Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske **WS 06/07**

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 18.01.07, bis 17h00 in den Briefkästen Blatt 11

Aufgabe 1. Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit positivem Volumen, $v_n(K) > 0$. Dann heißt

$$S = (s_1, \ldots, s_n) \quad \text{mit} \quad s_i := \frac{1}{v_n(K)} \int_K d(x_1, \ldots, x_n)\, x_i$$

der Schwerpunkt von K.
Man berechne den Schwerpunkt eines Viertelkreises

$$\mathrm{VK} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\} \ .$$

Aufgabe 2. Für $0 \leq a < b < +\infty$ sei $r : [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative stetige Funktion und

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq x^2 + y^2 \leq \big(r(z)\big)^2 \ , \ z \in [a,b]\} \ .$$

(a) Zeige $v_3(V) = \pi \int_a^b r^2(z)\, dz$
(b) Berechne mit (a) das Volumen $v_3(K)$ der dreidimensionalen Vollkugel K mit Radius 1.
(c) Zeige: Ist (ξ, ζ) der Schwerpunkt der Menge $F = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq r(z)\, , \ z \in [a,b]\}$, d.h.

$$(\xi, \zeta) = \frac{1}{v_2(F)} \left(\int_F d(x,z)\, x \, , \ \int_F d(x,z)\, z \right),$$

so gilt $v_3(V) = 2\pi\xi\, v_2(F)$.

Aufgabe 3. Es seien $0 < r < R < \infty$ und $T \subset \mathbb{R}^3$ der Volltorus, der durch Rotation der Kreisscheibe $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = 0\, , \ (x-R)^2 + z^2 \leq r^2\}$ um die z-Achse entsteht. Berechne $v_3(T)$.

Aufgabe 4. Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt, $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Gerade, $\mathrm{d}(x,L)$ der euklidische Abstand von $x \in \mathbb{R}^3$ zu L. Dann heißt

$$\Theta := \int_K dx\ \mu(x)\, \big(\mathrm{d}(x,L)\big)^2$$

das Trägheitsmoment von K mit Dichte $\mu = \mu(x)$ bzgl. der Drehachse L.
Berechne das Trägheitsmoment der homogenen Kugelschale

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq \mathbb{R}^2\}$$

mit konstanter Dichte $\mu = 1$ bzgl. der x-Achse.