Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 07/08**
Dr. R. Brüske

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 29.11.07, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 7

Aufgabe 1.
a) Das Polynom $f(z) = z^4 + 3z^3 - 9z^2 - 25z - 6$ hat die Nullstellen $z_1 = -2$, $z_2 = 3$. Man bestimme die beiden anderen Nullstellen $z_3, z_4 \in \mathbb{C}$.

b) Man dividiere mit Rest das Polynom $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ durch das Polynom $g(x) = x^2 + 2x + 3$.

Aufgabe 2.
a) Für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ und $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $f(x) = (x - \alpha_1)^{\nu_1} \cdots (x - \alpha_n)^{\nu_n}$ ein Polynom vom Grad $\nu_1 + \cdots + \nu_n$.
Man zeige: Es gibt eindeutig bestimmte Koeffizienten $b_{k,j_k} \in \mathbb{C}$ mit $k = 1, \ldots, n$ und $j_k = 1, \ldots \nu_k$, so daß für alle $x \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ gilt

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j_k=1}^{\nu_k} \frac{b_{k,j_k}}{(x - \alpha_k)^{j_k}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b_{k,1}}{(x - \alpha_k)^1} + \frac{b_{k,2}}{(x - \alpha_k)^2} + \cdots + \frac{b_{k,\nu_k}}{(x - \alpha_k)^{\nu_k}} \right) .$$

(Diese Darstellung heißt Partialbruchzerlegung.)

b) Man berechne $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 8n + 3}$

Aufgabe 3. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1 + z^{2n}} .$$

Aufgabe 4. Es sei $(a_n)_{n \geq 1}$ Folge mit Werten in $\mathbb{R}$. Es gebe ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq M \; \forall \, n \geq 1$. Zeige:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert für $|x| < 1$.

b) Ist $a_1 \neq 0$, so hat $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ auf $\left]-\frac{|a_1|}{2M}, \frac{|a_1|}{2M}\right[$ keine nichttriviale Nullstelle.