_p X_p) \right) \right) \\
& = \text{Ad}(\kappa(p)) \left( \Theta_{\kappa(p) \cdot u(p)} \left( (R_{u(p)})'_{\kappa(p)} (\kappa'_p X_p) \right) \right) \\
& + \Theta_{u(p) \cdot \kappa(p)^{-1}} \left( (R_{\kappa(p)^{-1}})'_{u(p)} (u'_p X_p) \right) \\
& - \text{Ad}(\kappa(p)) \left( \Theta_{\kappa(p) \cdot u(p)} \left( (L_{\lambda(p)})'_{\kappa(p)} (\kappa'_p X_p) \right) \right) \\
& = \text{Ad}(\kappa(p)) \left( \text{Ad}(u(p)^{-1}) \left( \Theta_{\kappa(p)} (\kappa'_p X_p) \right) \right) \\
& + \text{Ad}(\kappa(p)) \left( \Theta_{u(p)} (u'_p X_p) \right) \\
& - \text{Ad}(\kappa(p)) \left( \Theta_{\kappa(p)} (\kappa'_p X_p) \right)
\end{aligned}$$

Daraus lesen wir

$$(\lambda^* \Theta)_p = \text{Ad}(\kappa(p)) \left( \text{Ad}(u(p)^{-1}) (\kappa^* \Theta)_p \right) + \text{Ad}(\kappa(p)) (u^* \Theta)_p - \text{Ad}(\kappa(p)) (\kappa^* \Theta)_p$$

ab, so daß

$$(\pi^* \hat{\mathcal{A}})_p = \text{Ad}(\lambda(p)^{-1}) (\pi^* \mathcal{A})_p + (\lambda^* \Theta)_p$$

entsteht. Nun ist  $\lambda$  konstant auf der Faser, denn

$$\lambda(\psi_g p) = \kappa(\psi_g p) \cdot u(\psi_g p) \cdot \kappa(\psi_g p)^{-1} = \kappa(p) g \cdot g^{-1} u(p) g g^{-1} \kappa(p)^{-1} = \lambda(p)$$

Sei  $\hat{s}$  irgendein Schnitt von  $P$  und  $p = \hat{s}(x)$ , dann erhalten wir wegen  $\pi \circ \hat{s} = \text{id}_M$  durch Anwendung von  $\hat{s}^*$  auf obige Gleichung

$$\hat{\mathcal{A}}_x = \text{Ad}(\tau(x)^{-1}) \mathcal{A}_x + (\tau^* \Theta)_x, \quad \tau = \lambda \circ \hat{s}$$

Dabei ist  $\tau : U \rightarrow G$  allein durch den vertikalen Automorphismus  $\hat{\theta}$  und die Trivialisierung gegeben und unabhängig von  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Völlig analog findet man

$$\hat{\mathcal{F}}_x = \text{Ad}(\tau(x)^{-1}) \mathcal{F}_x.$$

#### 4.3.6 Wechsel der Trivialisierung

Eine lokale Trivialisierung  $\chi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$  definiert eine Abbildung  $\kappa_i = \text{pr}_2 \circ \chi : U_i \rightarrow G$ , damit einen kanonischen Schnitt  $s_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  durch  $\kappa_i \circ s_i = e$  und schließlich das lokale Eichpotential  $\mathcal{A}_i = s_i^* \omega$  und den lokalen Feldstärketensor  $\mathcal{F}_i = s_i^* \Omega$ . Seien jetzt zwei Trivialisierungen  $\chi_i, \chi_j$  gegeben mit  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , dann führen diese auf  $U_i \cap U_j \subset M$  zu zwei verschiedenen lokalen Eichpotentialen  $\mathcal{A}_i$  und  $\mathcal{A}_j$ .

**Satz 44** Für  $x \in U_i \cap U_j$  gilt

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_j)_x &= \text{Ad}(\rho_{ij}^{-1}(x)) (\mathcal{A}_i)_x + (\rho_{ij}^* \Theta)_x, \\
(\mathcal{F}_j)_x &= \text{Ad}(\rho_{ij}^{-1}(x)) (\mathcal{F}_i)_x,
\end{aligned}$$

wobei  $\rho_{ij}(x) = \kappa_i(p) \cdot \kappa_j(p)^{-1}$  für ein beliebiges  $p \in \pi^{-1}(x)$  die Übergangsfunktionen sind.

*Beweis:* Wir haben  $\kappa_i(p) = \rho_{ij}(\pi(p)) \cdot \kappa_j(p)$ . Aus

$$\omega_p = \text{Ad}(\kappa_i(p)^{-1})(\pi^* \mathcal{A}_i)_p + (\kappa_i^* \Theta)_p = \text{Ad}(\kappa_j(p)^{-1})(\pi^* \mathcal{A}_j)_p + (\kappa_j^* \Theta)_p$$

folgt

$$(\pi^* \mathcal{A}_j)_p = \text{Ad}(\kappa_j(p))(\text{Ad}(\kappa_i(p)^{-1})(\pi^* \mathcal{A}_i)_p + (\kappa_i^* \Theta)_p - (\kappa_j^* \Theta)_p)$$

Im ersten Term verwenden wir  $\text{Ad}(\kappa_j(p))\text{Ad}(\kappa_i(p)^{-1}) = \text{Ad}(\kappa_j(p) \cdot \kappa_i(p)^{-1}) = \text{Ad}(\rho_{ij}(\pi(p))^{-1})$ . Zur Diskussion des zweiten Teils sei  $X_p \in T_p P$  ein Tangentialvektor an die Kurve  $t \mapsto p(t)$  durch  $p(0) = p$ . Dann ist  $(\rho'_{ij})_x(\pi'_p X_p) \in T_{\rho_{ij}(\pi(p))} G$  der Tangentialvektor an die Kurve  $\kappa_i(p(t)) \cdot \kappa_j(p(t))^{-1}$ . Wir schreiben  $(\rho'_{ij})_x(\pi'_p X_p) = L'_{\rho_{ij}(\pi(p))} B$  mit  $B \in \mathfrak{g}$  und erhalten für  $f \in C^\infty(G)$

$$\begin{aligned} (L'_{\rho_{ij}(\pi(p))} B) f &= \left. \frac{d}{dt} f \circ \kappa_i(p(t)) \cdot \kappa_j(p(t))^{-1} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (R_{\kappa_j(p)^{-1}}^* f) \circ \kappa_i(p(t)) \right|_{t=0} - \left. \frac{d}{dt} (L_{\kappa_i(p) \cdot \kappa_j(p)^{-1}}^* R_{\kappa_j(p)^{-1}}^* f) \circ \kappa_j(p(t)) \right|_{t=0} \\ &= ((\kappa'_i)_p X_p) (R_{\kappa_j(p)^{-1}}^* f) - ((\kappa'_j)_p X_p) (L_{\rho_{ij}(\pi(p))}^* R_{\kappa_j(p)^{-1}}^* f) . \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} B &= \Theta_e(B_e) = \Theta_e(L'_{\rho_{ij}(\pi(p))^{-1}}(\rho'_{ij})_x(\pi'_p X_p)) = \Theta_{\rho_{ij}(x)}((\rho'_{ij})_x(\pi'_p X_p)) \\ &= (\rho_{ij}^* \Theta)_x(\pi'_p X_p) \\ &= \Theta_e(L'_{\rho_{ij}(\pi(p))^{-1}}(R'_{\kappa_j(p)^{-1}}((\kappa'_i)_p X_p))) - \Theta_e(L'_{\rho_{ij}(\pi(p))^{-1}}(L'_{\rho_{ij}(\pi(p))}(R'_{\kappa_j(p)^{-1}}((\kappa'_j)_p X_p)))) \\ &= \Theta_{\rho_{ij}(\pi(p))}(R'_{\kappa_j(p)^{-1}}((\kappa'_i)_p X_p)) - \Theta_e(R'_{\kappa_j(p)^{-1}}((\kappa'_j)_p X_p)) \\ &= (L_{\kappa_i}^* (L_{\kappa_j}^* \Theta))_{\rho_{ij}(\pi(p))}(R'_{\kappa_j(p)^{-1}}((\kappa'_i)_p X_p)) - \Theta_e(R'_{\kappa_j(p)^{-1}} L'_{\kappa_j(p)} L'_{\kappa_j(p)^{-1}}((\kappa'_j)_p X_p)) \\ &= \Theta_e(\alpha'_{\kappa_j(p)}(L'_{\kappa_i(p)^{-1}}((\kappa'_i)_p X_p))) - \Theta_e(\alpha'_{\kappa_j(p)^{-1}} L'_{\kappa_j(p)^{-1}}((\kappa'_j)_p X_p)) \\ &= \text{Ad}(\kappa_j(p)) \left( \Theta_e(L'_{\kappa_i(p)^{-1}}((\kappa'_i)_p X_p)) - \Theta_e(L'_{\kappa_j(p)^{-1}}((\kappa'_j)_p X_p)) \right) \\ &= \text{Ad}(\kappa_j(p))((\kappa_i^* \Theta)_p(X_p) - (\kappa_j^* \Theta)_p(X_p)) . \end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir

$$(\pi^* \mathcal{A}_j)_p = \text{Ad}(\rho_{ij}(\pi(p))^{-1})(\pi^* \mathcal{A}_i)_p + (\pi^*(\rho_{ij}^* \Theta))_p .$$

Durch Anwendung eines beliebigen Schnittes  $\hat{s} : U_i \cap U_j \rightarrow \pi^{-1}(U_i \cap U_j)$  mit  $\pi \circ \hat{s} = \text{id}_{U_i \cap U_j}$  erhalten wir

$$(\mathcal{A}_j)_x = \text{Ad}(\rho_{ij}(x)^{-1})(\mathcal{A}_i)_x + (\rho_{ij}^* \Theta)_x .$$

Die Beziehung für die lokale Feldstärke folgt sofort aus

$$\Omega_p = \text{Ad}(\kappa_i(p)^{-1})(\pi^* \mathcal{F}_i)_p = \text{Ad}(\kappa_j(p)^{-1})(\pi^* \mathcal{F}_i)_p$$

durch Anwenden von  $\text{Ad}(\kappa_j(p))$ . □

### 4.3.7 Zusammenfassung

- $(P, M, G, \pi, \psi, \{\chi_i\})$  – Hauptfaserbündel  
Bündelmannigfaltigkeit  $P$  mit rechter freier Wirkung  $\psi : P \times G \rightarrow P$  der Strukturgruppe  $G$  (Lie-Gruppe), dadurch Äquivalenzrelation  $p_1 \sim p_2$  wenn  $p_1 = \psi_g p_2$ , Basismannigfaltigkeit  $M = P / \sim$  mit kanonischer Projektion  $\pi : P \rightarrow M$ , lokale Trivialisierung  $\chi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$
- global definierte Zusammenhangsform  $\omega$   
1-Form auf  $P$  mit Werten in  $\mathfrak{g}$  und  $\omega_p(\sigma_p(A)) = A$  für  $A \in \mathfrak{g}$  und  $(\sigma_p(A))f = \frac{d}{dt}f \circ \psi_{\exp(tA)}p|_{t=0}$  sowie  $(\psi_g^*\omega)_p = \text{Ad}(g^{-1})\omega_p$
- horizontaler Unterraum  $H_p \subset T_p P$  als  $H_p = \ker \omega_p$ , kovariante Ableitung  $D\alpha(X_1, \dots, X_k) = d\alpha(\text{hor}X_1, \dots, \text{hor}X_p)$
- Krümmungsform  $\Omega = D\omega$  (2-Form auf  $P$  mit Werten in  $\mathfrak{g}$  und  $(\psi_g^*\Omega)_p = \text{Ad}(g^{-1})\Omega_p$ , Strukturgleichung  $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]^\wedge \equiv d\omega + \omega \wedge \omega$
- Eichtransformationen gegeben durch Gruppe  $\mathcal{G}$  der vertikalen Automorphismen von  $P$ , d.h.  $\theta(p) = \psi_{u(p)}p$ , Wirkung auf  $\omega, \Omega$  durch  $(\hat{\theta}^*\omega)_p = \text{Ad}(u(p)^{-1})\omega_p + (u^*\Theta)_p$  und  $(\hat{\theta}^*\Omega)_p = \text{Ad}(u(p)^{-1})\Omega_p$ , dabei ist  $\Theta$  die Maurer-Cartan-Form
- Trivialisierung  $\chi_i$  mit  $\kappa_i = \text{pr}_2 \circ \chi_i$  definiert ausgezeichneten Schnitt  $s_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  und damit lokales Eichpotential  $\mathcal{A}_i = s_i^*\omega$  und lokalen Feldstärketensor  $\mathcal{F}_i = s_i^*\Omega$ , Umkehrung  $\omega_p = \text{Ad}(\kappa_i(p)^{-1})(\pi^*\mathcal{A}_i)_p + (\kappa_i^*\Theta)_p$  und  $\Omega_p = \text{Ad}(\kappa_i(p)^{-1})(\pi^*\mathcal{F}_i)_p$
- Eichtransformation der lokalen Objekte  $(\hat{\mathcal{A}}_i)_x = \text{Ad}(\tau_i(x)^{-1})(\mathcal{A}_i)_x + (\tau_i^*\Theta)_x$  und  $(\hat{\mathcal{F}}_i)_x = \text{Ad}(\tau_i(x)^{-1})(\mathcal{F}_i)_x$  mit  $\tau_i(x) = \kappa(p) \cdot u(p) \cdot \kappa(p)^{-1}$  unabhängig von  $p \in \pi^{-1}(x)$
- Wechsel der Trivialisierung  $(\mathcal{A}_j)_x = \text{Ad}(\rho_{ij}(x)^{-1})(\mathcal{A}_i)_x + (\rho_{ij}^*\Theta)_x$  und  $(\mathcal{F}_j)_x = \text{Ad}(\rho_{ij}(x)^{-1})(\mathcal{F}_i)_x$  mit Übergangsfunktionen  $\rho_{ij} = \kappa_i(p) \cdot \kappa_j(p)^{-1} \in G$  unabhängig von  $p \in \pi^{-1}(x)$

