Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske **WS 07/08**

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 24.01.07, vor der Vorlesung in den Briefkästen — Blatt 13

Aufgabe 1. Es sei $-\infty < a < b < +\infty$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.
a) Zeige: Für die Zerlegung $a + kh$, $k = 0, \ldots, n$ mit $h = \frac{b-a}{n}$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh) \ .$$

b) Berechne mit a) für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, das Integral $\displaystyle\int_a^b dx\; e^{\alpha x}$.

Aufgabe 2. Es sei $0 < a < b < +\infty$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.
a) Zeige: Für die Zerlegung aq^k, $k = 0, \ldots, n$ mit $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ gilt

$$\int_a^b dx\; f(x) = \lim_{n\to\infty} (q - 1)a \sum_{k=0}^{n-1} q^k f(aq^k) \ .$$

b) Berechne mit a) für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \{0, -1\}$, das Integral $\displaystyle\int_a^b dx\; x^\alpha$.

Aufgabe 3. Es seien $p, q \in \mathbb{N}$ mit $0 < p < q$. Zeige:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=pn+1}^{qn} \frac{1}{k} = \ln \frac{q}{p} \ .$$

Hinweis: Benutze $\displaystyle\int_p^q dt\; \frac{1}{t} = \ln \frac{p}{q}$.

Aufgabe 4. Berechne für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Integrale

a) $\displaystyle\int_0^x dt\; t^n e^t$

b) $\displaystyle\int_0^x dt\; t^n \sin t$

c) $\displaystyle\int_1^x dt\; t^n \ln t$

d) $\displaystyle\int_a^b dt\; e^{\alpha t} \cos(\beta t)$.