**Definition:**

Sei $I$ ein offenes Intervall und $x_0 \in I$. Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im Punkt $x_0$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

existiert.

$$f'(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := a \quad \text{Ableitung von f in } x_0$$

Äquivalent dazu ist: $f$ ist in $x_0$ differenzierbar, wenn eine Zahl $f'(x_0)$ existiert, so dass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist die **Tangente** an die Funktion $f$ im Punkte $(x_0, f(x_0))$

**Satz:**

Sei $I$ ein offenes Intervall. Dann ist $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann in $x_0 \in I$ differenzierbar wenn

$$f'(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_o^-)$$

**Beispiele** zur Berechnung der Ableitung:

1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Dann gilt für beliebige $x, x_0 \in \mathbb{R}$

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j$$

Damit erhält man:

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j = n x_0^{n-1}$$

Die Funktion $f(x) = x^n$ ist damit auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und

$$f'(x) = n x^{n-1}.$$

**Beispiele** zur Berechnung der Ableitung: (Fortsetzung)

5) Ableitungen von **elementaren** Funktionen

| **Funktion** | **Ableitung** | |
|---|---|---|
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $(\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $(x \in \mathbb{R})$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $(x > 0)$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $(x \in \mathbb{R})$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $(x \in \mathbb{R})$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$ |

**Ableitungsregeln:**

$u$ und $v$ seien in einem offenen Intervall $I$ differnzierbare Funktionen. Dann sind auch die unten angegebenen Funktionen differenzierbar und es gilt:

a) $(u+v)' = u' + v'$

b) $(cu)' = cu'$ wobei $c \in \mathbb{R}$

c) $(uv)' = u'v + v'u$ **Produktregel**

d) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ **Quotientenregel** $(v(x) \neq 0)$

**Kettenregel:**

Seien $y = y(x)$ bzw. $x = x(t)$ differenzierbar, dann ist

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y'(x(t)) \cdot x'(t) \qquad \textbf{Kettenregel}$$

**Beispiel:** Man differenziere $y = (x^2-1)^2$

Sei $z = x^2 - 1$, dann ist $y = z^2$, d.h. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$

$$y' = 2z \cdot 2x = 2(x^2-1)2x = 4x(x^2-1)$$

**Differentiation der Umkehrfunktion.**

Ist $y = f(x)$ eine differenzierbare umkehrbare Funktion, dann ist die Umkehrfunktion $x = g(y)$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \text{ für } f'(x) \neq 0$$

**Beispiel:**

1)Man differenziere $y = \sqrt{x}$ für $x > 0$

$x = y^2$, $\frac{dx}{dy} = 2y = 2\sqrt{x}$, also ist $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2)Man differenziere $y = \arccos x$ für $0 < x < 1$

$x = \cos(y)$ mit $0 < y < \pi$, $\frac{dx}{dy} = -\sin(y) = -\sqrt{1 - \cos^2(y)} = -\sqrt{1 - x^2}$,

also ist $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**Regel von l'Hospital**

Sind $f$ und $g$ in einem Intervall um $a$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0$ und ist $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ von der Form $\frac{0}{0}$ bzw $\frac{\infty}{\infty}$, dann ist

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \, ,$$

falls der letzte Grenzwert existiert!

**Beispiel:**

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ Fall: $\frac{0}{0}$ Lsg: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{1} = 1$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x}{x}$ Fall. $\frac{0}{0}$ Lsg: $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = 1$

# Aufgaben

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass die Funktion $f$ auf $\mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x|x|$ im Nullpunkt differenzierbar ist.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass die Funktion $f$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

im Nullpunkt differenzierbar ist.