## 4.4 Reine Yang-Mills-Wirkung

Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$  ein Ad-invariantes Skalarprodukt auf  $\mathfrak{g}$ , d.h.

$$\langle \text{Ad}(a)A, \text{Ad}(a)B \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle A, B \rangle_{\mathfrak{g}} \quad A, B \in \mathfrak{g}, a \in G$$

**Definition 73** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 2$  und  $\star$  der durch die Metrik  $g$  induzierte Hodge-Stern Operator. Sei  $P$  ein Hauptfaserbündel über  $M$ . Dann ist das Yang-Mills-Wirkungsfunktional auf dem Raum der Zusammenhänge auf  $P$  definiert durch

$$\text{YM}[\omega] = \int_M \mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F}$$

Dabei ist in Tensorprodukt-Schreibweise  $(\alpha \otimes A) \wedge (\beta \otimes B) := \alpha \wedge \beta \langle A, B \rangle_{\mathfrak{g}}$  für  $\alpha, \beta \in \Gamma^\infty(\Lambda^* M)$  und  $A, B \in \mathfrak{g}$ .

**Satz 45**  $YM[\omega]$  ist wohldefiniert (unabhängig von der Trivialisierung  $\chi$ ) und eichinvariant,  $YM[\hat{\theta}^* \omega] = YM[\omega]$ .

*Beweis:* Das Integral ist über eine Zerlegung der Eins  $\{f_i\}$  bezüglich des Atlases  $\{(U_i, \tilde{\kappa}_i)\}$  zu gegebener Überdeckung von  $M$  definiert, d.h.

$$\begin{aligned} \int_M \mathcal{F} \wedge * \mathcal{F} &= \sum_i \int_{\tilde{\kappa}_i(U_i)} (\tilde{\kappa}_i^{-1})^* (f_i \mathcal{F} \wedge * \mathcal{F}) \\ &= \sum_i \int_{\tilde{\kappa}_i(U_i)} (\tilde{\kappa}_i^{-1})^* (f_i \mathcal{F}_i \wedge * \mathcal{F}_i) \end{aligned}$$

da  $\mathcal{F}|_{\text{supp} f_i} = \mathcal{F}_i|_{\text{supp} f_i}$ . Wir können annehmen, daß jeder Punkt  $x \in M$  nur in endlich vielen  $U_i$  liegt. Wir zerlegen jedes Gebiet  $U_i$  in endlich viele Teilgebiete  $U_i = U_i^0 \cup \bigcup_{j \neq i} (U_i \cap U_j)^0 \cup \bigcup_{j \neq k \neq i \neq j} (U_i \cap U_j \cap U_k)^0 \cup \dots$  mit  $U_i^0 = U_i \cap (M \setminus \bigcup_{j \neq i} U_j)$ ,  $(U_i \cap U_j)^0 = U_i \cap U_j \cap (M \setminus \bigcup_{k \neq i \neq j \neq k} U_k)$ , usw. Dann taucht z.B. das Gebiet  $(U_i \cap U_j)^0$  in obiger Summe genau zweimal auf, als

$$\int_{\tilde{\kappa}_i(U_i \cap U_j)^0} \tilde{\kappa}_i^{-1} (f_i \mathcal{F}_i \wedge * \mathcal{F}_i) + \int_{\tilde{\kappa}_j(U_i \cap U_j)^0} \tilde{\kappa}_j^{-1} (f_j \mathcal{F}_j \wedge * \mathcal{F}_j)$$

Für alle  $x \in (U_i \cap U_j)^0$  gilt  $(\mathcal{F}_j)_x = \text{Ad}(\rho_{ij}^{-1}(x))(\mathcal{F}_i)_x$ . Außerdem verschwinden auf  $(U_i \cap U_j)^0$  sämtliche  $f_k$  mit  $k \neq i, j$ , so daß  $f_i + f_j = 1$  auf  $(U_i \cap U_j)^0$ . Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} &\int_{\tilde{\kappa}_i(U_i \cap U_j)^0} (\tilde{\kappa}_i^{-1})^* (f_i \mathcal{F}_i \wedge * \mathcal{F}_i) + \int_{\tilde{\kappa}_j(U_i \cap U_j)^0} (\tilde{\kappa}_j^{-1})^* (f_j \mathcal{F}_j \wedge * \mathcal{F}_j) \\ &= \int_{\tilde{\kappa}_i(U_i \cap U_j)^0} (\tilde{\kappa}_i^{-1})^* (f_i \mathcal{F}_i \wedge * \mathcal{F}_i) + \int_{\tilde{\kappa}_j(U_i \cap U_j)^0} (\tilde{\kappa}_j^{-1})^* ((1 - f_i) \text{Ad}(\rho_{ij}^{-1}) \mathcal{F}_i \wedge * \text{Ad}(\rho_{ij}^{-1}) \mathcal{F}_i) \\ &= \int_{(U_i \cap U_j)^0} (f_i \mathcal{F}_i \wedge * \mathcal{F}_i) + \int_{(U_i \cap U_j)^0} ((1 - f_i) \mathcal{F}_i \wedge * \mathcal{F}_i) \\ &= \int_{(U_i \cap U_j)^0} (\mathcal{F}_i \wedge * \mathcal{F}_i) \equiv \int_{(U_i \cap U_j)^0} (\mathcal{F}_j \wedge * \mathcal{F}_j) . \end{aligned}$$

Dabei wurde die Ad-Invarianz des Skalarprodukts verwandt.

Entsprechend fallen in den Beiträgen der disjunkten Gebiete  $(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k})^0$  sowohl die Übergangsfunktionen als auch die Zerlegungen der Eins heraus, und in jedem Gebiet kann für die Feldstärke ein beliebiger lokaler Repräsentant  $\mathcal{F}_{i_j}$  gewählt werden. Das Wirkungsfunktional ist damit unabhängig von der Trivialisierung und unabhängig von der Zerlegung der Eins.

Unter lokalen Eichtransformationen transformiert sich  $(\mathcal{F}_i)_x$  zu  $\text{Ad}(\tau_i(x)^{-1})(\mathcal{F}_i)_x$ , und die Ad-Invarianz des Skalarprodukts sichert die Invarianz unter Eichtransformationen.  $\square$



#### 4.4.1 Darstellung in lokalen Basen

Sei  $b_i$  eine Basis der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  und  $dx^\mu$  eine Basis von  $T_x^*U$ , dann hat das lokale Eichpotential die Darstellung  $\mathcal{A}_x = \sum_{\mu=1}^n \sum_{i=1}^N \mathcal{A}_\mu^i(x) dx^\mu \otimes b_i$  mit  $\mathcal{A}_\mu^i \in C^\infty(U)$ . Die Komponenten findet man durch Einsetzen der Basisvektoren  $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \in T_x U$  zu

$$\mathcal{A}_x \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=1}^N \mathcal{A}_\nu^i(x) dx^\nu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) b_i = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_\mu^i(x) b_i .$$

Die Feldstärke hat in dieser Basis als 2-Form die Darstellung  $\mathcal{F}_x = \sum_{\mu_1, \mu_2=1}^n \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu_1 \mu_2}^i(x) dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \otimes b_i$ . Die Komponenten findet man durch Einsetzen der Basisvektoren  $\frac{\partial}{\partial x^{\nu_j}} \in T_x U$  zu

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_x \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu_2}} \right) \\ &= \sum_{\mu_1, \mu_2=1}^n \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu_1 \mu_2}^i(x) (dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2}) \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu_2}} \right) b_i \\ &= \sum_{\mu_1, \mu_2=1}^n \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu_1 \mu_2}^i(x) \left\{ dx^{\mu_1} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \right) dx^{\mu_2} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_2}} \right) - dx^{\mu_1} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_2}} \right) dx^{\mu_2} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \right) \right\} b_i \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (\mathcal{F}_{\nu_1 \nu_2}^i(x) - \mathcal{F}_{\nu_2 \nu_1}^i(x)) b_i \\ &= (d\mathcal{A})_x \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu_2}} \right) + \left[ \mathcal{A}_x \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \right), \mathcal{A}_x \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_2}} \right) \right] \quad \leftarrow \text{HA 40} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \mathcal{A} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu_2}} \mathcal{A} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \right) - \mathcal{A} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu_2}} \right] \right) + \left[ \mathcal{A} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \right), \mathcal{A} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_2}} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{A}_{\nu_2}^i}{\partial x^{\nu_1}} b_i - \frac{\partial \mathcal{A}_{\nu_1}^i}{\partial x^{\nu_2}} b_i + \sum_{i,j=1}^N [\mathcal{A}_{\nu_1}^i b_i, \mathcal{A}_{\nu_2}^j b_j] . \end{aligned}$$

Mit den Strukturkonstanten für die gewählte Basis der Lie-Algebra  $[b_i, b_j] = \sum_{k=1}^N c_{ij}^k b_k$  ergibt sich

$$\mathcal{F}_{\nu_1 \nu_2}^k = -\mathcal{F}_{\nu_2 \nu_1}^k = \frac{\partial \mathcal{A}_{\nu_2}^k}{\partial x^{\nu_1}} - \frac{\partial \mathcal{A}_{\nu_1}^k}{\partial x^{\nu_2}} + \sum_{i,j=1}^N c_{ij}^k \mathcal{A}_{\nu_1}^i \mathcal{A}_{\nu_2}^j .$$

#### 4.4.2 Hodge- $\star$ in lokalen Basen

Sei dazu  $g_x : T_x M \times T_x M$  die Metrik mit  $g_x \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = g_{\mu\nu}(x)$ , dann wird durch  $g_x(v)(w) := g_x(v, w)$  ein Isomorphismus  $g_x : T_x M \rightarrow T_x^* M$  induziert. Es gilt

$$g_x \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = g_{\mu\nu}(x) = \sum_{\rho=1}^n g_{\mu\rho}(x) dx^\rho \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) ,$$

also  $g_x\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \sum_{\rho=1}^n g_{\mu\rho}(x) dx^\rho$ . Dann ist die inverse Abbildung  $g_x^{-1} : T_x^*M \rightarrow T_xM$  gegeben durch  $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \sum_{\rho=1}^n g_{\mu\rho}(x) g_x^{-1}(dx^\rho)$ . Seien  $g^{\mu\nu}(x)$  die Komponenten der inversen Matrix  $g_{\mu\nu}$ , d.h.  $\sum_{\rho=1}^n g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu$ , so folgt  $g_x^{-1}(dx^\mu) = \sum_{\rho=1}^n g^{\mu\rho} \frac{\partial}{\partial x^\rho}$ .

