Vollständige Induktion

Gelten

$$A(N) \text{ für ein} N \in \mathbb{N} \qquad \textbf{(Induktionsannahme)}$$

und für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ $n \geq N$

$$A(n) \to A(n+1) \qquad \textbf{(Induktionsschluss)}$$

so ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \geq N$ wahr.

Wichtig: Induktionsschluss muss für ein beliebiges, festes $n \geq N$ bewiesen werden. Man nennt daher

$A(n)$ die **Induktionsannahme**
$A(n+1)$ die **Induktionsbehauptung**

Beispiel

Beh: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Bew: (durch vollständige Induktion)
Induktionannahme: Für n=1: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

Induktionsannahme: Für ein beliebes $n \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung.

Zu beweisen ist: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k \ + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

2.2 Reelle Zahlen

Erweiterung des Zahlenbereichs der natürlichen Zahlen

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Wie definieren wir den Zahlenbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen?

Verwende ein

Axiomensystem zur Definition reeller Zahlen

(I) Regeln der Addition (Abelsche Gruppe)

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & x+(y+z) & = (x+y)+z & \\ \text{(b)} & x+y & = y+x & \\ \text{(c)} & x+0 & = 0+x & = x \\ \text{(d)} & x+(-x) & = (-x)+x & = 0 \end{array}$$

(II) Regeln der Multiplikation

$$\begin{array}{lllll} \text{(a)} & x\cdot(y\cdot z) & = (x\cdot y)\cdot z & & \\ \text{(b)} & x\cdot y & = y\cdot x & & \\ \text{(c)} & x\cdot 1 & = 1\cdot x & = x & \\ \text{(d)} & x\cdot\left(\frac{1}{x}\right) & = \left(\frac{1}{x}\right)\cdot x & = 1 & (x\neq 0) \end{array}$$

(III) Distributivgesetz (Regeln (I)–(III): Körper)

$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$$

(IV) Ordnungseigenschaften

(a) $x \leq y \vee y \leq x$

(b) $x \leq x$

(c) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

(d) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(e) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

(f) $x \leq y \wedge z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

(V) Vollständigkeit Zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine Intervallschachtelung ist eine Folge $I_0, I_1, I_2, \ldots$, kompakter Intervalle, kurz $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n mit der Länge $|I_n| < \varepsilon$.

Definition: Zu $a \in \mathbb{R}$ heißt

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

der **Betrag** von a.

$|a - b|$ = (nichtnegative) Abstand der Zahlen a, b auf der Zahlengerade.

Eigenschaften:

(1) $|a| \geq 0$

(2) $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$

(3) $|ab| = |a|\,|b|$

(4) $|a + b| \leq |a| + |b|$ **(Dreiecksungleichung)**

(5) $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0)$

$= (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (ε**–Umgebung von** a)

Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}$, also M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

1) Die Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt **obere Schranke** von M, falls gilt:

$$\forall w \in M : w \leq x$$

Analog definiert man den Begriff **untere Schranke von** M.

2) Die Menge M heißt **nach oben** (bzw. **nach unten**) **beschränkt**, falls es eine obere (bzw. untere) Schranke von M gibt.

3) Die Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt **Supremum von** M, falls s die kleinste obere Schranke von M ist, d.h.

   - s ist eine obere Schranke von M
   - für jede beliebige obere Schranke x von M gilt: $s \leq x$

   Bezeichnung: $s := \sup M$.

   Analog definiert man den Begriff **Infimum von** M.

Beispiel: Sei $I := [1,2) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x < 2\}$

Dann ist

- jede Zahl $x \geq 2$ eine obere Schranke von I,
- jede Zahl $x \leq 1$ eine untere Schranke von I.

