Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 06/07**
Dr. R. Brüske

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 25.01.07, bis 17h00 in den Briefkästen Blatt 12

Aufgabe 1. Es sei f eine integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^*$ positive reelle Zahlen. Zeigen Sie, daß dann auch die durch $f_a(x) := f(x-a)$ und $f_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}(x_1,\dots,x_n) := f\left(\frac{x_1}{\lambda_1},\dots,\frac{x_n}{\lambda_n}\right)$ erklärten Funktionen integrierbar auf $\mathbb{R}^n$ sind, und daß für diese gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx\ f_a(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dx\ f(x)\ , \qquad \int_{\mathbb{R}^n} dx\ f_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}(x) = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| \int_{\mathbb{R}^n} dx\ f(x)\ .$$

Aufgabe 2. a) Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ sei $c_n = \int_{-1}^{+1} dt\ (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} = 2\int_0^{\pi/2} dx\ \sin^n x$. Zeige (mit partieller Integration) für $k \in \mathbb{N}$

$$c_{2k} = \pi \prod_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2i}\ , \qquad c_{2k+1} = 2\prod_{i=1}^{k} \frac{2i}{2i+1}\ , \qquad c_n c_{n-1} = \frac{2\pi}{n} \qquad (n \geq 1)\ .$$

(es wird die Konvention $\prod_{i=a}^{b} f(i) = 1$ für $a > b$ verwendet)
b) Sei $\kappa_n(r)$ das Volumen der n-dimensionalen Kugel vom Radius r und $\kappa_n := \kappa_n(1)$. Zeige $\kappa_n = \kappa_{n-1}c_n$ (benutze Aufgabe 1), also $\kappa_n = \frac{2\pi}{n}\kappa_{n-2}$.
c) Folgere

$$\kappa_{2k} = \frac{1}{k!}\pi^k\ , \qquad \kappa_{2k+1} = \frac{2^{k+1}}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k+1)}\pi^k\ .$$

Aufgabe 3. a) Zeige:

$$A = \{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n\ :\ \|x\| \leq R\} \quad \Rightarrow \int_A dx\ x_i^2 = \kappa_n \frac{R^{n+2}}{n+2}$$

b) Berechne

$$\int_A dx\ \ln\|x\| \quad \text{für} \quad A = \{x \in \mathbb{R}^n\ : r \leq \|x\| \leq R\}$$

c) Berechne

$$\int_A dx\ x_i^2 e^{-\|x\|^2} \quad \text{für} \quad A = \{x = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4\ : r \leq \|x\| \leq R\}$$

Aufgabe 4. Für $s \in \mathbb{R}, s > 1$ sei $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Für $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ sei $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) = \begin{cases} x^{s-1}e^{-kx} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Zeige: Für $0 < \varepsilon < R < \infty$ gilt

$$\int_\varepsilon^R dx\ f_k(x) = \frac{1}{k^s} \int_{k\varepsilon}^{kR} t^{s-1} e^{-t}\, dt \quad \text{also}$$

$$\int_{\mathbb{R}} dx\ f_k(x) = \frac{\Gamma(s)}{k^s}\ , \text{ damit } \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\, dx = \Gamma(s)\zeta(s)\ .$$

b) Zeige $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}$ und folgere $\displaystyle\int_0^\infty dx\ \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} = \Gamma(s)\zeta(s)$.
(Wende auf $t_n := \sum_{k=1}^n f_k$ den Satz von der monotonen Konvergenz an.) Das Integral $\displaystyle\int_0^\infty dx\ \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}$ tritt in der statistischen Physik im Zusammenhang mit dem Planckschen Strahlungsgesetz auf.