Sei  $\alpha$  eine lokale  $k$ -Form auf  $U$  gegeben durch

$$\alpha_x = \frac{1}{k!} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k=1}^n \alpha_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}(x) dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k},$$

wobei  $\alpha_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$  vollständig antisymmetrisch in allen Indizes ist, dann erhalten wir den ersten Teil des Hodge- $\star$  Operators zu

$$(\Lambda^k g^{-1} \alpha)_x = \frac{1}{k!} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_k=1}^n g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_k \nu_k} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_k} \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{\nu_k}}.$$

Um die kanonische Volumenform zu finden, ist ein Übergang von  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right\}$  zu einem Orthonormalsystem  $\{e_a\}$  bezüglich der Metrik notwendig. Mit  $e_a(x) = \sum_{\mu=1}^n A_{a\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  folgt

$$g_x(e_a, e_b) = \sum_{\mu, \nu=1}^n A_{a\mu}(x) A_{b\nu}(x) g_{\mu\nu}(x) = (AgA^T)_{ab}(x).$$

Wir wählen  $A_{a\mu} = \frac{1}{\sqrt{|\langle \mathcal{O}g\mathcal{O}^T \rangle_{aa}|}} \mathcal{O}_{a\mu}$ , wobei  $\mathcal{O}(x) \in SO(n, \mathbb{R})$  jene spezielle orthogonale Matrix (d.h.  $\mathcal{O}\mathcal{O}^T = \mathcal{O}^T\mathcal{O} = I_{n \times n}$  und  $\det \mathcal{O}(x) = 1$ ) ist, die die symmetrische Matrix  $g_{\mu\nu}(x)$  diagonalisiert. Dann folgt

$$(v_g)_x = \sqrt{|\det g(x)|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

denn

$$\begin{aligned} & (v_g)_x(e_1, e_2, \dots, e_n) \\ &= \frac{\sqrt{|\det g|}}{\sqrt{|\langle \mathcal{O}g\mathcal{O}^T \rangle_{11}| \dots |\langle \mathcal{O}g\mathcal{O}^T \rangle_{nn}|}} \\ & \times \sum_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n=1}^n \mathcal{O}_{1\mu_1} \mathcal{O}_{2\mu_2} \dots \mathcal{O}_{n\mu_n} (dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n) \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\mu_n}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{|\det g|}}{\sqrt{|\det(\mathcal{O}g\mathcal{O}^T)|}} \sum_{\pi \in S_n} \sigma_\pi \mathcal{O}_{1\pi(1)} \mathcal{O}_{2\pi(2)} \dots \mathcal{O}_{n\pi(n)} = \det \mathcal{O} = 1 \end{aligned}$$

Mit der Definition der Verjüngung

$$\begin{aligned} & \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{\nu_k}} \right) \lrcorner (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \right) (X_{k+1}, \dots, X_n) \\ & := (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\nu_k}}, X_{k+1}, \dots, X_n \right) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
(*\alpha)_x \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_{k+1}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\nu_n}} \right) &= \left( \Lambda^k g^{-1} \alpha \right] v_g \Big|_x \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_{k+1}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\nu_n}} \right) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_k=1}^n \sqrt{|\det g|} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_k \nu_k} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_k}(x) (dx^1 \dots \wedge dx^n) \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\nu_n}} \right) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_k=1}^n \sqrt{|\det g|} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_k \nu_k} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_k}(x) \underbrace{\sum_{\pi \in S_n} \sigma_\pi \delta_{\nu_1}^{\pi(1)} \dots \delta_{\nu_n}^{\pi(n)}}_{\epsilon_{\nu_1 \dots \nu_n}} \\
&= \frac{1}{k!(n-k)!} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k, \rho_1, \dots, \rho_n=1}^n \sqrt{|\det g|} g^{\mu_1 \rho_1} \dots g^{\mu_k \rho_k} \epsilon_{\rho_1 \dots \rho_n} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_k}(x) \\
&\times (dx^{\rho_{k+1}} \wedge dx^{\rho_n}) \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu_{k+1}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\nu_n}} \right)
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$(*\alpha)_x = \frac{1}{k!(n-k)!} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k, \rho_1, \dots, \rho_n=1}^n \sqrt{|\det g|} g^{\mu_1 \rho_1} \dots g^{\mu_k \rho_k} \epsilon_{\rho_1 \dots \rho_n} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_k}(x) dx^{\rho_{k+1}} \wedge dx^{\rho_n} .$$

#### 4.4.3 Yang-Mills-Wirkung in lokalen Basen

In Anwendung auf die Feldstärke erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \wedge * \mathcal{F} &= \frac{1}{2!2!(n-2)!} \sum_{\nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2, \rho_1, \dots, \rho_n=1}^n \sum_{i, j=1}^n \langle b_i, b_j \rangle_{\mathfrak{g}} \sqrt{|\det g|} g^{\mu_1 \rho_1} g^{\mu_2 \rho_2} \mathcal{F}_{\nu_1 \nu_2}^i \mathcal{F}_{\mu_1 \mu_2}^j \epsilon_{\rho_1 \dots \rho_n} \\
&\times dx^{\nu_1} \wedge dx^{\nu_2} \wedge dx^{\rho_3} \wedge \dots \wedge dx^{\rho_n} \quad \longleftarrow = \epsilon^{\nu_1 \nu_2 \rho_3 \dots \rho_n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\
&= \frac{1}{2!2!} \sum_{\nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2=1}^n \sum_{i, j=1}^n \langle b_i, b_j \rangle_{\mathfrak{g}} \sqrt{|\det g|} g^{\mu_1 \rho_1} g^{\mu_2 \rho_2} \mathcal{F}_{\nu_1 \nu_2}^i \mathcal{F}_{\mu_1 \mu_2}^j \\
&\times (\delta_{\rho_1}^{\nu_1} \delta_{\rho_2}^{\nu_2} - \delta_{\rho_1}^{\nu_2} \delta_{\rho_2}^{\nu_1}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{\rho_n} \\
&= \frac{1}{2!} \sum_{\nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2=1}^n \sum_{i, j=1}^n \langle b_i, b_j \rangle_{\mathfrak{g}} g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} \mathcal{F}_{\nu_1 \nu_2}^i \mathcal{F}_{\mu_1 \mu_2}^j v_g .
\end{aligned}$$

Im physikalisch interessanten Fall, daß die Strukturgruppe eine Untergruppe der  $GL(m, \mathbb{K})$  ist, ist ein Ad-invariantes Skalarprodukt durch die Spur gegeben,

$$\langle A, B \rangle_{\mathfrak{g}} = \text{tr}(AB) \quad \text{oder} \quad \langle A, B \rangle_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{R} \text{tr}(A^* B) ,$$

denn

$$\langle \text{Ad}(a)A, \text{Ad}(a)B \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle aAa^{-1}, aBa^{-1} \rangle_{\mathfrak{g}} = \text{tr}(aAa^{-1}aBa^{-1}) = \text{tr}(AB) .$$

Dann erhalten wir

$$YM[\omega] = \frac{1}{2} \int_M v_g \sum_{\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2} \text{tr} \left( g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} \mathcal{F}_{\mu_1 \mu_2} \mathcal{F}_{\nu_1 \nu_2} \right),$$

mit  $\mathcal{F}_{\mu_1 \mu_2} = \sum_{i=1}^N \mathcal{F}_{\mu_1 \mu_2}^i b_i$ .

#### 4.4.4 Variationsprinzip

Jeder Zusammenhang in einem Hauptfaserbündel definiert eine Geometrie (“rechter Winkel”) zwischen Tangentialraum an die Faser und horizontalem Unterraum).

**Hamiltonsches Prinzip.** *Von allen mathematisch möglichen Geometrien, die durch ein Hauptfaserbündel  $P$  beschrieben werden und durch je eine Zusammenhangsform  $\omega$  auf  $P$  parametrisiert werden, würde in der Natur jene Geometrie realisiert sein, für die das Yang-Mills-Wirkungsfunktional stationär ist.*

**Definition 74** Eine Zusammenhangsform  $\omega$  macht das Wirkungsfunktional stationär, wenn für jede benachbarte Zusammenhangsform  $\tilde{\omega} = \omega + \epsilon \delta \omega$  gilt  $YM[\tilde{\omega}] = YM[\omega] + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ .

Dabei ist  $\delta \omega$  horizontal, denn  $(\delta \omega)_p(\sigma_p(A)) = \tilde{\omega}_p(\sigma_p(A)) - \omega_p(\sigma_p(A)) = A - A = 0$  für alle  $A \in \mathfrak{g}$ .

Seien  $\mathcal{A} = s_* \omega$ ,  $\tilde{\mathcal{A}} = s_* \tilde{\omega}$  und  $\epsilon \delta \mathcal{A} = s^*(\epsilon \delta \omega) = s^* \tilde{\omega} - s^* \omega$  die auf  $M$  zurückgezogenen Objekte. Dann gilt

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^k - \mathcal{F}_{\mu\nu}^k = \epsilon \left( \frac{\partial \delta \mathcal{A}_\nu^k}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \delta \mathcal{A}_\mu^k}{\partial x^\nu} + \sum_{i,j=1}^N c_{ij}^k (\delta \mathcal{A}_\mu^i) \mathcal{A}_\nu^j + \sum_{i,j=1}^N c_{ij}^k \mathcal{A}_\mu^i (\delta \mathcal{A}_\nu^j) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

und

$$\begin{aligned} & YM[\tilde{\omega}] - YM[\omega] \\ &= \int_M v_g \sum_{\mu, \nu, \rho, \sigma=1}^n \sum_{k, l=1}^N \langle b_k, b_l \rangle_{\mathfrak{g}} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} (\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^k - \mathcal{F}_{\mu\nu}^k) \mathcal{F}_{\rho\sigma}^l + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= 2\epsilon \int_M v_g \sum_{\mu, \nu, \rho, \sigma=1}^n \sum_{k, l=1}^N \langle b_k, b_l \rangle_{\mathfrak{g}} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \left( \frac{\partial \delta \mathcal{A}_\nu^k}{\partial x^\mu} + \sum_{i,j=1}^N c_{ij}^k \mathcal{A}_\mu^i (\delta \mathcal{A}_\nu^j) \right) \mathcal{F}_{\rho\sigma}^l + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= 2\epsilon \sum_{\mu, \nu, \rho, \sigma=1}^n \sum_{k, l=1}^N \langle b_k, b_l \rangle_{\mathfrak{g}} \int_M \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( v_g g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} (\delta \mathcal{A}_\nu^k) \mathcal{F}_{\rho\sigma}^l \right) \\ &\quad - 2\epsilon \sum_{\mu, \nu, \rho, \sigma=1}^n \sum_{j, l=1}^N \int_M v_g (\delta \mathcal{A}_\nu^j) \left( \frac{\langle b_j, b_l \rangle_{\mathfrak{g}}}{\sqrt{|\det g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{|\det g|} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \mathcal{F}_{\rho\sigma}^l \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,k=1}^N \langle b_k, b_l \rangle_{\mathfrak{g}} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} c_{ji}^k \mathcal{A}_\mu^i \mathcal{F}_{\rho\sigma}^l \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Das Integral  $\int_M \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\ )$  wird mit dem Satz von Stokes in ein Integral über  $\partial M$  überführt. Wir können annehmen, daß dieses Integral verschwindet, z.B. wenn  $M$  keinen Rand hat, oder die Variation  $\delta \mathcal{A}_\mu^j$  auf dem Rand verschwindet oder im Fall  $M = \mathbb{R}^4$  die Feldstärke kompakten Support hat.