Also gilt

$$\sup\,[1,2) = 2 \qquad \inf\,[1,2) = 1$$

Beispiel: Man betrachte die Menge

$$M := \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{9}{20}, \frac{11}{30}, \dots\right\}$$

Daher gilt

$$\sup M = \frac{3}{2} \qquad \inf M = 0$$

Aufgaben

Aufgabe 1:
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Aufgabe 2:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n = \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$ eine natürliche Zahl.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie - falls vorhanden- $\sup X$, $\inf X$, $\max X$ und $\min X$ für die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

- $X = \{x | x = \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}\}$
- $X = \{x | x^{16} \leq 16\}$

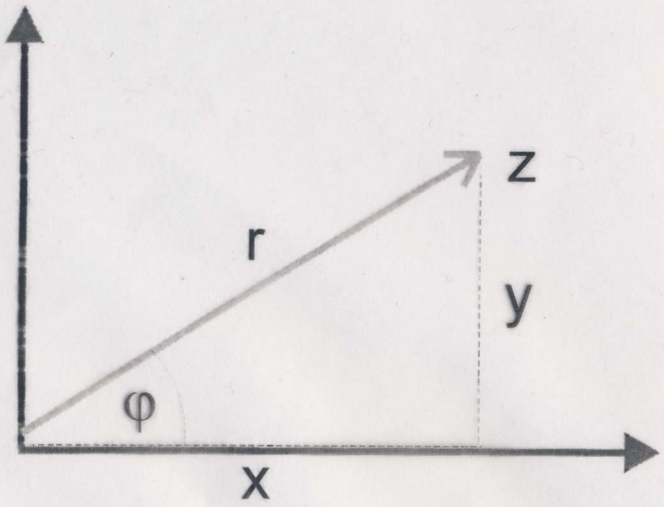
Aufgabe 4:
Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen x,y gilt:

- $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x + y| + |x - y| \geq |x| + |y|$
- Für welche $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$, gilt $\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|}$

Komplexe Zahlenebene

- Den Punkten einer zweidimensionalen Ebene werden die komplexen Zahlen zugeordnet

$$(x, y) \mapsto z = x + iy$$



- Einheiten

$$(1,0) \mapsto 1, \quad (0,1) \mapsto i$$

- Realteil

$$x = \operatorname{Re} z = r \cos \varphi$$

- Imaginärteil

$$y = \operatorname{Im} z = r \sin \varphi$$

- Betrag

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Argument

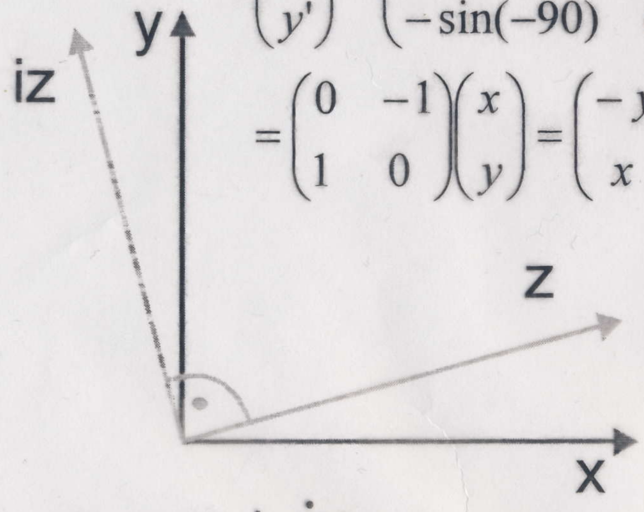
$$\arg(z) = \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

Komplexe Multiplikation

- Multiplikation mit i entspricht 90°-Drehung:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-90) & \sin(-90) \\ -\sin(-90) & \cos(-90) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$



$$z = x + iy$$

$$z' = iz = -y + ix$$

- Multiplikationsregeln

$$i^2 = i(0,1) = (-1,0) = -1$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$
$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

- Konjugiert komplexe Zahl

$$\bar{z} = x - iy$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Konvergenz von Folgen:
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$:

1. Für $n_j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < ...$ heißt $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Die Folge (a_n) heißt **beschränkt**, falls es ein $C > 0$ gibt mit:
   $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq C$.
3. Eine Folge (a_n) heißt **konvergent** mit **Grenzwert (Limes)** $a \in \mathbb{C}$, falls
   $$\forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$
   Eine nicht konvergente Folge heißt **divergent**.
4. Eine Folge (a_n) heißt **Cauchy-Folge**, falls
   $$\forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Konvergenzkriterien:

1. Da $\mathbb{C}$ vollständig ist gilt für Folgen in $\mathbb{C}$:
   (a_n) ist konvergent $\Longleftrightarrow$ (a_n) ist Cauchy-Folge
2. Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte (und analog jede monoton fallende, nach unten beschränkte) Folge ist konvergent.
3. Zu jeder Folge $(c)_n$ gebe es konvergente Folgen $(a)_n$ und (b_n) und ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq N$. Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$, dann konvergiert auch c_n mit $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.
4. $\sum a_n$ konvergent $\Longrightarrow a_n \to 0$.

