Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske **WS 07/08**

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 13.12.07, vor der Vorlesung in den Briefkästen — Blatt 9

Aufgabe 1. Untersuchen Sie, ob folgende Funktionslimites existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+x}\big(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+1}\big)\,, \qquad a \geq 1\,,$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x\to\infty} x\Big(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\,,$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x\to\infty} \big(x-\sqrt{(x-1)(x-2)}\big)\,, \qquad x \geq 2\,,$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x\searrow a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}\,, \qquad a > 0$$

Aufgabe 2. a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ und $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig.
Zeigen Sie: Es gibt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Es gelte $f(a) \leq g(a)$ und $f(b) \geq g(b)$.
Zeigen Sie: Es gibt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = g(x_0)$.

Aufgabe 3. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nehme jeden Wert genau zweimal an.
Zeigen Sie: f ist nicht stetig.

Aufgabe 4. Für beschränkte Funktionen $g : D \to \mathbb{C}$ heißt $\|g\| := \sup\{|g(x)| \ :\ x \in D\}$ die *Supremumsnorm* von g. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$.
Zeigen Sie:

a) Gilt $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty$, so ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ absolut konvergent in jedem Punkt $x \in D$.

b) Gilt $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty$ und sind außerdem alle f_n stetig, dann ist auch die durch $f(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ definierte Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ stetig.