Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 06/07**
Dr. R. Brüske

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 2.11.06, bis 17h00 in den Briefkästen Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $f : V \to V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V und $U \subset V$ Untervektorraum mit $f(U) \subset U$.
Zeige: f diagonalisierbar $\Rightarrow f|_U$ diagonalisierbar.

Aufgabe 2. Seien $f, g : V \to V$ diagonalisierbare Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, welche miteinander kommutieren, d.h. $f \circ g = g \circ f$. Zeige:

(a) Ist $\mathrm{Eig}(g;\lambda)$ Eigenraum von g zum Eigenwert λ, so gilt $f(\mathrm{Eig}(g;\lambda)) \subset \mathrm{Eig}(g;\lambda)$.

(b) $f|_{\mathrm{Eig}(g;\lambda)}$ ist diagonalisierbar.

(c) Es gibt eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ von V, wobei die b_i $(1 \leq i \leq n)$ sowohl Eigenvektoren von f als auch von g sind.

Aufgabe 3. Es sei $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Zeige:

(a) $A^{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}$

(b) $A^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} a^{n+2} - b^{n+2} & a^{n+1} - b^{n+1} \\ a^{n+1} - b^{n+1} & a^n - b^n \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}$

Tip: Diagonalisiere A.

Aufgabe 4. Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidischer Vektorraum, $x, y \in V$. Dann gilt:

(a) $\|x\| = \|y\| \iff \langle x - y, x + y \rangle = 0$.

(b) $\|x - y\| = \|x + y\| \iff \langle x, y \rangle = 0$.

(c) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \langle x, y \rangle = 0$.

(d) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.