Damit  $YM$  stationär in  $\omega$  ist, muß der verbleibende Teil für beliebiges  $\delta \mathcal{A}_\nu^j$  verschwinden. Das liefert die Yang-Mills-Gleichungen

$$0 = \sum_{\mu, \rho, \sigma=1}^n \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \langle b_j, b_l \rangle_{\mathfrak{g}} \sqrt{|\det g|} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \mathcal{F}_{\rho\sigma}^l \right) + \sum_{\mu, \rho, \sigma=1}^n \sum_{i, k, l=1}^N \langle b_k, b_l \rangle_{\mathfrak{g}} \sqrt{|\det g|} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} c_{ji}^k \mathcal{A}_\mu^i \mathcal{F}_{\rho\sigma}^l ,$$

die die Euler-Lagrange-Gleichungen für das Yang-Mills Wirkungsfunktional sind. Die in der Natur realisierte Geometrie bestimmt sich damit als eine Lösung  $\mathcal{A}_\mu^i$  der Yang-Mills-Gleichungen.

Eine solche Lösung ist im allgemeinen sehr schwierig. In  $n = 4$  Dimensionen kann eine solche Lösung jedoch sofort im selbstdualen Fall erhalten werden. Man kann zeigen (HA), daß die Yang-Mills-Gleichungen geschrieben werden können als  $*D*\mathcal{F} = 0$ , wobei  $D$  die kovariante Ableitung ist. Wenn für einen Zusammenhang  $*\mathcal{F} = \pm \mathcal{F}$  gilt, dann folgen die Yang-Mills-Gleichungen aus der Bianchi-Identität  $D\mathcal{F} = 0$ .

## 4.5 Assoziierte Vektorbündel

Sei  $(P, M, G, \pi, \psi, \{\chi\})$  ein Hauptfaserbündel und  $F$  eine Mannigfaltigkeit, auf der die Strukturgruppe  $G$  von links wirkt:  $\lambda : G \times F \ni (a, y) \mapsto \lambda_a(y) \in F$ . Dann wird auf der Produktmannigfaltigkeit  $P \times F$  eine rechte Gruppenwirkung definiert durch

$$\psi \times \lambda^o : (P \times F) \times G \ni ((p, y), a) \mapsto (\psi_a p, \lambda_{a^{-1}} y) \in P \times F .$$

Sei  $E = P \times F / G$  der Quotientenraum von  $P \times F$  nach der durch diese Gruppenwirkung induzierten Äquivalenzrelation

$$(p_1, y_1) \sim (p_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in G \text{ so daß } p_2 = \psi_a p_1 \text{ und } y_2 = \lambda_{a^{-1}} y_1 .$$

Insbesondere ist  $(\psi_a p, y) \sim (p, \lambda_a y)$ . Sei  $\iota : P \times F \rightarrow E$  die kanonische Projektion. Die kanonische Projektion  $\pi : P \rightarrow M$  induziert eine Projektion  $\pi_E : E \rightarrow M$  durch  $\pi_E[(p, y)] = \pi(p)$ . Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn  $\pi(p)$  ist unabhängig vom gewählten Repräsentanten. Damit gilt  $\pi_E \circ \iota = \pi \circ \text{pr}_1$  auf  $P \times F$ .

**Satz 46** Der Diffeomorphismus  $\chi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  mit  $U \subset M$  offen induziert einen Diffeomorphismus  $\chi^E : \pi_E^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ , so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
P \times F \supset \pi^{-1}(U) \times F & \xrightarrow{\chi \times \text{id}_F} & (U \times G) \times F \\
& \downarrow \iota & \downarrow \text{id}_U \times \lambda \\
E \supset \pi_E^{-1}(U) & \xrightarrow{\chi^E} & U \times F \\
& \pi_E \searrow & \swarrow \text{pr}_1 \\
& & U
\end{array}$$

*Beweis:* Das Diagramm liefert  $(\chi^E)^{-1}(x, y) = \iota(p, \lambda_{\kappa(p)}^{-1}y)$  für ein beliebiges  $p \in \pi^{-1}(x)$ , so daß  $\chi^E$  surjektiv.

Injektivität: Das Diagramm liefert  $\chi^E[(p, y)] = (\pi(p), \lambda_{\kappa(p)}y)$ . Sei  $\chi^E[(p_1, y_1)] = \chi^E[(p_2, y_2)]$ , dann ist  $\pi(p_1) = \pi(p_2)$  und  $\lambda_{\kappa(p_1)}y_1 = \lambda_{\kappa(p_2)}y_2$ . Aus der ersten Gleichung folgt die Existenz eines  $a \in G$  mit  $p_2 = \psi_a p_1$ . Dann liefert die zweite Gleichung

$$\lambda_{\kappa(p_2)}y_2 = \lambda_{\kappa(\psi_a p_1)}y_2 = \lambda_{\kappa(p_1) \cdot a}y_2 = \lambda_{\kappa(p_1)}(\lambda_a y_2) = \lambda_{\kappa(p_1)}y_1 .$$

Durch Anwendung von  $\lambda_{a^{-1}\kappa(p_1)}^{-1}$  folgt  $y_2 = \lambda_{a^{-1}}y_1$ . Damit gilt  $[(p_1, y_1)] = [(p_2, y_2)]$ .  $\square$

**Definition 75** Die so konstruierte Struktur  $(E, M, F, G, P)$  heißt das mit dem Hauptfaserbündel  $P$  assoziierte Faserbündel über der Basis  $M$  mit typischer Faser  $F$  und Strukturgruppe  $G$ . Falls  $F$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist, dann heißt  $E$  assoziiertes Vektorbündel.

Wir betrachten  $\chi_i^E \circ (\chi_j^E)^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F$ :

$$\chi_i^E \circ (\chi_j^E)^{-1}(x, y) = \chi_i^E \circ \iota(p, \lambda_{\kappa_j(p)}^{-1}y) = (\pi(p), \lambda_{\kappa_i(p)} \lambda_{\kappa_j(p)}^{-1}y) = (x, \lambda_{\rho_{ij}(x)}y)$$

Damit läßt sich  $E$  aus den Übergangsfunktionen  $\rho_{ij}$  rekonstruieren.

Sei  $F_x = \pi_E^{-1}(x)$  die Faser über  $x \in U$ , dann ist die Abbildung  $\text{pr}_2 \circ \chi^E : F_x \rightarrow F$  bijektiv und gegeben durch  $\text{pr}_2 \circ \chi^E[(p, y)] = \lambda_{\kappa(p)}y$ . Sei  $F$  nun ein endlich-dimensionaler Vektorraum, dann definiert diese Bijektion eine Vektorraum-Struktur auf  $F_x$ . Wenn  $[(p_1, y_1)], [(p_2, y_2)] \in F_x$ , dann ist  $p_2 = \psi_a p_1$  und damit  $[(p_2, y_2)] = [(p_1, \lambda_a y_2)]$ . Dann definieren wir

$$c_1[(p_1, y_1)] + c_2[(p_2, y_2)] = [(p_1, c_1 y_1 + c_2 \lambda_a y_2)] .$$

Im weiteren sei  $F$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

**Satz 47** *Es existiert eine eindeutige Zuordnung zwischen Schnitten  $\phi$  des assoziierten Vektorbündels  $E$  und äquivarianten Abbildungen  $\tilde{\phi} : P \rightarrow F$ , d.h.  $\tilde{\phi} \circ \psi_a = \lambda_{a^{-1}} \circ \tilde{\phi}$ , so daß*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{(\text{id}_P, \tilde{\phi})} & P \times F \\ \pi \downarrow & & \downarrow \iota \\ M & \xrightarrow{\phi} & E \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm ist.

*Beweis:* Das Diagramm liefert  $\phi(\pi(p)) = [(p, \tilde{\phi}(p))]$  für ein beliebiges  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Sei  $\tilde{\phi}$  gegeben, dann ist die Abbildung wohldefiniert, denn wenn statt  $p$  ein anderes  $p_1 \in \pi^{-1}(x)$  gewählt wird, dann gilt  $p_1 = \psi_a p$  und  $[(p_1, \tilde{\phi}(p_1))] = [(\psi_a p, \tilde{\phi}(\psi_a p))] = [(\psi_a p, \lambda_{a^{-1}} \tilde{\phi}(p))] = [(p, \tilde{\phi}(p))]$ . Sei  $\phi$  gegeben, dann setzen wir  $\tilde{\phi}(p) := \lambda_{\kappa(p)^{-1}}(\text{pr}_2 \circ \chi^E(\phi(\pi(p))))$ . Tatsächlich ist für  $\phi(\pi(p)) = [(p, y)]$  dann

$$[(p, \lambda_{\kappa(p)^{-1}}(\text{pr}_2 \circ \chi^E(\phi(\pi(p)))))] = [(p, \lambda_{\kappa(p)^{-1}} \lambda_{\kappa(p)} y)] = [(p, y)] = \phi(\pi(p)) .$$

Dann gilt für einen anderen Punkt  $p_1 = \psi_a p$  in der gleichen Faser

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\psi_a p) &= \lambda_{\kappa(\psi_a p)^{-1}}(\text{pr}_2 \circ \chi^E(\phi(\pi(\psi_a p)))) = \lambda_{(\kappa(p)a)^{-1}}(\text{pr}_2 \circ \chi^E(\phi(\pi(p)))) \\ &= \lambda_{a^{-1}} \lambda_{\kappa(p)^{-1}}(\text{pr}_2 \circ \chi^E(\phi(\pi(p)))) = \lambda_{a^{-1}} \tilde{\phi}(p) . \end{aligned} \quad \square$$

Materiefelder in Eichtheorien sind solche Schnitte  $\phi$  eines Vektorbündels  $E$ , welches zum die Eichtheorie beschreibenden Hauptfaserbündel  $P$  assoziiert ist. Die äquivalente Beschreibung durch ein  $\tilde{\phi} : P \rightarrow F$  erlaubt dann die Definition kovarianter Ableitungen über den Horizontalitätsbegriff auf  $P$ .

**Definition 76** Sei  $F$  ein Vektorraum und  $(E, M, F, G, P)$  das zu  $P$  assoziierte Vektorbündel. Eine  $k$ -Form  $\tilde{\alpha}$  auf  $P$  mit Werten in  $F$  heißt horizontal vom Typ  $\lambda$ , wenn

- $\tilde{\alpha}(X_1, \dots, X_k) = 0$  falls ein  $X_i \in \mathfrak{X}(P)$  vertikal ist,
- $\psi_a^* \tilde{\alpha} = \lambda_{a^{-1}} \tilde{\alpha}$ .

**Satz 48** *Es existiert eine eindeutige Zuordnung zwischen lokalen  $k$ -Formen  $\alpha$  auf  $M$  mit Werten in  $E$  und horizontalen  $k$ -Formen  $\tilde{\alpha}$  vom Typ  $\lambda$  auf  $P$  mit Werten in  $F$ , so daß das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^\infty(\Lambda^k TP) & \xrightarrow{\text{pr}_P \times \tilde{\alpha}} & P \times F \\ (\pi_*)^k \downarrow & & \downarrow \iota \\ \Gamma^\infty(\Lambda^k TM) & \xrightarrow{\alpha} & E \end{array}$$

Dabei bedeutet Lokalität von  $\alpha$ , daß  $\pi_E(\alpha_x(X_1, \dots, X_k)) = x$  gilt.

*Beweis:* Das Diagramm liefert  $\alpha_{\pi(p)}(\pi'X_1, \dots, \pi'X_k) = \iota(p, \tilde{\alpha}_p(X_1, \dots, X_k))$  für  $X_i \in T_pP$ . Dabei ist  $X_i \in H_p$  horizontal auf beiden Seiten. Sei  $\tilde{\alpha}$  gegeben, dann ist  $\alpha$  wohldefiniert, denn wenn statt  $p$  ein anderes  $\hat{p} \in \pi^{-1}(x)$  sowie statt  $X_i \in H_p \subset T_pP$  horizontale Vektoren  $\hat{X}_i \in H_{\hat{p}} \subset T_{\hat{p}}P$  gewählt werden, dann gilt  $\hat{p} = \psi_a p$  und

$$\begin{aligned} \iota(\hat{p}, \tilde{\alpha}_{\hat{p}}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_k)) &= \iota(\psi_a p, \tilde{\alpha}_{\psi_a p}((\psi'_a)_p(\psi'_{a-1}\hat{X}_1), \dots, (\psi'_a)_p(\psi'_{a-1}\hat{X}_k))) \\ &= \iota(\psi_a p, (\psi_a^* \tilde{\alpha})_p((\psi'_{a-1}\hat{X}_1), \dots, (\psi'_{a-1}\hat{X}_k))) \\ &= \iota(\psi_a p, \lambda_{a^{-1}}(\tilde{\alpha}_p((\psi'_{a-1}\hat{X}_1), \dots, (\psi'_{a-1}\hat{X}_k)))) \\ &= \iota(p, \tilde{\alpha}_p((\psi'_{a-1}\hat{X}_1), \dots, (\psi'_{a-1}\hat{X}_k))) . \end{aligned}$$

Da  $\psi'_{a-1}\hat{X}_i$  wieder horizontal ist und sich wegen  $\pi'\psi'_{a-1}\hat{X}_i = \pi'\hat{X}_i = \pi'(X_i)$  auf den gleichen Tangentialvektor von  $T_xM$  projiziert, ist  $\psi'_{a-1}\hat{X}_i = X_i$ .