Beispiel:
Es sei (a_n) eine Folge mit der Eigenschaft, dass ein q mit $0 \leq q < 1$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|$. Dann ist die Folge (a_n) konvergent.
Beweis:
Mithilfe vollständiger Induktion zeigt man:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q^n |a_1 - a_0|$$

Jetzt zeigt man, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
Wähle jetzt ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $q^n |a_1 - a_0| < \varepsilon(1-q)$ für alle $n > N$ gilt.
Für alle $n > N$ und $p \in \mathbb{N}$ ergibt sich dann

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \sum_{k=n}^{n+p-1} (a_{k+1} - a_k) \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |(a_{k+1} - a_k)| \leq$$

$$\leq |a_1 - a_0| \sum_{k=n}^{n+p-1} q^k = |a_1 - a_0| q^n \frac{(1-q^p)}{1-q} < \varepsilon$$

Folglich ist (a_n) eine Cauchy-Folge und somit konvergent.

Rechenregeln für konvergente Folgen:
Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Zahlenfolgen. Dann gilt:

1. $a_n \to a$, $b_n \to b$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \Longrightarrow \lambda a_n + \mu b_n \to \lambda a + \mu b$ Die Summe zweier divergenter Folgen aber kann konvergent sein.
2. $a_n \to a$, $b_n \to b \Longrightarrow |a_n| \to |a|$, $a_n b_n \to ab$, $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$
3. $a_n \to 0 \Longleftrightarrow |a_n| \to 0$
4. Das Produkt einer Nullfolge und einer beschränkten Folge ist wieder eine Nullfolge.

Beispiel: Gegeben sei die Folge

$$a_n = \sqrt{n^2 + 5n + 1} - n$$

Eine Umformung ergibt:

$$a_n = \frac{(n^2 + 5n + 1) - n^2}{\sqrt{n^2 + 5n + 1} + n} = \frac{5 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}$$

und damit

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{5 + 0}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{5}{2}$$

Aufgaben

Aufgabe 1:
Es sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Geben Sie die Normaldarstellung folgender komplexer Zahlen an:
a) $\frac{1}{z}$, b) $z + \frac{1}{z}$, c) $\bar{z}^2 + \frac{1}{z^2}$

Aufgabe 2:
Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

Aufgabe 3:
Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergieren, und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \frac{7n^7(1+\frac{1}{n!})(n^3-n^2)}{(n^3+2)(n^5+\sqrt{n+1})n^2}$

b) $b_n = \frac{2^n+(-3)^n}{(-2)^n+3^n}$

c) $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Aufgabe 4:
Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Existiert ein q mit $0 \leq q < 1$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq q|x-y|$. Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n := f(a_{n-1})$ für $n \geq 1$. Beweisen Sie, dass (a_n) konvergent ist und dass für den Grenzwert a gilt $a = f(a)$.

3.4 Konvergenzkriterien für Reihen

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine vorgegebene Folge mit $a_n \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
Dann ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

eine

Reihe (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Die Elemente s_n der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nennt man auch **Partialsummen**.

Ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, so bezeichnet

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := s$$

den **Grenzwert der Reihe**.

Satz: (Konvergenzkriterien für Reihen)

1) **Cauchysches Konvergenzkriterium**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : m, n \geq N : \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

2) **Notwendige Bedingung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} a_k = 0$$

3) **Linearität**

Sind $\sum a_k$, $\sum b_k$ konvergente Reihen, so konvergieren auch die Reihen $\sum (a_k + b_k)$, $\sum (\lambda a_k)$, und es gelten

3) **Linearität** (Fortsetzung)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

4) **Leibnizsches Kriterium**

Alternierende Reihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$, für die $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, sind konvergent, und es gilt die **Einschließung**:

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$$

Beispiel: Die **geometrische Reihe** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots, \quad q \in \mathbb{C}$
konvergiert für $|q| < 1$, denn für die Partialsummen gilt wegen

$$x^m - y^m = (x - y) \sum_{j=1}^{m} x^{m-j} y^{j-1}$$

mit $x = 1$, $y = q$ und $m = n + 1$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Daraus folgt

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}}$$

Für $|q| > 1$ ist die geometrische Reihe divergent.

