

Teil B der Klausur mit Lösungsstrategie

Aufgabe 2. Bestimme:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$

dreimal l'Hospital oder (besser) $\frac{\tan x - \sin x}{x(1 - \cos x)} = \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)}$ verwenden und

einmal l'Hospital bzw. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) - \ln x]$

$x[\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) - \ln x] = \frac{\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{\frac{1}{x}}$. Jetzt $x^{-1} = y$ setzen und $y \rightarrow 0$ mit l'Hospital

Aufgabe 3. Berechne:

a) $\int_1^e dx \frac{1}{x} (\ln x)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+$

Substitution $\ln x = t$

b) $\int_0^1 dx \frac{e^x + 1}{e^x + e^{-x}}$

Substitution $e^x = t$. Die Stammfunktion von $f(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ ist $\frac{1}{2} \ln(1 + t^2)$, die

Stammfunktion von $f(t) = \frac{1}{1 + t^2}$ ist $\arctan t$.

c) $\int_0^1 dx \frac{1}{(1 + x)(1 + x^2)}$

Partialbruchzerlegung $\frac{1}{(1 + x)(1 + x^2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1 - x}{1 + x^2} \right)$. Stammfunktionen des zweiten Terms wie in b)