Sei  $\alpha$  gegeben, dann setzen wir  $\tilde{\alpha}_p(X_1, \dots, X_k) := \lambda_{\kappa(p)^{-1}}(\text{pr}_2 \circ \chi^E(\alpha_{\pi(p)}(\pi'X_1, \dots, \pi'X_k)))$ . Tatsächlich ist für  $\alpha_{\pi(p)}(\pi'X_1, \dots, \pi'X_k) = [(p, y)]$  dann

$$\begin{aligned} [(p, \lambda_{\kappa(p)^{-1}}(\text{pr}_2 \circ \chi^E(\alpha_{\pi(p)}(\pi'X_1, \dots, \pi'X_k)))] &= [(p, \lambda_{\kappa(p)^{-1}}\lambda_{\kappa(p)}y)] = [(p, y)] \\ &= \alpha_{\pi(p)}(\pi'X_1, \dots, \pi'X_k) . \end{aligned}$$

Dann gilt für einen anderen Punkt  $p_1 = \psi_a p$  in der gleichen Faser und horizontale Vektoren  $\psi'_a X_i$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{\psi_a p}(\psi'_a X_1, \dots, \psi'_a X_k) &= \lambda_{\kappa(\psi_a p)^{-1}}(\text{pr}_2 \circ \chi^E(\alpha_{\pi(\psi_a p)}(\pi'\psi'_a X_1, \dots, \pi'\psi'_a X_k))) \\ &= \lambda_{(\kappa(p)a)^{-1}}(\text{pr}_2 \circ \chi^E(\alpha_{\pi(p)}(\pi'X_1, \dots, \pi'X_k))) \\ &= \lambda_{a^{-1}}\tilde{\alpha}_{\psi_a p}(\psi'_a X_1, \dots, \psi'_a X_k) . \quad \square \end{aligned}$$

#### 4.5.1 Kovariante Ableitung

**Definition 77** Sei  $\tilde{\phi} : P \rightarrow F$  eine äquivariante Abbildung,  $\tilde{\phi} \circ \psi_a = \lambda_{a^{-1}} \circ \tilde{\phi}$ . Dann ist die kovariante Ableitung  $D\tilde{\phi}$  im Sinne des vorgegebenen Zusammenhangs auf  $P$  definiert durch

$$(D\tilde{\phi})_p(X) = (d\tilde{\phi})_p(\text{hor}X) , \quad X \in T_pP .$$

**Satz 49**  $D\tilde{\phi}$  ist eine horizontale 1-Form auf  $P$  mit Werten in  $F$  vom Typ  $\lambda$ , und es gilt

$$(D\tilde{\phi})_p(X) = (d\tilde{\phi})_p(X) + \lambda'(\omega_p(X))\tilde{\phi}(p) .$$

*Beweis:* Horizontalität ist klar. Sei der horizontale Vektor  $X \in H_p$  tangential and die Kurve  $t \mapsto p(t)$ , dann ist  $\psi'_a X \in H_{\psi_a p}$  ebenfalls horizontal. Es gilt

$$(\psi_a^*(D\tilde{\phi}))_p(X) = (D\tilde{\phi})_{\psi_a p}(\psi'_a X) = (d\tilde{\phi})_{\psi_a p}(\psi'_a X)$$



$$\begin{aligned}
&= (\psi'_a X)(\tilde{\phi}) = X(\psi_a^* \tilde{\phi}) = \left. \frac{d}{dt} \tilde{\phi}(\psi_a p(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \lambda_{a^{-1}} \tilde{\phi}(p(t)) \right|_{t=0} \\
&= \lambda_{a^{-1}}(X \tilde{\phi}) = \lambda_{a^{-1}}((d\tilde{\phi})_p(X)) = \lambda_{a^{-1}}((D\tilde{\phi})_p(X)) .
\end{aligned}$$

Sei  $X \in T_p P$ , dann ist  $\text{hor}X = X - \text{ver}X = X - \sigma_p(\omega_p(X))$ , denn für  $\text{ver}X = A_* = \sigma_p(A)$  gilt  $\omega_p(A_*) = A$ . Dieses fundamentale Vektorfeld  $A_*$  ist tangential and die Kurve  $t \mapsto \psi_{\exp(t\omega_p(X))}p$ . Dann folgt

$$\begin{aligned}
(D\tilde{\phi})_p(X) &= (d\tilde{\phi})_p(X - \sigma_p(\omega_p(X))) = (d\tilde{\phi})_p(X) - \sigma_p(\omega_p(X))(d\tilde{\phi}) \\
&= (d\tilde{\phi})_p(X) - \left. \frac{d}{dt} \tilde{\phi} \circ \psi_{\exp(t\omega_p(X))}p \right|_{t=0} \\
&= (d\tilde{\phi})_p(X) - \left. \frac{d}{dt} \lambda_{\exp(-t\omega_p(X))} \tilde{\phi}(p) \right|_{t=0} \\
&= (d\tilde{\phi})_p(X) + \lambda'(\omega_p(X))\tilde{\phi}(p) . \quad \square
\end{aligned}$$

#### 4.5.2 Darstellung in lokaler Trivialisierung

**Definition 78** Sei  $\chi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$  eine lokale Trivialisierung und  $s_i : U_i \rightarrow P$  der durch  $\kappa_i \circ s_i(x) = e$  für alle  $x \in U_i$  definierte kanonische lokale Schnitt. Dann ist das *lokale Vektorfeld* die Abbildung  $v_i = s_i^* \tilde{\phi} = \tilde{\phi} \circ s_i : U_i \rightarrow F$ . Die kovariante Ableitung des Vektorfeldes ist durch  $Dv_i := s_i^*(D\tilde{\phi})$  definiert.

Sei  $p \in \pi^{-1}(x)$  beliebig, dann gibt es ein  $a \in G$  mit  $p = \psi_a(s_i(x))$ . Anwendung von  $\kappa_i$  liefert  $\kappa_i(p) = \kappa_i(\psi_a(s_i(x))) = \kappa_i(s_i(x)) \cdot a = a$ , also  $s_i(x) = \psi_{\kappa_i(p)^{-1}}p$ . Damit gilt  $v_i(x) = \tilde{\phi}(s_i(x)) = \tilde{\phi}(\psi_{\kappa_i(p)^{-1}}p) = \lambda_{\kappa_i(p)} \tilde{\phi}(p)$  für ein beliebiges  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Sei nun eine andere Trivialisierung  $\chi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times G$  mit  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  gegeben und seien  $s_j$  und  $v_j$  der entsprechende lokale Schnitt bzw. das lokale Vektorfeld. Folglich gilt  $v_i(x) = \lambda_{\kappa_i(p)} \lambda_{\kappa_j(p)^{-1}} v_j(x) = \lambda_{\rho_{ij}(x)} v_j(x)$ , wobei  $\rho_{ij}(x) = \kappa_i(p) \kappa_j(p)^{-1} \in G$  die (unabhängig von  $p \in \pi^{-1}(U_i \cap U_j)$  definierten) Übergangsfunktionen von  $P$  sind.

**Satz 50** Für  $x \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$  gilt  $(Dv_i)_x = \lambda_{\rho_{ij}}(Dv_j)_x$ .

*Beweis:* Sei  $X$  tangential an die Kurve  $t \mapsto x(t)$  und sei  $t \mapsto p(t)$  ein beliebiger Lift dieser Kurve, so daß  $\pi(p(t)) = x(t)$ . Sei  $Y \in T_p P$  der Tangentialvektor an die Kurve  $t \mapsto p(t)$ . Dann gilt  $s(x(t)) = \psi_{\kappa(p(t))^{-1}}p(t)$  und für  $f \in C^\infty(P)$

$$\begin{aligned}
(s'X)f &= \left. \frac{d}{dt} f \circ s(x(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f \circ \psi_{\kappa(p(t))^{-1}}p(t) \right|_{t=0} \\
&= Y(\psi_{\kappa(p)^{-1}}f) + \left. \frac{d}{dt} (\psi_p^* f) \kappa(p(t))^{-1} \right|_{t=0} \\
&= Y(\psi_{\kappa(p)^{-1}}f) - \kappa^*(L_{\kappa(p)^{-1}}^*(R_{\kappa(p)^{-1}}^*(\psi_p^* f)))Y \\
&= (\psi'_{\kappa(p)^{-1}}Y)f - (\psi'_p(R'_{\kappa(p)^{-1}}(L'_{\kappa(p)^{-1}}(\kappa'_p Y))))f .
\end{aligned}$$

Dabei ist  $\kappa'_p Y \in T_{\kappa(p)}G = L'_{\kappa(p)}B$  mit  $B \in \mathfrak{g}$ . Wir haben

$$\psi_p(R_{\kappa(p)}^{-1}g) = \psi_{g \cdot \kappa(p)^{-1}}p = \psi_{\kappa(p)^{-1}}(\psi_g p)$$

Sei  $g(t) = \exp(tB)$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} f \circ \psi_p(R_{\kappa(p)}^{-1} \exp(tB)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} (R_{\kappa(p)}^* (\psi_p^* f)) \exp(tB) \right|_{t=0} \\ &= B_e (R_{\kappa(p)}^* (\psi_p^* f)) = (\psi'_p (R'_{\kappa(p)} B)) f \\ &= \left. \frac{d}{dt} f \circ \psi_{\kappa(p)^{-1}} (\psi_{\exp(tB)} p) \right|_{t=0} = \sigma_p(B) (\psi_{\kappa(p)^{-1}}^* f) . \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$s'X = \psi'_{\kappa(p)^{-1}} (Y - \sigma_p(L'_{\kappa(p)} (\kappa'_p Y)))$$

und damit

$$\begin{aligned} (Dv)_x(X) &= (s^*(D\tilde{\phi}))_x(X) = (D\tilde{\phi})_{s(x)}(s'X) \\ &= (D\tilde{\phi})_{\psi_{\kappa(p)^{-1}}p} (\psi'_{\kappa(p)^{-1}} (Y - \sigma_p(L'_{\kappa(p)} (\kappa'_p Y)))) \\ &= (\psi_{\kappa(p)^{-1}}^* (D\tilde{\phi}))_p (Y - \sigma_p(L'_{\kappa(p)} (\kappa'_p Y))) \\ &= \lambda_{\kappa(p)} ((D\tilde{\phi})_p(Y)) . \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich

$$(Dv_i)_x(X) = \lambda_{\kappa_i(p)} \lambda_{\kappa_j(p)^{-1}} (Dv_j)_x(X) = \lambda_{\rho_{ij}(x)} (Dv_j)_x(X) . \quad \square$$

**Satz 51** *Es gilt  $(Dv)(X) = (dv)(X) + \lambda'(\mathcal{A}(X))v$  mit  $\mathcal{A} = s^*\omega$ .*

*Beweis:* Sei  $X \in T_xM$ , dann gilt

$$\begin{aligned} (Dv)_x(X) &= (s^*(D\tilde{\phi}))_x(X) = (D\tilde{\phi})_{s(x)}(s'X) \\ &= (d\tilde{\phi})_{s(x)}(s'X) + \lambda'(\omega_{s(x)}(s'X))\tilde{\phi}(s(x)) \\ &= (s'X)(\tilde{\phi}) + \lambda'(\omega_{s(x)}(s'X))\tilde{\phi}(s(x)) \\ &= X(\tilde{\phi} \circ s) + \lambda'(\mathcal{A}_x(X))\tilde{\phi}(s(x)) \\ &= (dv)_x(X) + \lambda'(\mathcal{A}_x(X))v(x) . \quad \square \end{aligned}$$

