Grundlagen der Mathematik

Inhalt

Literatur

[1] O. Forster, "Analysis 1," Vieweg (2006).
[2] K. Königsberger, "Analysis 1," Springer (2004).
[3] G. Fischer, "Lineare Algebra," Vieweg (2005).

Teil I
Grundlagen

1 Mathematische Beweise

Die Mathematik basiert auf einer Reihe von Axiomen, d.h. als "wahr" angenommenen Grundaussagen, aus denen dann durch logische Verknüpfungen weitere Aussagen *bewiesen*, d.h. als "wahr" erkannt werden. Eine mathematische Aussage ist entweder wahr oder falsch, niemals beides.

Sei B eine mathematische Aussage (z.B. $5 > 2$). Um zu beweisen, daß B wahr ist, ist eine bereits als wahr erkannte Aussage A zu suchen, aus der B folgt (geschrieben: $A \Rightarrow B$). Meist sind in Beweisen mehrere Aussagen zu verknüpfen.

Definition 1.1 Es seien A, B Aussagen. Dann werden Verknüpfungen $A \wedge B$ (*und*), $A \vee B$ (*oder*), $\neg A$ (*nicht*), $A \Rightarrow B$ (*folgt*) und $A \Leftrightarrow B$ (*äquivalent*) definiert durch die *Wahrheitstafel*

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
w	w	w	w	w	w	f
w	f	f	w	f	f	f
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	f	w	w	w

In der Analysis müssen wir entsprechende Verknüpfungen für Mengen von Aussagen untersuchen. Dazu einige Bezeichnungen für Mengen: Endliche Mengen kann man durch eine vollständige Liste ihrer Elemente angeben, Schreibweise $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Dabei ist die Reihenfolge beliebig, und das gleiche Element darf nicht mehrmals auftreten. Die x_i, $i = 1, \dots, n$, heißen *Elemente* der Menge X, Schreibweise $x_i \in X$. Wenn x kein Element von X ist, schreiben wir $x \notin X$. Die *leere Menge* $\varnothing$ enthält kein Element. Eine Menge Y heißt *Teilmenge* einer Menge X, wenn für jedes Element $y \in Y$ gilt $y \in X$. Ist $Y \subset X$, dann ist das Komplement $X \setminus Y$ definiert als die Menge der $x \in X$ mit $x \notin Y$. Das *direkte Produkt* von Mengen $X_1, \dots, X_n$ ist erklärt als die Menge aller geordneten n-Tupel:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \;:\; x_i \in X_i\} .$$

Speziell schreiben wir $X^n := \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n}$.

Viele der Konstruktionen aus endlichen Mengen lassen sich auch auf unendliche Mengen übertragen. Wir benötigen vor allem folgende Zahlbereiche: die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots, \}$ der natürlichen Zahlen, die Menge $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ der ganzen Zahlen, die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen sowie die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Wir werden später im Detail darauf eingehen und insbesondere auch die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen definieren.

Definition 1.2 (für alle; es gibt) Es sei I eine beliebige Indexmenge und $\{A_i \ : \ i \in I\}$ ein System von Aussagen.

i) Die Aussage ($\forall i \in I$ gilt A_i) ist wahr genau dann, wenn alle Aussagen A_i wahr sind.

ii) Die Aussage ($\exists i \in I$ mit A_i) ist wahr genau dann, wenn mindestens eine der Aussagen A_i wahr ist.

Also ist $\forall$ die Verallgemeinerung von $\wedge$ und $\exists$ die Verallgemeinerung von $\vee$. Einige Folgerungen aus der Definition sind:

- $(A \wedge B) \Rightarrow A \vee B$
- $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$
- $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- $(\neg A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow A)$

Die letzte Eigenschaft ist die Grundlage des *indirekten Beweises*: Um B zu beweisen, suchen wir eine falsche Aussage A und zeigen, daß A aus der Verneinung von B folgt, also $\neg B \Rightarrow A$.

