Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 06/07**
Dr. R. Brüske

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 30.11.06 bis 17h00 in den Briefkästen Blatt 6

Aufgabe 1. Es sei $(V, \|\ \|)$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit der Norm $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ und $M \subset V$ eine beschränkte Menge, d.h. es gibt ein $K > 0$ mit $\|v\| \leq K\ \forall\, v \in M$.

Zeigen Sie: Jede Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Vektoren $v_k \in M$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Hinweis: Es genügt, den Beweis zu führen für $V = \mathbb{R}^n$ und eine allgemeine Norm auf $\mathbb{R}^n$, die also von der Standardnorm verschieden sein kann.

Aufgabe 2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, auf dem zwei Normen $\|\ \|_1 : V \to \mathbb{R}$ und $\|\ \|_2 : V \to \mathbb{R}$ gegeben sind.
Zeigen Sie: Es gibt Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $\|x\|_1 \leq c_1\|x\|_2$ und $\|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1\ \forall\, x \in V$.
(Benutze Aufgabe 1)

Aufgabe 3. Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ und $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x_1, x_2) := \ln\big((x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2\big)$.
Zeigen Sie: $\partial_1^2 F + \partial_2^2 F = 0$.

Aufgabe 4. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $F(x, y) := \sqrt{|x||y|}$ erklärt. Wo ist F stetig, wo partiell differenzierbar?