### 4.5.3 Eichtransformationen

Sei  $\mathcal{G}$  die Gruppe der vertikalen Automorphismen von  $P$  und  $\hat{\theta} \in \mathcal{G}$  mit  $\hat{\theta}(p) = \psi_{u(p)}p$ . Damit folgt

$$(\hat{\theta}^* \tilde{\phi})_p = \tilde{\phi} \circ \psi_{u(p)}p = \lambda_{u(p)^{-1}} \tilde{\psi}(p) .$$

Die induzierte Transformation  $v \mapsto \hat{v}$  ist wegen  $v(x) = \lambda_{\kappa(p)} \tilde{\phi}(p)$  gegeben durch

$$\hat{v}(x) = \lambda_{\kappa(p)} (\hat{\theta}^* \tilde{\phi})(p) = \lambda_{\kappa(p)} \lambda_{u(p)^{-1}} \tilde{\psi}(p) = \lambda_{\kappa(p)} \lambda_{u(p)^{-1}} \lambda_{\kappa(p)^{-1}} v(x) = \lambda_{\tau(x)^{-1}} v(x) .$$

Die Eichtransformation der kovarianten Ableitung ist dann

$$(\widehat{D\tilde{\phi}})_p(Y) := (\hat{\theta}^*(D\tilde{\phi}))_p(Y) = (\psi_{u(p)}^*(D\tilde{\phi}))_p(Y) = \lambda_{u(p)^{-1}} ((D\tilde{\phi})_p(Y))$$

Wegen  $(Dv)_x(X) = \lambda_{\kappa(p)} ((D\tilde{\phi})_p(Y))$  gilt dann für die Eichtransformation der kovarianten Ableitung des lokalen Vektorfeldes

$$(\widehat{Dv})_x(X) = \lambda_{\kappa(p)} (\widehat{D\tilde{\phi}})_p(Y) = \lambda_{\kappa(p)} \lambda_{u(p)^{-1}} \lambda_{\kappa(p)^{-1}} (Dv)_x(X) = \lambda_{\tau(x)^{-1}} (Dv)_x(X) .$$

### 4.5.4 Wirkungsfunktional

Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$  ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt auf  $F$ , d.h.  $\langle \lambda(a)y_1, \lambda(a)y_2 \rangle_F = \langle y_1, y_2 \rangle_F$ . Wir bezeichnen mit  $\wedge_F$  die Kombination aus äußerem Produkt in  $\Lambda M$  und diesem Skalarprodukt auf  $F$ , d.h. in Tensorprodukt-Schreibweise

$$(\alpha \otimes y_1) \wedge_F (\beta \otimes y_2) := \alpha \wedge \beta \langle y_1, y_2 \rangle_F$$

**Definition 79** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 2$  und  $\star$  der durch die Metrik  $g$  induzierte Hodge-Stern Operator. Sei  $P$  ein Hauptfaserbündel über  $M$  und  $E$  ein zu  $P$  assoziiertes Vektorbündel mit typischer Faser  $F$ . Dann ist das Wirkungsfunktional auf dem Raum der Zusammenhänge auf  $P$  und dem Raum der Schnitte von  $E$  definiert durch

$$S[\omega, \phi] = \int_M \left( \mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F} + Dv \wedge_F \star (Dv) + \star V(\langle v, v \rangle_F) \right) ,$$

wobei das  $V(z)$  ein Polynom in  $z$  ist. Dabei beschreibt der  $z$ -lineare Teil von  $V(z)$  einen Massenterm für das Vektorfeld  $\phi$ .

**Satz 52** Das Wirkungsfunktional  $S[\omega, \phi]$  ist wohldefiniert (unabhängig von der Trivialisierung, die die lokalen Größen  $\mathcal{F}$  und  $v$  definiert) und eichinvariant,  $S[\hat{\theta}^* \omega, \hat{\theta}^* \phi] = S[\omega, \phi]$ .

*Beweis:* Der Beweis ist völlig analog zum Beweis für  $YM[\omega]$ . Man verwendet  $v_i(x) = \lambda_{\rho_{ij}(x)} v_j(x)$  und  $(Dv_i)_x = \lambda_{\rho_{ij}(x)} (Dv_j)_x$  sowie  $\hat{v}(x) = \lambda_{\tau(x)^{-1}} v(x)$  und  $(\widehat{Dv})_x = \lambda_{\tau(x)^{-1}} (Dv)_x$  und schließlich die  $G$ -Invarianz von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ .  $\square$

#### 4.5.5 Darstellung in lokalen Basen

Sei  $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}_{\mu=1}^n$  eine Basis von  $T_x U$  und  $\{b_i\}_{i=1}^N$  eine Basis von  $\mathfrak{g}$ . Sei  $\{y_A\}_{A=1}^N$  eine Basis von  $F$ , dann hat das lokale Vektorfeld  $v$  die Darstellung  $v(x) = \sum_{A=1}^N v^A y_A$ . Außerdem ist durch  $\lambda'(b_i) y_A = \sum_{B=1}^N \lambda_{iA}^B y_B$  die Darstellungsmatrix des Basisvektors  $b_i \in \mathfrak{g}$  in der Basis von  $F$  definiert. Dann bekommen wir für die kovariante Ableitung mit  $X = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  die Beziehung

$$\begin{aligned} (Dv)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) &\equiv D_\mu v = \sum_{A=1}^v (D_\mu v^A) y_A = (dv)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) + \lambda'\left(\mathcal{A}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\right)v \\ &= \sum_{A=1}^v \frac{\partial v^A}{\partial x^\mu} y_A + \sum_{i=1}^N \sum_{A,B=1}^v \mathcal{A}_\mu^i \lambda_{iB}^A v^B y_A. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für den Hodge-Stern

$$\begin{aligned} *(Dv) &= * \left( \sum_{\mu=1}^n \sum_{A=1}^N \frac{\partial v^A}{\partial x^\mu} dx^\mu \otimes y_A + \sum_{\mu=1}^n \sum_{i=1}^N \sum_{A,B=1}^N \mathcal{A}_\mu^i \lambda_{iB}^A v^B dx^\mu \otimes y_A \right) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\mu, \rho_1, \dots, \rho_n=1}^n \sqrt{|\det g|} g^{\mu \rho_1} \epsilon_{\rho_1 \dots \rho_n} \left( \sum_{A=1}^N \frac{\partial v^A}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^N \sum_{A,B=1}^N \mathcal{A}_\mu^i \lambda_{iB}^A v^B \right) \\ &\quad \times dx^{\rho_2} \wedge \dots \wedge dx^{\rho_n} \otimes y_A. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir wegen  $dx^\nu \wedge dx^{\rho_2} \wedge \dots \wedge dx^{\rho_n} = \epsilon^{\nu \rho_2 \dots \rho_n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  und  $\sum_{\rho_2, \dots, \rho_n} \epsilon_{\rho_1 \dots \rho_n} \epsilon^{\nu \rho_2 \dots \rho_n} = (n-1)! \delta_{\rho_1}^\nu$  die Beziehung

$$\begin{aligned} (Dv) \wedge_F *(Dv) &= \sum_{\mu, \nu=1}^n g^{\mu \nu} \left( \sum_{A'=1}^N \frac{\partial v^{A'}}{\partial x^\nu} + \sum_{j=1}^N \sum_{A', B'=1}^N \mathcal{A}_\nu^j \lambda_{j B'}^{A'} v^{B'} \right) \left( \sum_{A=1}^N \frac{\partial v^A}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^N \sum_{A, B=1}^N \mathcal{A}_\mu^i \lambda_{iB}^A v^B \right) \\ &\quad \times \langle y_{A'}, y_A \rangle_F v_g \end{aligned}$$

Wir nehmen im weiteren an, daß die Basen von  $F$  und  $\mathfrak{g}$  orthonormal bezüglich der Skalarprodukte sind. Dann gilt  $\langle v, v \rangle_F = \sum_{A=1}^N (v^A)^2$  und

$$*V(\langle v, v \rangle_F) = v_g \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{A_1, \dots, A_q} c_q (v^{A_1})^2 \dots (v^{A_q})^2$$

#### 4.5.6 Euler-Lagrange-Gleichungen

Die Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben sich wieder aus dem Hamiltonschen Prinzip, welches jene durch  $(\omega, \phi)$  definierte Geometrie auszeichnet, für die das

Wirkungsfunktional stationär wird. Durch Variation  $\mathcal{A} \mapsto \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \epsilon \delta \mathcal{A}$  und  $v \mapsto \tilde{v} = v + \epsilon \delta v$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
S[\tilde{\omega}, \tilde{\phi}] - S[\omega, \phi] &= YM[\tilde{\omega}] - YM[\omega] \\
&+ 2\epsilon \int_M v_g \sum_{\mu, \nu=1}^n \sum_{j=1}^N \sum_{A, B=1}^{\mathcal{N}} \delta \mathcal{A}_\mu^j \lambda_{jB}^A v^B \left( \frac{\partial v^A}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^N \sum_{C=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_\mu^i \lambda_{iC}^A v^C \right) \\
&- 2\epsilon \int_M v_g \sum_{A=1}^{\mathcal{N}} \delta v^A \left( \sum_{\mu, \nu=1}^n \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{|\det g|} g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial v^A}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^N \sum_{C=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_\mu^i \lambda_{iC}^A v^C \right) \right) \right. \\
&- \left. \sum_{B=1}^{\mathcal{N}} \sum_{\mu, \nu=1}^n \sum_{j=1}^N \lambda_{jA}^B \mathcal{A}_\mu^j \left( \frac{\partial v^B}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^N \sum_{C=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_\mu^i \lambda_{iC}^B v^C \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial v^A} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu, \sigma=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{|\det g|} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \mathcal{F}_{\rho\sigma}^j \right) + \sum_{i, k=1}^N g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} c_{ik}^j \mathcal{A}_\mu^i \mathcal{F}_{\rho\sigma}^k \right) &= -J_\nu^j \\
\sum_{\mu, \nu=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{|\det g|} g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial v^A}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^N \sum_{C=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_\mu^i \lambda_{iC}^A v^C \right) \right) \right. \\
&- \left. \sum_{B=1}^{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^N \lambda_{jA}^B \mathcal{A}_\mu^j \left( \frac{\partial v^B}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^N \sum_{C=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_\mu^i \lambda_{iC}^B v^C \right) \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial v^A} = 0
\end{aligned}$$

mit

$$J_\nu^j = \sum_{\mu=1}^n \sum_{A, B=1}^{\mathcal{N}} \lambda_{jB}^A v^B \left( \frac{\partial v^A}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^N \sum_{C=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_\mu^i \lambda_{iC}^A v^C \right).$$

Eine triviale Lösung dieser Gleichungen ist  $\mathcal{A}_\mu^i = 0$  und  $v^B = 0$ . Eine etwas weniger triviale ist  $\mathcal{A}_\mu^i = 0$  und  $v^B = v_0^B = \text{const}$  mit  $\frac{\partial V}{\partial v^A} \Big|_{v^B=v_0^B} = 0$ .

#### 4.5.7 Quantenfluktuationen

In der Quantenphysik werden (im Gegensatz zur klassischen Feldtheorie) auch andere Geometrien als die durch die Stationarität des Wirkungsfunktionals definierten Lösungen realisiert. Jede mathematisch mögliche Geometrie wird mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit realisiert. Die Bedeutung der stationären Punkte besteht darin, daß sie mit der größten Wahrscheinlichkeit auftreten. Gibt es mehrere stationäre Punkte, dann haben treten auch sie i.a. mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten auf. Insbesondere kann die Lösung von  $\frac{\partial V}{\partial v^A} \Big|_{v^B=v_0^B} = 0$  wahrscheinlicher sein als die triviale Lösung. Man sagt, daß  $(\mathcal{A}_\mu^i = 0, v^B = v_0^B = \text{const})$

die Vakuumlösung ist. Ein solches nichttriviales Vakuum ist oft mit interessanten Phänomenen verbunden wie spontaner Symmetriebrechung und Phasenübergängen.

