Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 07/08**
Dr. R. Brüske

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 22.11.07, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 6

Aufgabe 1. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz

a) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!3^n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Aufgabe 2. a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty \ .$$

b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} < \infty \ .$$

Aufgabe 3. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen komplexer Zahlen. Zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \ , \ \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| < \infty \ .$$

Aufgabe 4. Für $s > 1$ sei $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Zeige:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1-2^{1-s})\zeta(s)$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} = (1-2^{-s})\zeta(s).$