Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske

WS 07/08

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 06.12.07, vor der Vorlesung in den Briefkästen

Blatt 8

Aufgabe 3. Bestimmen Sie zu $\varepsilon = 10^{-3}$ ein $\delta > 0$, so daß für $|x-1| < \delta$ gilt:

$$\left|\frac{1}{x^2+2x-2} - 1\right| < \varepsilon\ .$$

Aufgabe 2. Man untersuche, in welchen Punkten die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind:

(a) $x \longmapsto \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(b) $x \longmapsto \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > 1 \\ x^2 & \text{sonst} \end{cases}$

(c) $x \longmapsto [x] + (x-[x])^2$
Dabei ist $[x] \in \mathbb{Z}$ der ganze Teil einer reellen Zahl x, d.h. die größte ganze Zahl, die $\leq x$ ist.

Aufgabe 3. Überprüfen Sie, ob folgende Funktionsgrenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}\ , \quad m,n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{1+1/x}-\sqrt{1/x}}{\sqrt{x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\left(\frac{3}{x^2+5} - \frac{1}{x^2+1}\right)$

Aufgabe 4. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt offen, falls es zu jedem Punkt $m \in M$ auch ein m enthaltendes offenes Intervall gibt, das ebenfalls in M liegt, d.h.

$$\forall m \in M\ \exists \varepsilon_m > 0\ ,\ \text{so daß } \{x \in \mathbb{R}\ :\ |x-m| < \varepsilon_m\} \subset M\ .$$

Zeigen Sie: Eine Funktion $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ ist auf dem Intervall $]0,1[$ genau dann stetig, wenn gilt: $B \subset \mathbb{R}$ offen $\Rightarrow f^{-1}(B) \subset]0,1[$ offen.