Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske

WS 06/07

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 01.02.07, bis 17h00 in den Briefkästen — Blatt 13

Aufgabe 1. Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-x^2/2} e^{-ixt}\ .$$

Zeige:
(a) $g(0) = \sqrt{2\pi}$
(b) $g'(t) = -t\, g(t)$
(c) $g(t) = \sqrt{2\pi} e^{-t^2/2}$

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N}, x > 0, f_n(t) := \begin{cases} t^{x-1}(1-\frac{t}{n})^n & 0 < t \leq n \\ 0 & t > n \end{cases}$.
Zeige:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, t^{x-1}e^{-t} = \lim_{n\to\infty} \int_0^n dt\, f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdot \ldots \cdot (x+n)}\ .$$

Aufgabe 3. Für positive relle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ ist durch $B(x,y) := \displaystyle\int_0^1 dt\, (1-t)^{x-1} t^{y-1}$ die Beta-Funktion erklärt. Zeige:

(a) $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x,y)$
Hinweis: Verwende $\displaystyle\int_0^\infty du \int_0^\infty dt\, t^{x-1}u^{y-1}e^{-(t+u)}$ und $(s,v) \mapsto (\frac{u}{u+t}, u+t)$.

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} dt\, \cos^u t\, \sin^v t = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{u+1}{2})\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{u+v}{2}+1)}$

(c) $\displaystyle\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}\Gamma(x+\frac{1}{2})}$

Aufgabe 4. Berechne das Trägheitsmoment bzgl. der x-Achse von

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\right\} \qquad (\text{für } a,b,c > 0)\ .$$

Der Körper habe dabei konstante Dichte $\mu > 0$.