Es ist sinnvoll, die Geometrie in der Nähe der Vakuumlösung zu parametrisieren durch  $v^B = v_0^B + \tilde{v}^B$ . Dann wird  $\tilde{v}^B$  als das physikalische Feld angesehen. Die kovariante Ableitung schreibt sich dann als

$$D_\mu \tilde{v}^A = \frac{\partial \tilde{v}^A}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^N \sum_{B=1}^v \mathcal{A}_\mu^i \lambda_{iB}^A (v_0^B + \tilde{v}^B) .$$

Der dabei auftretende Term  $\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_\mu^i (\sum_{B=1}^v \lambda_{iB}^A v_0^B)$ , der quadratisch in die Wirkung eingeht, führt dann zu einem Massenterm fürs Eichpotential  $\mathcal{A}_\mu^i$ . Es ist die einzige geometrische Möglichkeit, massive Eichfelder zu erhalten. Dieser Mechanismus der Massenerzeugung über das Vakuum heißt Higgs-Mechanismus. Er ist verbunden mit einer Reduktion der Symmetriegruppe zu einer Untergruppe.

## 4.6 Reduktion von Hauptfaserbündeln

**Definition 80** Sei  $(P, M, G, \pi, \psi)$  ein Hauptfaserbündel und  $\eta : H \rightarrow G$  eine Homomorphismus von Lie-Gruppen. Eine Reduktion von  $P$  ist gegeben durch ein Hauptfaserbündel  $(Q, M, H, \pi_Q, \psi^Q)$  und eine differenzierbare Abbildung  $\varrho : Q \rightarrow P$ , so daß

- $\pi \circ \varrho = \pi_Q$
- $\varrho(\psi_h^Q q) = \psi_{\eta(h)} \varrho(q)$ .

Wichtige Beispiele sind die Reduktion des (im nächsten Semester einzuführenden) Reperbündels (Bündel der linearen Bezugssysteme) mit Strukturgruppe  $GL(n, \mathbb{R})$  zu einem  $O(n, \mathbb{R})$ -Bündel der orthogonalen Bezugssysteme (mittels der Metrik) und dann zu einem  $SO(n, \mathbb{R})$ -Bündel (mittels der Orientierung).

Sei  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ . Dann wird auf  $G$  folgende Äquivalenzrelation definiert

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists h \in H : g_1 = g_2 h .$$

Der homogene Raum  $G/H$  ist der Raum aller Äquivalenzklassen:  $G/H = \{[g], g \in G\}$ . Man kann zeigen, daß  $(G, G/H, H)$  ein Hauptfaserbündel wird.

Auf  $G/H$  ist eine linke  $G$ -Wirkung gegeben durch  $\lambda_g[g'] = [gg']$ . Damit läßt sich ein zu  $P$  assoziiertes Bündel  $E$  konstruieren:  $E = (P \times G/H)/G$ .

**Satz 53** Durch  $j([(p, [g]_H)]_E) := [\psi_g p]_H$  wird ein Diffeomorphismus  $j : E = (P \times G/H)/G \rightarrow P/H$ , durch den  $P$  ein Hauptfaserbündel über  $E$  mit Strukturgruppe  $H$  wird.

**Satz 54** Das Hauptfaserbündel  $(P, M, G, \pi, \psi)$  ist genau dann auf eine abgeschlossene Untergruppe  $H \subset G$  reduzierbar, wenn das mit  $P$  assoziierte Faserbündel  $(E, M, G/H, G)$  einen globalen glatten Schnitt besitzt.

*Beweis:* Sei  $\phi : M \rightarrow E$  ein globaler glatter Schnitt, dann entspricht dem eine äquivariante Abbildung  $\tilde{\phi} : P \rightarrow G/H$  mit  $\tilde{\phi}(\psi_g p) = \lambda_{g^{-1}} \tilde{\phi}(p)$ . Wir definieren  $Q = \{q \in P, \tilde{\phi}(q) = [e]\}$ .

1.  $H$  wirkt von rechts auf  $Q$ , denn  $\tilde{\phi}(\psi_h q) = \lambda_{h^{-1}} \tilde{\phi}(q) = \lambda_{h^{-1}} [e] = [e]$ .
2. Seien  $q_1, q_2 \in Q \cap \pi^{-1}(x)$ , dann gibt es ein  $g \in G$  mit  $q_2 = \psi_g q_1$ . Weiter ist  $[e] = \tilde{\phi}(q_2) = \tilde{\phi}(\psi_g q_1) = \lambda_{g^{-1}} \tilde{\phi}(q_1) = \lambda_{g^{-1}} [e] = [g^{-1}]$ , also  $g \in H$ . Also wirkt  $H$  transitiv auf den Fasern.  $H$ -Wirkung ist frei, da  $G$ -Wirkung frei.
3. Trivialisierung: Sei  $s : U \rightarrow P$  ein lokaler Schnitt von  $(P, M, G)$  und  $\tilde{s} : G/H \rightarrow G$  ein lokaler Schnitt von  $(G, G/H, H)$ , dann ist  $g := \tilde{s} \circ \tilde{\phi} \circ s : U \rightarrow G$  eine differenzierbare Abbildung. Wir setzen  $s_Q(x) := \psi_{g(x)} s(x)$ . Sei  $\pi_{G/H} : G \rightarrow G/H$  die kanonische Projektion, dann gilt  $\pi_{G/H} \circ g(x) = [g(x)] = \tilde{\phi} \circ s(x)$ . Dann gilt  $\tilde{\phi}(s_Q(x)) = \lambda_{g(x)^{-1}} \tilde{\phi}(s(x)) = \lambda_{g(x)^{-1}} [g(x)] = [e]$ , so daß  $s_Q : U \rightarrow Q$  ein Schnitt von  $Q$  ist. Dann definieren wir die Trivialisierung durch  $\chi_Q(q) = (\pi(q), \kappa_Q(q))$  mit  $q = \psi_{\kappa_Q(q)} s_Q(\pi(q))$ . Dann ist  $\psi_h q = \psi_{\kappa_Q(\psi_h q)} s_Q(\pi(\psi_h q)) = \psi_h \psi_{\kappa_Q(q)} s_Q(\pi(q))$ , so daß  $\kappa_Q(\psi_h q) = \kappa_Q(q) \cdot h$ .

Sei umgekehrt durch  $\varrho : Q \rightarrow P$  eine Reduktion von  $(P, M, G, \pi, \psi)$  nach  $(Q, M, H, \pi_Q, \psi^Q)$  gegeben. Da  $H$  als Untergruppe von links auf  $G$  wirkt, ist  $(Q \times G)/H$  ein zu  $Q$  assoziiertes Faserbündel über  $M$  mit typischer Faser  $G$ . Wir definieren eine Abbildung  $\tilde{j} : (Q \times G)/H \ni [(q, g)] \mapsto \psi_g \varrho(q) \in P$  und behaupten, daß  $\tilde{j}$  ein Diffeomorphismus ist.

1. Surjektivität: Für gegebenes  $p \in P$  mit  $\pi(p) = x$  existiert ein  $q \in Q$  mit  $\pi_Q(q) = x$ . Wegen  $\pi \circ \varrho = \pi_Q$  folgt  $\pi(\varrho(q)) = x$ , so daß ein  $g \in G$  existiert mit  $p = \psi_g \varrho(q)$ .
2. Injektivität: Sei  $\tilde{j}[(q_1, g_1)] = \tilde{j}[(q_2, g_2)] = \psi_{g_1} \varrho(q_1) = \psi_{g_2} \varrho(q_2)$ , dann liegen wegen  $\pi \circ \varrho = \pi_Q$  die Punkte  $q_1, q_2$  in der gleichen Faser, also ist  $q_2 = \psi_h^Q q_1$ . Dann folgt  $\psi_{g_2} \varrho(q_2) = \psi_{g_2} \varrho(\psi_h^Q q_1) = \psi_{g_2} \psi_h \varrho(q_1) = \psi_{hg_2} \varrho(q_1)$ , also  $g_2 = h^{-1} g_1 = \lambda_{h^{-1}} g_1$ . Damit folgt  $[(q_1, g_1)] = [(q_2, g_2)]$ .

Der globale Schnitt  $\tilde{\phi} : P \simeq (Q \times G)/H \rightarrow G/H$  wird nun erhalten durch  $\tilde{\phi}(\tilde{j}[(q, g)]) := [g^{-1}]$ . Damit ist  $\tilde{\phi}$  wohldefiniert und es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\psi_{g_1} \tilde{j}[(q, g)]) &= \tilde{\phi}(\psi_{g_1} \psi_g \varrho(q)) = \tilde{\phi}(\psi_{gg_1} \varrho(q)) = \tilde{\phi}([(q, gg_1)]) \\ &= [g_1^{-1} g^{-1}] = \lambda_{g_1^{-1}} [g^{-1}] = \lambda_{g_1^{-1}} \tilde{\phi}([(q, g)]) . \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

## 5 Eichtheorie der elektroschwachen Wechselwirkung

Wir haben in den Übungen gesehen, daß die Elektrodynamik eine Eichtheorie ist, die durch ein Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe  $U(1)$  über der Raumzeit-Mannigfaltigkeit beschrieben werden kann. Die Maxwellschen Gleichungen sind dabei die Yang-Mills-Gleichungen, wobei elektrische und magnetische Feldstärke Komponenten des lokalen Feldstärketensors werden.

- es gibt andere Kräfte in der Natur: schwache und starke
- 4 Fermion-Wechselwirkung im  $\beta$ -Zerfall
- Stärke proportional  $G_F$ , nicht renormierbar
- Idee: Austausch von Eichfeldern in Yang-Mills-Theorie. einfachste Wahl erscheint Strukturgruppe  $SU(2)$  (Isospin), die dann durch Linksmultiplikation von  $2 \times 2$ -Matrizen auf dem Vektorraum  $\mathbb{C}^2$ , in dem die  $(e, \nu)$  und  $(u, d)$ -Paare leben, wirken kann.
- diese Eichfelder müssen massiv sein
- Massenterm für Eichfelder zunächst nicht möglich
- Higgs-Mechanismus: Kopplung der Eichfelder an Skalarfeld  $v$  (Higgs-Feld), dessen Potential zu nichtverschwindendem Vakuumserwartungswert führt.
- auch Photon soll an  $e$  koppeln, aber nicht an  $\nu$ . Erfordert Idee der Hyperladung, gleich für  $(e, \nu)$ , die sich mit  $z$ -Komponente des Isospins zur elektrischen Ladung zusammensetzt. Das Photon ist masselos.

### 5.1 Geometrische Beschreibung

Wir konstruieren eine Yang-Mills-Theorie mit Strukturgruppe  $G = SU(2) \times U(1)_Y$ , die über die kovariante Ableitung an ein Skalarfeld koppelt. Das Skalarfeld ist ein Schnitt in einem zum  $SU(2) \times U(1)_Y$ -Hauptfaserbündel assoziierten Vektorbündel, welches allein durch die linke  $G$ -Wirkung auf einen Vektorraum  $F$  bestimmt ist. Da die entsprechenden Eichfelder massiv werden sollen, entsprechen sie keiner Symmetriegruppe mehr. Dagegen wird das masselose Photon durch eine  $U(1)_{em}$ -Theorie beschrieben. Wir identifizieren also  $H = U(1)_{em}$  als Untergruppe von  $G = SU(2) \times U(1)_Y$ .