Beispiel: Die **harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

ist divergent.

Es gilt

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{m} = \frac{m-n+1}{m} \to 1 \quad (m \to \infty)$$

Damit ist das Cauchy–Kriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ : \ m, n \geq N \ : \ \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

für $\varepsilon < 1$ verletzt.

Beispiel: Die **alternierende harmonische Reihe**

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ist konvergent.

Dies zeigt man mit Hilfe des Leibnizschen Kriteriums.

Zur Erinnerung: **alternierende Reihen**, deren Folgenglieder eine Nullfolge mit monoton fallenden Beträgen bilden, sind konvergent.

Der Grenzwert lautet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln 2 = 0.69314 \dots$$

Definition: Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ist konvergent, aber **nicht** absolut konvergent. Es gilt

$$a_k = (-1)^k \frac{1}{k+1}$$

und daher ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|(-1)^k \frac{1}{k+1}\right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

gerade die harmonische Reihe, die **nicht** konvergiert.

Satz: **(Kriterien für absolute Konvergenz)**

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Leftrightarrow$ $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|\right)_{n\geq 0}$ beschränkt.

2) **Majorantenkriterium**

$$|a_k| \leq b_k \ \wedge \ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

3) **Quotientenkriterium** Sei $a_k \neq 0$ $(\forall\, k \geq k_0)$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1 \quad (\forall\, k \geq k_0) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

4) **Wurzelkriterium**

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad (\forall\, k \geq k_0) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

Aufgaben

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

- a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}$
- c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^a}{k!}$ $(a \in \mathbb{R})$ d) $\sum_{k=1}^{\infty} k^a q^k$ $(a \in \mathbb{R}, 0 < |q| < 1)$
- e) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ f) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{k}$

Aufgabe 2:

Es sei (b_n) eine Folge mit der Eigenschaft, dass für jede konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert. Beweisen Sie, dass (b_n) beschränkt ist.

Aufgabe 3:

Existiert ein $\alpha > 1$, so dass $(n^{\alpha} a_n)$ beschränkt ist, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Stetigkeit

Definition:

Es sei $x_0 \in [a,b]$ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle x_0 stetig, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist.

Kurz:

f ist an der Stelle x_0 stetig:$\Longleftrightarrow$ Die Funktionswerte $f(x)$ sind beliebig wenig von $f(x_0)$ entfernt, wenn x hinreichend wenig von x_0 entfernt ist.

Folglich gilt:

$f : D \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle x_0 stetig $\Longleftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Rechnen mit stetigen Funktionen:

Summe, Differenz, Produkt und Quotient stetiger Funktionen sind stetig (im Falle des Quotienten darf kein Nenner 0 sein. Setzt man eine stetige Funktion ein in eine stetige Funktion, erhält man wieder eine stetige Funktion.

Zwischenwertsatz:
Sei f stetig auf dem echten Intervall $[a, b]$ und $\eta \in \mathbb{R}$ liege zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $\zeta \in [a, b]$ mit $f(\zeta) = \eta)$.

Eine andere Formulierung des ZWS ist die folgende:
Ist I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(I)$ ein Intervall.
Kurz: Steige Bilder von Intervallen sind Intervalle.

Satz vom Maximum:
Es sei $D \subset \mathbb{R}$ kompakt (also abgeschlossen und beschränkt) und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren x_{min} und $x_{max} \in D$ derart, dass $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$ für alle $x \in D$.
Kurz: Stetige Funktionen nehmen ihr Maximum und Minimum auf kompakten Mengen an.

Stetigkeit der Umkehrfunktion
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton (also umkehrbar). Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ stetig.
Man beachte, dass die Stetigkeit von f nicht gefordert werden muss.