Aufgabe 3:
Man bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $y = x \ln x$ b) $y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{x - 1}$ c) $y = (3\cos^2 x + \ln(1 + x^2))^{\frac{1}{5}}$

d) $y = \operatorname{arsinh}(x)$ e) $y = \operatorname{arcosh}(x)$

Aufgabe 4:
Man bestimme, falls existent, folgende Grenzwerte:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin 2x}{\sinh^2 x}$

b) $\lim_{x \to 0+} x \ln x$

c) $\lim_{x \to \infty} (\exp(3x) - 5x)^{x^{-1}}$

1) **Satz von Rolle**

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $(a, b)$, so gilt:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a, b) \; : \; f'(x_0) = 0$$

2) **Erster Mittelwertsatz**

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $(a, b)$, so gilt:

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \quad : \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

3) **Zweiter Mittelwertsatz**

Sind die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $(a, b)$ und gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so gilt:

$$\exists\, x_0 \in (a, b) \quad : \quad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

**Definitionen a)** Eine **Zerlegung** des Intervalls $[a, b]$ ist $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b$ .

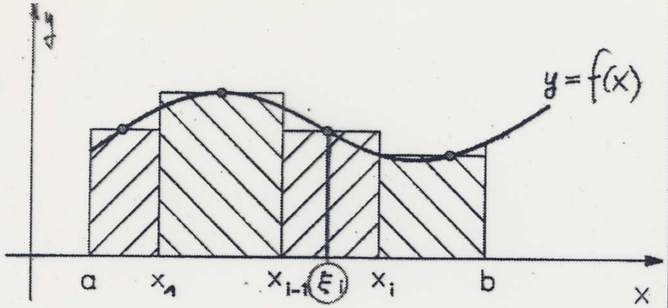
**b)** Eine **Riemann-Summe** der Funktion $f : [a, b] \to R$ für diese Zerlegung ist von der Gestalt

$$Z_n := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

mit $x_i \le \xi_i \le x_{i-1}$ ,

$i = 1, 2, \ldots n$

Bernhard Riemann
1826 - 1866
Göttingen




**c)** $f$ ist **Riemann-integrierbar**, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} Z_n$ für die Riemann-Summen für alle Zerlegungen existiert, für welche $\max_i(x_i - x_{i-1})$ nach 0 strebt und wenn dieser Grenzwert unabhängig ist von der gewählten Zerlegung.

**d)** $\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{n \to \infty} Z_n$ **ist das bestimmte Integral von** $f$

**Satz:** Seien $f(x)$ und $g(x)$ integrierbar auf $[a,b]$. Dann gelten:

1) $f$ integrierbar auf $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\forall c \in [a,b]$ : $f$ integrierbar auf $[a,c]$ und $[c,b]$.

   Zusätzlich gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

2) **Linearität**: Auch $\alpha f(x) + \beta g(x)$ ist integrierbar:

$$\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

3) **Positivität**:

$$\forall x \in [a,b] \; : \; f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

**Satz:** (Fortsetzung)

4) **Abschätzungen**:

$$(b-a)\cdot \inf(f[a,b]) \;\le\; \int_a^b f(x)dx \;\le\; (b-a)\cdot \sup(f[a,b])$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \;\le\; (b-a)\cdot \sup\{|f(x)| : a \le x \le b\}$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \;\le\; \int_a^b |f(x)|dx$$

Bei der letzten Abschätzung muß $|f(x)|$ integrierbar sein.

## 8.2 Kriterien für Integrierbarkeit

**Satz:** (Riemannsches Kriterium)

Für eine **beschränkte** Funktion $f(x), a \le x \le b$, sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) $f(x)$ ist integrierbar über $[a,b]$.
2) $\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, Z \in \mathbf{Z}[a,b] \quad : \quad O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon.$

**Satz:**

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt:

1) Ist $f(x)$ **monoton**, so ist $f(x)$ integrierbar.

2) Ist $f(x)$ **stetig**, so ist $f(x)$ integrierbar.

## 8.3 Hauptsatz und Anwendungen

**Definition:**

Gegeben seien Funktionen $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ist $F(x)$ differenzierbar auf $[a, b]$, und gilt: $F'(x) = f(x)$, $a \leq x \leq b$, so heißt

$F(x)$ eine **Stammfunktion** von $f(x)$.

**Bemerkung:**

1) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so sind auch alle Funktionen der Form
$$\tilde{F}(x) = F(x) + c$$
mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f(x)$.

2) Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, so ist die Funktion $F_1(x) - F_2(x)$ konstant.

**Satz: (Hauptsatz der Integral– und Differentialrechnung)**

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

1) Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

2) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

**Beispiele:** Wir bezeichnen mit $C$ stets die **Integrationskonstante**:

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

# Integrationsregeln

## Partielle Integration

Für differenzierbare Funktionen $u(x)$, $v(x)$ gilt:

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$$

**Beispiel:**

1)

$$\int \underbrace{9x^2}_{u'}\underbrace{\ln|x|}_{v}\,dx = \underbrace{3x^3}_{u}\underbrace{\ln|x|}_{v} - \int \underbrace{3x^3}_{u}\underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}\,dx = 3x^3\ln|x| - x^3 + C$$

2)

$$\int \underbrace{\frac{1}{\cos^2(x)}}_{u'}\underbrace{x}_{v}\,dx = \underbrace{\tan(x)}_{u}\underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{\tan(x)}_{u}\underbrace{1}_{v'}\,dx = x\tan(x) + \ln|\cos x| + C$$

# Integrationsregeln

## Substitutionsregel

Sei $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ stetig differenzierbar und $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Formal werden also

$$x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)dt \text{ und die Grenzen substituiert}$$

**Beispiel:**

1) $\int (2-3x)^4 dx$ Subst.: $2 - 3x = \varphi(x) = t$, $-3dx = dt$

$\int (2-3x)^4 dx = \int t^4(-\frac{1}{3})dt = -\frac{1}{15}t^5 + C = -\frac{1}{15}(2-3x)^5 + C$

2) $\int 3x^2 e^{x^3} dx$ Subst.: $x^3 = t$, $3x^2dx = dt$

$\int 3x^2 e^{x^3} dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^3} + C$

# Aufgaben

Aufgabe 1:
Man beweise für $-1 < x$ und $\alpha \geq 1$:

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$$

Aufgabe 2:
Man zeige, dass für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ die Gleichung $e^{-x} = x + c$ genau eine Lösung hat.

Aufgabe 3:

a) $\int e^x \sin(x) dx$ , b) $\int x e^x dx$

c) $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$ , d) $\int \frac{dx}{a^x + a^{-x}}$ (Tipp: $\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) + C$)

Aufgabe 4:
Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

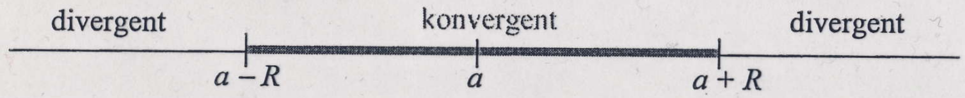
**Potenzreihe** (PR) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k}_{\boxed{\text{Koeffzient}}}(x - \underbrace{a}_{\boxed{\text{Zentrum, Entwicklungspunkt, alles Konstanten aus } \mathbf{R} \text{ oder } \mathbf{C}}})^k$, Funktion der Variablen $x \in \mathbf{R}$ oder $x \in \mathbf{C}$

**Konvergenzradius** $R$

$$|x-a| < R \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \text{ absolut konvergent}$$

$$|x-a| > R \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \text{ divergent.}$$

$x = a \pm R \Rightarrow$ keine Aussage !




**Beispiele**

| Bsp. | Funktion | PR mit $a = 0$ | Konvergenzbereich | R |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \ldots$ | $-1 < x < 1$ | 1 |
| 2 | $\ln(1+x)$ | $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} \pm \ldots$ | $-1 < x \leq 1$ | 1 |
| 3 | $(1+x)\ln(1+x)$ | $x + \dfrac{x^2}{2 \cdot 1} - \dfrac{x^3}{3 \cdot 2} + \dfrac{x^4}{4 \cdot 3}$ | $-1 \leq x \leq 1$ | 1 |
| 4 | $e^x$ | $1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$ | $-\infty < x < \infty$ | $\infty$ |

**Rechenregeln**

Für eine PR mit dem Konvergenzradius $R > 0$ gilt in $|x-a| < R$:

(1) Addition, Subtraktion und Multiplikation wie bei Polynomen (Multiplikation mit Cauchy-Produkt)

(2) Die Ableitung einer PR kann gliedweise berechnet werden:

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k (x-a)^{k-1}$$

(3) Das Integral einer PR kann gliedweise berechnet werden.

