Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske

WS 06/07

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 09.11.06 bis 17h00 in den Briefkästen — Blatt 3

Aufgabe 1. Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $x, y \in V$. Zeigen Sie: Gilt $\|x\| = \|y\| = 1$, dann folgt $\|x - \lambda y\| = \|\lambda x - y\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeigen Sie:

$$v_1, \ldots, v_n \text{ linear unabhängig} \iff \det\Big((\langle v_i, v_j \rangle)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \Big) \neq 0 \,.$$

Aufgabe 3. Es sei für $f, g \in \mathcal{C}^0([-1,1])$ (stetige reellwertige Funktionen über dem Intervall $[-1,1]$) definiert:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt \,.$$

a) Zeigen Sie: $\langle\ ,\ \rangle$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}^0([-1,1])$.

b) Durch das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren bestimme man eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $\mathrm{span}(1, x, x^2, x^3)$ von $\mathcal{C}^0([-1,1])$.

Aufgabe 4. Man untersuche, welche der durch die folgenden Matrizen erklärten symmetrischen Bilinearformen positiv definiert sind:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.