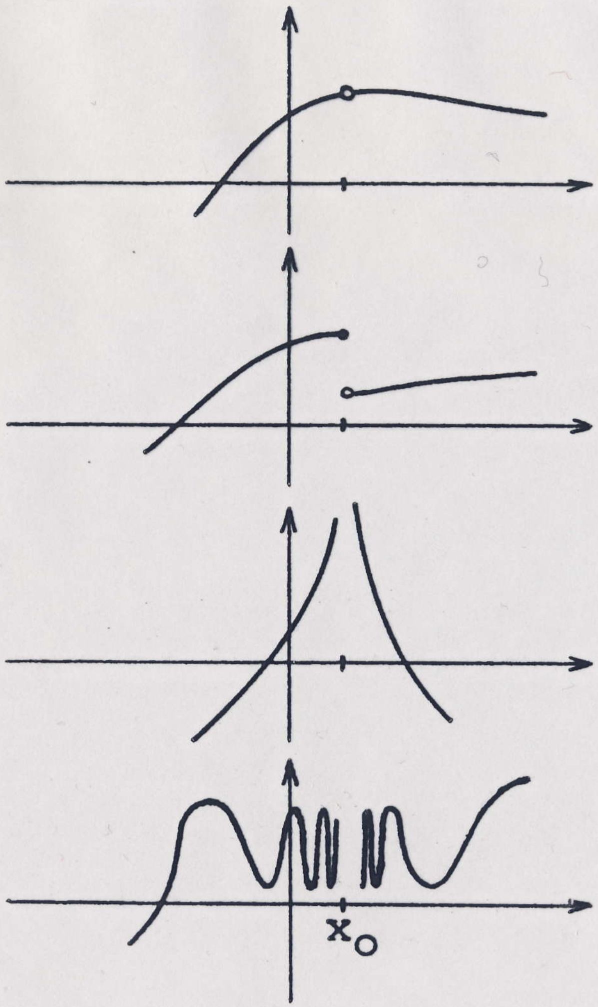
Eine Funktion ist an der Stelle x_o <u>unstetig</u>,

1.) wenn für x_o kein Funktionswert definiert ist.

2.) wenn die Funktion bei x_o einen endlichen <u>Sprung</u> macht (hierunter fällt auch die hebbare Unstetigkeit).

3.) wenn die Funktion ins Unendliche verläuft (d.h. sie ist in keinem Intervall, das den Punkt x_o enthält, beschränkt).

4.) wenn die Funktion bei Annäherung an x_o <u>oszilliert</u> und die Amplitude nicht gegen 0 geht.



(53) Man zeige: $y = f(x) = \frac{|x|}{x}$ ist an der Stelle $x_o = 0$ unstetig.

1. Lsg: f(0) ist nicht definiert.

2. Lsg: $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ existiert nicht (vgl. Bsp. (49))

Beispiel 1: Betrachte die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \ \wedge \ x = 1 \\ 1 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \longrightarrow 0$ existiert der Grenzwert der Funktion nicht! Weiter gilt

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \neq f(1)$$

Notation: Sprungfunktion

Beispiel 2: Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ existiert weder der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ noch $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

Beispiel 3: Für die Funktion $f(x) = 1/x$ existieren die beiden einseitigen **uneigentlichen** Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Aufgabe 1:

Die Funktion f sei auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-10x^2+9}{x^2-4x+3} & : \quad x \neq 1 \text{ und } x \neq 3 \\ A & : \quad x = 1 \\ B & : \quad x = 3 \end{cases}$$

Können A und B so gewählt werden, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist?

Aufgabe2:

Die Funktion f sei auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2} & : \quad x \notin \mathbb{N} \\ \frac{4x-6}{x+1} & : \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen.

Aufgabe 3:

Es seien f und g stetige Funktionen auf einem Intervall I, und es gelte $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I \cap \mathbb{Q}$. Zeigen Sie $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$.

Aufgabe 4:

Die Funktion f sei beschränkt auf dem Intervall $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass die Funktion g, welche für $x \in [0, 1]$ definiert ist durch $g(x) = xf(x)$, im Nullpunkt stetig ist.

Aufgabe 5:

Die Funktion f sei auf $\mathbb{R}$ stetig und nehme nur rationale Werte an. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 6:

sei $D \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : D \to D$ eine Funktion derart, dass $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ für alle $x \neq y \in D$. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt in D, d.h. es gibt genau ein a mit $a = f(a)$. (Tipp: Betrachte die Funktion $g(x) = |f(x) - x|$ und benutze den Satz vom Maximum und Minimum.)