(4) Identitätssatz für Koeffizientenvergleich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k \text{ in } |x-a| < R \Leftrightarrow a_k = b_k \text{ für alle } k$$

**Beispiel:**

1) Für alle $|x| < 1$ gilt $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Durch Differenzierung erhält man für alle $|x| < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

2) Für alle $|x| < 1$ gilt: $\ln'(1-x) = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Durch Integrieren erhält man für alle $|x| < 1$:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C$$

Einsetzen von $x = 0$ liefert $C = 0$.

## Berechnung des Konvergenzradius

Ist die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ konvergent für alle Zahlen $x$ aus dem offenen Intervall $(a-R, a+R)$ und höchtens noch in den Randpunkten $x = a+R$ und $x = a-R$. Dann gilt für den Konvergenzradius $R$, falls die Grenzwerte existieren:

$$R = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad \text{oder auch } R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| .$$

Bemerkung:
Existiert $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ nicht, ist stattdessen der größte Häufungspunkt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ zu nehmen.

# Aufgaben

Aufgabe1:
Bestimme den Konvergenzradius $R$ und den Konvergenzbereich $K$:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ b)$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} x^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 5^n (x-2)^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

Aufgabe 2:
Welche Funktion wird für welche $x$ dargestellt durch:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} x^n$

Aufgabe 3:
Bestimme die Taylorreihe von $\arctan x$ um $a = 0$ und ihren Konvergenzradius.

Aufgabe 4:
Man stelle die folgenden Funktionen als Reihe mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ dar:

a) $\sin 5x$

b) $e^{2x^2}$

**Die Taylor Formel**

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{Taylor-Polynom } T_n(x,\,a)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Restglied } R_n \text{ mit } \xi \text{ zwischen } a \text{ und } x}$$

**Die Taylor Reihe** von $f$ im Entwicklungspunkt $a$ ist $T(x, a) = \lim\limits_{n \to \infty} T_n(x, a)$ .

Sie konvergiert in allen Punkten $x$ gegen $f(x)$ , in denen $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$ .

# Aufgaben

Aufgabe 1:
Man berechne das Taylorpolynom von $f(x) = e^{2x}$ für $x_0 = 1$.

Aufgabe 2:
Man gebe die Taylorformel mit Restglied an für die Funktion $f(x) = xe^x$ und $x_0 = 0$.

Aufgabe 3:
Man bestimme die Taylorformel an der Stelle $x_0 = 1$ von

$$f(x) = \frac{2x^2 - 11}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

Tipp: Mache eine Partialbruchzerlegung und benutze die Formel der geometrischen Reihe.

Aufgabe 4:
Man berechne die Taylorreihe von $f(x) = \cos x$ für $x_0 = \frac{\pi}{6}$. Tipp: Man kann das Additionstheorem $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ benutzen.

Aufgabe 1:

a) Es gilt: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k$

$$= \frac{1}{n}\ln n!$$

$$= \ln \sqrt[n]{n!}$$

Nun gilt $\sqrt[n]{n!} \to \infty$ für $n \to \infty$.

Folglich ist $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k = \infty$.

b) Es gilt:

$$\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right) = \frac{1}{x}\,\frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \to 0$$

für $x \to \infty$

Aufgabe 2:

a) $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$

$$f'(x) = (\ln x + 1)\,e^{x\ln x} = (\ln(x)+1)\,x^x$$

b) $f(x) = \dfrac{\arctan x}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\arctan x}{x}$$

c) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Aufgabe 3 :

$$I_n = \int (\ln t)^n \, dt$$

$$= \int 1 \cdot (\ln t)^n \, dt$$

$$= t(\ln t)^n - \int t \cdot n \cdot (\ln t)^{n-1} \cdot \frac{1}{t} \, dt$$

$$= t(\ln t)^n - n \int (\ln t)^{n-1} \, dt$$

$$= t(\ln t)^n - n\, I_{n-1}$$

Aufgabe 4 :

Lemma :

Für alle $x \geq \sqrt{3}$ : $x \, \frac{x^2+9}{3x^2+3} \geq \sqrt{3}$

Bew : Sei $x \geq \sqrt{3}$.

