Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 06/07**
Dr. R. Brüske

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 16.11.06, bis 17h00 in den Briefkästen Blatt 4

Aufgabe 1. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Abbildung. Zeige:
Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ des $\mathbb{R}^3$, so daß $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ eine der beiden folgenden Formen hat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad 0 \le \alpha < 2\pi \, .$$

Aufgabe 2. In den Bezeichnungen von Aufgabe 2 heißt $\mathbb{R}v_3$ die Drehachse, $\mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2$ die Drehebene und α der Drehwinkel der Abbildung f.
Bestimmen Sie den Drehwinkel von

$$\frac{1}{125}\begin{pmatrix} 45 & -108 & 44 \\ 60 & -19 & -108 \\ 100 & 60 & 45 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3. Für $v \in \mathbb{R}^3$ (Spaltenvektor) sei $S_v := E_3 - \frac{2}{\langle v,v\rangle} v \cdot v^t \in M(3, \mathbb{R})$. Zeige:

a) $S_v^2 = E_3$, $\quad S_v^t = S_v$, also $S_v \in O(3)$. (Eine solche Matrix S_v heißt deshalb Spiegelungsmatrix.)

b) Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = \|w\|$ gilt $S_{v-w} \cdot v = w$ und $S_{w-v} \cdot w = v$.

Aufgabe 4. Es sei

$$T_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \; T_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \; T_3(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie: Die Matrizen aus $SO(3)$ sind genau die Matrizen $T_1(\alpha) \cdot T_2(\beta) \cdot T_3(\gamma)$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$

b) Zeigen Sie: Die Matrizen aus $SO(3)$ sind genau die Matrizen $T_3(\alpha) \cdot T_1(\beta) \cdot T_3(\gamma)$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$. (In diesem Fall heißen α, β, γ die Eulerschen Winkel.)