Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske **WS 08/09**

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 04.12.08, bis 14h00 in den Briefkästen — Blatt 7

Aufgabe 1. Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, und es gelte $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ für alle $1 \le i, j \le n$. Zeigen Sie:

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ gegeben durch $f(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 dt\ v_i(tx)$ gilt: $\operatorname{grad} f = v$.

Aufgabe 2. Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine stetige, nach der zweiten Variablen sogar stetig differenzierbare Funktion. Die Funktionen $g, h : J \to I$ seien differenzierbar. Zeige:

$F : J \to \mathbb{R}$ mit $F(y) := \int_{g(y)}^{h(y)} dx\ f(x, y)$ ist im Inneren von J differenzierbar, und es gilt

$$F'(y) = f(h(y), y)h'(y) - f(g(y), y)g'(y) + \int_{g(y)}^{h(y)} dx\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\ .$$

Aufgabe 3 . Für $\alpha > 0$ sei $I(\alpha) := \int_0^\alpha dx\ \frac{\ln(1 + \alpha x)}{1 + x^2}$. Zeige:

a) $I(0) = 0\ ;\ I(1) = \int_0^1 dx\ \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} =: I_1\ ,$
$\left(\frac{d}{d\alpha} I\right)(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{x\, dx}{(1 + \alpha x)(1 + x^2)} + \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{1 + \alpha^2}.$

b) $\left(\frac{d}{d\alpha} I\right)(\alpha) = \frac{\ln(1 + \alpha^2)}{2(1 + \alpha^2)} + \frac{\alpha \arctan \alpha}{1 + \alpha^2}$

c) $I(\alpha) = \frac{1}{2} \arctan \alpha\ \ln(1 + \alpha^2)$

d) $I_1 = \frac{\pi}{8} \ln 2$

Aufgabe 4. Für

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechne

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx\ g(x, y) \quad \text{und} \quad \int_0^1 dx \int_0^1 dy\ g(x, y)\ .$$