Beispiel 1.3 (Irrationalität von $\sqrt{2}$) Es sei B die Aussage: $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl. Wir gehen von der Negation $\neg B$ aus: Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre eine rationale Zahl, also $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$. Durch Kürzen kann erreicht werden, daß p oder q ungerade ist. Es gilt $2 = (\sqrt{2})^2 = \frac{p^2}{q^2}$, also $p^2 = 2q^2$. Damit ist p^2 und dann auch p gerade. Somit ist nach Voraussetzung q ungerade. Da p gerade ist, gibt es ein $r \in \mathbb{Z}$ mit $p = 2r$. Nun ergibt sich $2 = \frac{4r^2}{q^2}$, also $q^2 = 2r^2$, d.h. q^2 und damit auch q ist auch gerade! Wir haben also gezeigt:

$$\underbrace{(\sqrt{2} \in \mathbb{Q})}_{\neg B} \Rightarrow \underbrace{(\exists q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, \text{ mit } q \text{ ist gerade und ungerade })}_{A} \quad \text{ist wahr.}$$

Da A falsch ist, kann $\neg B \Rightarrow A$ nur dann wahr sein, wenn $\neg B$ falsch ist, also B wahr, d.h. $\sqrt{2}$ ist irrational. $\square$

Wichtig in indirekten Beweisen ist die korrekte Verneinung der Aussage. Dabei gelten:

- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

- $\neg(\forall i \in I \text{ gilt } A_i) \Leftrightarrow \exists i \in I \text{ mit } \neg A_i$
- $\neg(\exists i \in I \text{ mit } A_i) \Leftrightarrow \forall i \in I \text{ gilt } \neg A_i$

Beispiel 1.4 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, wenn gilt:

Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, so daß für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

Die Verneinung ist nicht: "Es gibt kein $a \in \mathbb{R} \dots$", sondern:

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent, wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: Es gibt ein $\epsilon > 0$, so daß für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ existiert mit $|a_n - a| \geq \epsilon$.

2 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Die Struktur der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen wird als bekannt vorausgesetzt. In dieser Vorlesung ist $0 \in \mathbb{N}$, für die natürlichen Zahlen ohne 0 schreiben wir $\mathbb{N}^\times := \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Die wichtigste Eigenschaft von $\mathbb{N}$ ist, daß für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau ein Nachfolger $n+1$ existiert, und startend mit 0 wird mit $0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots$ jede natürliche Zahl genau einmal durchlaufen. Daraus ergibt sich das

2.1 Beweisprinzip der vollständigen Induktion. *Es sei $N \in \mathbb{N}$, und zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ sei eine Aussage A_n gegeben. Alle Aussagen A_n sind richtig, wenn man* (I0) *und* (I1) *beweisen kann:*

(I0) *A_N ist wahr (Induktionsanfang).*

(I1) *Für beliebiges $n \geq N$ gilt: Falls A_n wahr ist, so ist auch A_{n+1} wahr (Induktionsschritt).*

Satz 2.2 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage A_n: $0 + 1 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Beweis. *i) Wähle $N = 0$. Offenbar ist A_0 wahr.*
ii) Unter der Annahme, daß A_n gilt, folgt

$$\underbrace{0 + 1 + \cdots + n}_{A_n} + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\ ,$$

also die Aussage A_{n+1}. □

Da Summen wie in Satz 2.2 häufig vorkommen, vereinbart man das *Summenzeichen* Σ: Ist für jede natürliche Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq k \leq n$ eine reelle Zahl a_k gegeben, dann setzt man

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n & \text{falls } n \geq m \\ 0 & \text{falls } n < m \end{cases}$$

(Dabei bedeutet ":=", daß der links stehende Ausdruck durch die rechte Seite erklärt wird.) Insbesondere ist $\sum_{k=m}^{m} a_k = a_m$ und

$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k + a_{n+1} . \tag{*}$$

Durch letzte Eigenschaft kann man das Summenzeichen *rekursiv* ähnlich zum Prinzip der vollständigen Induktion definieren: Man wählt als Induktionsanfang $\sum_{k=m}^{m-1} a_k := 0$ und (*) als Induktionsschritt. Weitere Beispiele rekursiver Definitionen sind die Potenzen einer reellen Zahl als $x^1 := x$ (Induktionsanfang) und $x^{n+1} := x \cdot x^n$ (Induktionsschritt). Für $x \neq 0$ definiert man außerdem $x^0 := 1$. (Der Ausdruck "0^0" ist nicht definiert. Jedoch werden wir im weiteren Verlauf des Semesters x^y definieren und x^y für $x, y \to 0$ untersuchen.) Mit diesen Vorbereitungen beweisen wir

Satz 2.3 (geometrische Summenformel) *Es sei x eine von 0 und 1 verschiedene reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt* $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

Beweis. i) Induktionsanfang: Für $n = 0$ steht auf der linken Seite $x^0 = 1$ und auf der rechten Seite $\frac{1-x}{1-x} = 1$, die Aussage ist also wahr *unter der Voraussetzung $x \neq 0$ und $x \neq 1$.*
ii) Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1}\frac{1 - x}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + \frac{x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} .\end{aligned}$$ □

(Die linke Seite ist auch für $x = 1$ sinnvoll und ergibt $\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$. Fragen wie nach dem Wert der rechten Seite für $x \to 1$ sind typisch für die Analysis.)