Dann gilt :

$$x \cdot \frac{x^2+9}{3x^2+3} \geq \sqrt{3} \iff x^3 - 3\sqrt{3}\,x^2 + 9x - 3\sqrt{3} \geq 0$$

$$\iff g(x) \geq 0 \, ,$$

wobei $g(x) := x^3 - 3\sqrt{3}\,x^2 + 9x - 3\sqrt{3}$.

Nun ist $g(\sqrt{3}) = 0$ und

$$g'(x) = 3\,(x - \sqrt{3})^2 \geq 0 .$$

Folglich ist $g(x)$ monoton wachsend und es gilt $g(\sqrt{3}) = 0$.

Also ist für alle $x \geq \sqrt{3}$ $g(x) \geq 0$ und folglich gilt für alle $x \geq \sqrt{3}$ :

$$x \cdot \frac{x^2+9}{3x^2+3} \geq \sqrt{3}$$

Jetzt kann man mit vollständiger Induktion zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $x_n \geq \sqrt{3}$ ist.

IA : Für $n=0$ : $a_0 = 2 \geq \sqrt{3}$ ✓

IV : Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n \geq \sqrt{3}$

IS : $n \to n+1$ Lemma, da $a_n \geq \sqrt{3}$

$$a_{n+1} = a_n \frac{a_n^2+9}{3a_n^2+3} \overset{\downarrow}{\geq} \sqrt{3}$$

Jetzt zeigen wir, dass $(a_n)$ monoton fallend ist.

Für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} \leq a_n \overset{a_n \geq \sqrt{3}}{\Longleftrightarrow} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a_n^2+9}{3a_n^2+3} \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow a_n^2+9 \leq 3a_n^2+3$$

$$\Longleftrightarrow 3 \leq a_n^2 \quad ✓$$

Da $(a_n)$ monoton fallend und nach unten durch $\sqrt{3}$ beschränkt ist, ist $(a_n)$ konvergent.

Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt

$$a = a\,\frac{a^2+9}{3a^2+3} \Longleftrightarrow 1 = \frac{a^2+9}{3a^2+3}$$

$$\Longleftrightarrow a^2 = 3$$

$$\overset{a \geq \sqrt{3}}{\Longleftrightarrow} a = \sqrt{3}$$

Also ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$.

Aufgabe 5 :

Annahme : $f(\xi) \neq 0$

$\exists$ Folge $(x_n)$ in $\{x \in [0,1] \mid f(x) \leq 0\}$ mit

$$x_n \to \xi \text{ für } n \to \infty$$

$$\Rightarrow \quad f(\xi) \overset{\text{Stetigkeit}}{=} \lim_{n \to \infty} f(x_n) < 0 \quad (\text{da } f(\xi) \neq 0)$$

$$\overset{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \quad \exists\, x_0 \in (\xi, 1) \; : \; f(x_0) = 0$$

$\Rightarrow$ $\xi$ ist keine obere Schranke von der Menge $\{x \in [0,1] \mid f(x) \leq 0\}$ W

Aufgabe 6 :

Beh : Für $0 \leq x < y$ und $a > 1$ :

$$(*) \quad a\, x^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y - x} < a\, y^{a-1}$$

Bew :

$$\text{MWS} \Rightarrow \exists\, \xi \in (x, y) :$$

$$a\, \xi^{a-1} = \frac{y^a - x^a}{y - x}$$

Also gilt :

$$* \Leftrightarrow \quad a\, x^{a-1} < a\, \xi^{a-1} < a\, y^{a-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{a-1} < \xi^{a-1} < y^{a-1}$$

$$\overset{a>1}{\Leftrightarrow} \quad x < \xi < y \quad \checkmark$$