Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske

WS 06/07

Probeklausur zur Mathematik für Physiker III

Aufgabe 1. Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{2007}$$

Aufgabe 2. Seien

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad & \text{gegeben durch } f(x,y) := (x^2 + y, x - y, x) \ , \\ g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad & \text{gegeben durch } g(u,v,w) := (u^{10} - v, u^5 + v^5) \ . \end{aligned}$$

Berechne $(D(g \circ f))(0,1)$.

Aufgabe 3. Sei $\delta > 0$ fest. Bestimme das globale Minimum von $x^2 + y^2 + (\delta - x - y)^2$ auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4. Man bestimme alle Extrema von

$$x^4 + y^4 + z^4 \quad \text{auf} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \ .$$

Aufgabe 5. Sei $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ und $I(\alpha, \beta) := \displaystyle\int_0^\infty dx\; e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}$.
Zeige:

a) $\displaystyle\Big(\frac{\partial}{\partial \beta} I\Big)(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$

b) $\displaystyle\int_0^\infty dx\, \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 6. Berechne das Trägheitsmoment des Kugeloktanten

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ , \ x > 0, \ y > 0, \ z > 0\}$$

bzgl. der z-Achse als Drehachse.