Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 07/08**
Dr. R. Brüske

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 20.12.07, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und es gelte $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Es sei $f(1) =: a$.
Zeigen Sie: $f(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Für $\varphi \in \mathbb{R}$, $\varphi \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=0}^{n} \cos(j\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\varphi)}{2\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin((n+1)\frac{\varphi}{2})}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cos(n\tfrac{\varphi}{2})$$
$$\sum_{j=0}^{n} \sin(j\varphi) = \frac{\sin((n+1)\frac{\varphi}{2})}{\sin\frac{\varphi}{2}} \sin(n\tfrac{\varphi}{2}) \; .$$

Aufgabe 3. a) Berechnen Sie $\cos\frac{\pi}{n}$ und $\sin\frac{\pi}{n}$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\zeta_n := \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$. Zeige:

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_n^k = 0$ ii) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_n^k = (-1)^{n-1}$

Aufgabe 4. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) := \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$. Sei $\delta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \delta < 2\pi$.

a) Für $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ gilt $|s_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$ im Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ (vgl. Aufgabe 2).

b) Für $m > n > 0$ folgt $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{m} \frac{\sin kx}{k}\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=n}^{m} \frac{s_k(x) - s_{k-1}(x)}{k}\right| \leq \dfrac{2}{n\sin\frac{\delta}{2}}$ für $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$ existiert für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(x)$ ist in $[\delta, 2\pi - \delta]$ stetig.