Die  $SU(2) = SL(2, \mathbb{H})$  wird realisiert durch

$$SU(2) = \left\{ u_2 = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$



und  $U(1) = \{u_1 \in \mathbb{C}, |u_1| = 1\}$ . Die natürliche Wahl ist zunächst  $F = \mathbb{C}^2 \ni y$  mit der linken Gruppenwirkung

$$\lambda_{(u_2, u_1)} y = \begin{pmatrix} \alpha u_1 & -\bar{\beta} u_1 \\ \beta u_1 & \bar{\alpha} u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

Sei  $(P, M, SU(2) \times U(1)_Y)$  ein Hauptfaserbündel und  $(E, M, \mathbb{C}^2, SU(2) \times U(1)_Y)$  das dazu assoziierte Vektorbündel mit typischer Faser  $\mathbb{C}^2$ . Sei  $\omega$  ein Zusammenhang auf  $P$  und  $s : U \rightarrow P$  der kanonische Schnitt auf  $U \subset M$ , dann ist  $s^* \omega = (\mathcal{W}, \mathcal{B})$  das lokale Eichpotential, wobei

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} iW^3 & iW^1 + W^2 \\ iW^1 - W^2 & -iW^3 \end{pmatrix}$$

eine lokale 1-Form auf  $U$  ist mit Werten in  $su(2)$  (Lie-Algebra von  $SU(2)$ ) und  $\mathcal{B} = iB$  eine lokale 1-Form auf  $U$  mit Werten in  $u(1) = i\mathbb{R}$  (Lie-Algebra von  $U(1)$ ).

Das Higgs-Feld ist ein Schnitt von  $E$ , also eine Abbildung  $\phi : M \rightarrow E$  mit  $\pi_E \phi(x) = x$ . Es kann äquivalent durch eine äquivariante Abbildung  $\tilde{\phi} : P \rightarrow F$  beschrieben werden. Zurückziehen mit  $s$  definiert das lokale Higgs-Feld  $v = s^* \tilde{\phi} : U \rightarrow \mathbb{C}^2$ , d.h.  $v(x) \in \mathbb{C}^2$  für  $x \in U$ . Wegen  $\lambda_{(u_2, u_1)} = \lambda_{u_2} \lambda_{u_1}$  gilt, wenn man  $u_i(t)$  nach  $t$  differenziert,  $\lambda'(\mathcal{W}(x), \mathcal{B}(x)) = \lambda'(\mathcal{W}(x)) + \lambda'(\mathcal{B}(x))$ . Deshalb gilt für die kovariante Ableitung des lokalen Higgs-Feldes

$$(D_\mu v)_x = \sum_{\mu=1}^n dx^\mu \otimes \left( \left( \frac{\partial(v^1 + iv^2)}{\partial x^\mu} \right) + \begin{pmatrix} i(B_\mu + W_\mu^3) & iW_\mu^1 + W_\mu^2 \\ iW_\mu^1 - W_\mu^2 & i(B_\mu - W_\mu^3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 + iv^2 \\ v^3 + iv^4 \end{pmatrix} \right)$$

Das Skalarprodukt auf  $F$  ist  $\langle y, y \rangle_F = \Re(y^* y) = \sum_{A=1}^4 (y^A)^2$ . Damit wählen wir folgendes Higgs-Potential:

$$V(x) = -\frac{\mu^2}{2} \langle v(x), v(x) \rangle_F + \frac{\lambda}{4} (\langle v(x), v(x) \rangle_F)^2.$$

Es führt zur Bewegungsgleichung

$$0 = \frac{\partial V(x)}{\partial v^A(x)} = -\mu^2 v^A + \lambda v^A \langle v(x), v(x) \rangle_F$$

mit der Lösung  $v_0(x) = 0$  oder  $\langle v_0(x), v_0(x) \rangle_F = \frac{\mu^2}{\lambda}$ . Folglich ist die Lösungsmannigfaltigkeit der nichttrivialen Lösung die  $S^3$  mit Radius  $\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$ .

Die gesamte Lösungsmannigfaltigkeit  $S^3$  besitzt die volle  $\mathcal{G} = (SU(2) \times U(1)_Y) \otimes C^\infty(M)$ -Symmetrie. Jedoch wird die experimentelle Messung von  $v(x)$  einen ganz bestimmten Vakuumwert  $v(x) \in S^3$  liefern. Wir können die Eichsymmetrie nutzen, um diesen Vakuumwert in eine Standardform zu überführen.

Dazu ist ein vertikaler Automorphismus  $\hat{\theta} : P \ni p \mapsto \psi_{u(p)}p \in P$  zu verwenden, der zu  $v(x) \mapsto \hat{v}(x) = \lambda_{\tau(x)^{-1}}v(x)$  führt, mit  $\tau(x) = \kappa(p)u(p)\kappa(p)^{-1}$ . Wir wählen  $u$  so, daß  $\hat{v}(x) = (\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}, 0, 0, 0)$  auf ganz  $U$  entsteht. Dabei transformieren sich Feldstärke und kovariante Ableitung zu  $\mathcal{F}_x \mapsto \hat{\mathcal{F}}_x = \text{Ad}(\tau(x)^{-1})\mathcal{F}_x$  und  $(Dv)_x \mapsto (\hat{D}v)_x = \lambda_{\tau(x)^{-1}}(Dv)_x$ , verschwinden also identisch. Nach dieser Eichtransformation ist global  $v_0(x) = (\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}, 0, 0, 0)$  erreicht. Diese Konfiguration ist nun nicht mehr invariant unter allen vertikalen Automorphismen von  $P$ , sondern nur noch unter solchen, die  $v_0(x)$  invariant lassen. Die entsprechenden Gruppenelemente definieren nun eine Untergruppe  $H \subset G$  durch

$$H = \{(h_2, h_1) \in G, \lambda_{(h_2, h_1)}(\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}, 0, 0, 0) = (\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}, 0, 0, 0)\}$$

Mit der Matrixdarstellung von  $G$  findet man

$$(h_1, h_2) = \left( \begin{pmatrix} u_1^* & 0 \\ 0 & u_1 \end{pmatrix}, u_1 \right), \quad \lambda_{(h_2, h_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u_1)^2 \end{pmatrix}$$

Damit ist  $H \simeq U(1)_{em}$ . Mit anderen Worten, die konkrete Wahl des Vakuums bricht die Symmetrie  $G = SU(2) \times U(1)_Y$  der Lösungsmannigfaltigkeit aller Higgs-Vakua zur Untergruppe  $U(1)_{em}$ . Dieser Mechanismus heißt spontane Symmetriebrechung. Er wird geometrisch beschrieben als Reduktion des Hauptfaserbündels  $(P, M, G)$  zum Unterbündel  $(Q, M, H)$ .

Wir hatten gesehen, daß dabei der homogene Raum  $G/H$  eine wichtige Rolle spielt. Offenbar ist  $G \simeq \lambda(G)$ , so daß die Äquivalenz  $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_2 = g_1 h$  sich wie folgt schreibt:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta}_1 \\ \beta_1 & \bar{\alpha}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\alpha}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u_1)^2 \end{pmatrix}$$

Offenbar bleibt dabei die erste Spalte von  $\lambda(G)$  invariant, die durch Multiplikation mit  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  erhalten wird. Folglich gilt wir  $G/H \simeq S^3$ , wobei wir als Radius  $\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$  nehmen können. Dann ist die Äquivalenzklasse des Einselements  $[e] = (\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}, 0, 0, 0)$ .

Diese Überlegungen zeigen, daß das Higgs-Vakuum eine Abbildung  $v_0 : M \rightarrow G/H$  definiert. Ausgedrückt durch  $\tilde{\phi}_0$  ergibt sich für  $p = \psi_g s(\pi(p))$  und  $\kappa(p) = \kappa_{\psi_g s(\pi(p))} = \kappa(s(\pi(p))) \cdot g = g$  die Beziehung

$$\tilde{\phi}_0(p) = \tilde{\phi}_0(\psi_{\kappa(p)} s(\pi(p))) = \lambda_{\kappa(p)^{-1}} v_0(\pi(p)).$$

Wegen der  $G$ -Invarianz des Skalarprodukts ist  $\tilde{\phi}_0(p) \in G/H \simeq S^3$  (mit gegebenem Radius  $\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$ ). Die  $G$ -Äquivarianz ist automatisch.

Die rechte Seite ist zunächst nur lokal definiert. Man nimmt üblicherweise aber an, daß das Higgs-Vakuum eine globale äquivariante Abbildung  $\tilde{\phi} : P \rightarrow G/H$  definiert. Die allgemeinen Sätze erlauben dann eine Reduktion von  $P$  auf das durch  $Q = \{q \in P, \tilde{\phi}(q) = [e]\}$  definierte Unterbündel. Nach der zu  $v_0(x) = [e]$  führenden Eichtransformation ist  $s(x) \in Q$  und damit  $Q = \{\psi_H \circ s(M)\}$ . Da  $s$  nur lokal definiert ist, kann  $Q$  nur dann global definiert sein, wenn die Übergangsfunktionen von  $P$  in der Untergruppe  $H$  liegen,  $\rho_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow H$  (weitere äquivalente Definition der Reduktion).

### 5.1.1 Zerlegung der Zusammenhangsform

Die Reduktion auf die Untergruppe  $H \subset G$  führt auch zu einer Reduktion der Zusammenhangsform. Seien  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  die Lie-Algebren von  $G, H$  und sei die Zerlegung  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$  so gewählt, daß  $\text{Ad}(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ . Im Beispiel ist

$$\mathfrak{h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i\mathbb{R} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} ia & ib + c \\ ib - c & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Satz 55** Sei  $\varrho : Q \rightarrow P$  die Reduktionsabbildung und  $\omega$  eine Zusammenhangsform auf  $P$ , dann ist  $(\varrho^*\omega)|_{\mathfrak{h}}$  eine Zusammenhangsform auf  $Q$  und  $(\varrho^*\omega)|_{\mathfrak{m}}$  eine horizontale 1-Form auf  $Q$  (bezüglich des durch  $(\varrho^*\omega)|_{\mathfrak{h}}$  definierten Zusammenhangs) vom Typ  $\text{Ad}_H$ .

Im Beispiel ist  $\varrho = \text{id}$  und die Zerlegung führt auf ein lokales  $U(1)$ -Eichpotential  $\mathcal{A}$  mit Komponenten

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i(B_\mu - W_\mu^3) \end{pmatrix}$$

und einem 3-komponentigen Materiefeld

$$\begin{pmatrix} iZ_\mu & i\sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}iW_\mu^- & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(B_\mu + W_\mu^3) & iW_\mu^1 + W_\mu^2 \\ iW_\mu^1 - W_\mu^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukte in  $\mathfrak{g}$  und  $F$  sind nur bis auf einen Faktor definiert. Diese Faktoren heißen Kopplungskonstanten. So ist im Beispiel die Yang-Mills-Wirkung vor der Symmetriebrechung gegeben durch

$$YM[\omega_2, \omega_1] = \int_M \frac{1}{4g_2^2} \text{tr}(\mathcal{F}_2 \wedge *\mathcal{F}_2) + \frac{1}{2g_1^2} \mathcal{F}_1 \wedge *\mathcal{F}_1$$

In der Physik ist es üblich, die Kopplungskonstanten  $g_2, g_1$  in den Eichfeldern zu absorbieren,  $W^A \mapsto g_2 W^A$  und  $B \mapsto g_1 B$ . Außerdem setzen wir  $g_2 = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \cos \theta_W$  und  $g_1 = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \sin \theta_W$  sowie  $Z = \cos \theta_W W^3 + \sin \theta_W B$  und  $A = \cos \theta_W B - \sin \theta_W W^3$ .

Die in der kovariante Ableitung auftauchende Matrix der lokalen Eichfelder wird nun

$$\begin{pmatrix} i(B_\mu + W_\mu^3) & iW_\mu^1 + W_\mu^2 \\ iW_\mu^1 - W_\mu^2 & i(B_\mu - W_\mu^3) \end{pmatrix} \\ \mapsto g_2 \begin{pmatrix} \frac{i}{\cos\theta_W} Z_\mu & iW_\mu^1 + W_\mu^2 \\ iW_\mu^1 - W_\mu^2 & 0 \end{pmatrix} + 2g_2 \sin\theta_W \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i(A_\mu - \cot(2\theta_W)Z_\mu) \end{pmatrix}$$

Durch Kopplung an das Higgs-Feld  $v = (\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} + \eta, 0, 0, 0)$  entstehen Massenterme für  $W^1, W^2, Z$ , wobei  $m_z = \frac{m_w}{\cos\theta}$  wird, während das Photon  $A$  masselos bleibt. Die Elektron-ladung wird zu  $e = g_2 \sin\theta_W$ . Beide Beziehungen sind in experimenteller Übereinstimmung.