Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 08/09**
Dr. R. Brüske

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 18.12.08, bis 14h00 in den Briefkästen Blatt 9

Aufgabe 1. Für stetige Funktionen $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ sei folgendes System von Differentialgleichungen gegeben:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \qquad x \in I \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

Eine Lösung $\binom{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ von (1) sei bekannt, und es gelte $\varphi_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Um eine weitere Lösung von (1) zu finden, wähle man eine skalare nichtkonstante Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}$ und setze $\binom{y_1(x)}{y_2(x)} = \phi(x) \cdot \binom{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} + z(x)$ mit $z = \binom{0}{z_2}$. Zeigen Sie:

(a) Diese Funktion $y = \binom{y_1}{y_2}$ ist genau dann Lösung von (1), wenn

$$\begin{aligned} y' &= \phi' \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \phi \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}' + z' = \phi \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix} \iff \\ z' &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} z - \phi' \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) y ist genau dann Lösung von (1), wenn

$$a_{12} z_2 - \phi' \varphi_1 = 0 \quad \text{und} \quad z_2' = \Big(a_{22} - a_{12} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \Big) z_2 \,. \tag{2}$$

(c) Ist (z_2, ϕ) eine Lösung von (2), so ist $\phi \cdot \binom{\varphi_1}{\varphi_2} + \binom{0}{z_2}$ eine Lösung von (1) und $\Big(\binom{\varphi_1}{\varphi_2},\ \phi \cdot \binom{\varphi_1}{\varphi_2} + \binom{0}{z_2} \Big)$ ist ein Lösungsfundamentalsystem.

Aufgabe 2. Finde ein Lösungsfundamentalystem für

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}_+^* \,.$$

Tip: Eine Lösung ist $\binom{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \binom{x^2}{-x}$.

Aufgabe 3. Lösen Sie:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Löse $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{2x} + \sin(2x)$.