Ähnlich zum Summenzeichen wird auch das Produktzeichen (mit sonst gleichen Bezeichnungen wie zuvor) eingeführt als

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{falls } n < m \end{cases}$$

Die rekursive Definition ist $\prod_{k=m}^{m-1} a_k := 1$ und $\prod_{k=m}^{n+1} a_k := a_{n+1} \cdot \prod_{k=m}^{n} a_k$. Besonders wichtig ist für $n \in \mathbb{N}^\times$ der Ausdruck $n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdots n$, gesprochen "$n$-

Fakultät". Außerdem definiert man $0! := 1$. Über die Fakultät bildet man für $n, k \in \mathbb{N}$ die *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } n \geq k \\ 0 & \text{falls } n < k \end{cases}$$

Insbesondere gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $n \geq k \geq 1$, so ergibt sich $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, was für konkrete Berechnungen sinnvoller ist.

Lemma 2.4 *Für $n, k \in \mathbb{N}$ gilt* $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Beweis. Für $k = 0$ ist auf der linken Seite $\binom{n+1}{1} = n + 1$ und auf der rechten Seite $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + n$, d.h. die Formel gilt für $k = 1$. Für $n = k$ sind beide Seiten der Gleichung gleich 1 und für $k > n$ verschwinden beide Seiten der Gleichung. Damit verbleibt der Fall $n > k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
&= \frac{n!(k+1)}{k!(k+1)(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1} .
\end{aligned}$$

□

Das Lemma ist der Hintergrund für das Pascalsche Dreieck zur Veranschaulichung der Binomialkoeffizienten. Insbesondere ist $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für $n, k \in \mathbb{N}$.

Satz 2.5 (Binomialentwicklung) *Für reelle Zahlen $x, y \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt* $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Beweis. Durch Induktion nach n. i) Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $(x + y)^0 = 1$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{-k} = 1$.

ii) Induktionsschritt:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k}}_{k+1\to l} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}y^{n+1-k}}_{k\to l} \\
&= \sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}x^l y^{n+1-l} + \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}x^l y^{n+1-l} \\
&= \sum_{l=1}^{n}\underbrace{\left\{\binom{n}{l-1}+\binom{n}{l}\right\}}_{=\binom{n+1}{l}} x^l y^{n+1-l} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=\binom{n+1}{n+1}} x^{n+1}y^0 + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=\binom{n+1}{0}} x^0 y^{n+1} \\
&= \sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}x^l y^{n+1-l} \ . \qquad \square
\end{aligned}
$$

3 Gruppen und Körper

3.1 Gruppen

Die Erweiterung von $\mathbb{N}$ zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bewirkt, daß die Subtraktion stets ausführbar ist. Dadurch bildet $\mathbb{Z}$ eine sogenannte *kommutative Gruppe*.

Unter einer *Verknüpfung* oder *Komposition* auf einer Menge G versteht man eine Vorschrift, die zwei gegebenen Elementen $a, b \in G$ ein neues Element $a*b \in G$ zuordnet, d.h. eine Abbildung

$$* : G \times G \to G \ , \qquad * : (a,b) \mapsto a * b := *(a,b) \ .$$

Beispiele sind die Addition $* = +$ und Multiplikation $* = \cdot$ in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Ein weiteres wichtiges Beispiel ist die Menge $G = \mathrm{Abb}(X,X) = \{f : X \to X\}$ der Selbstabbildungen von X mit der Komposition $* = \circ$ als Verknüpfung, $f, g \in \mathrm{Abb}(X,X) \ \Rightarrow \ f \circ g \in \mathrm{Abb}(X,X)$.

Definition 3.1 Eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $*$ heißt *Gruppe*, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

(G1) $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle $a, b, \in G$ (Assoziativgesetz)

(G2) Es gibt ein neutrales Element $e \in G$ mit $e * a = a$ für alle $a \in G$

(G3) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a^{-1} \in G$ (das zu a inverse Element) mit $a^{-1} * a = e$

Die Gruppe heißt *kommutativ* (oder *abelsch*), falls außerdem $a * b = b * a$ für alle $a, b \in G$. In diesem Fall schreibt man meist $+$ für die Verknüpfung, 0 für das neutrale Element und $-a$ für das zu a inverse Element.

Gruppen sind *sehr wichtig* in Mathematik und Naturwissenschaften. Beispiele für Gruppen sind, neben den Zahlbereichen, z.B. Drehungen, Verschiebungen, Spiegelungen; allgemein Bewegungen und Zeitentwicklung, Umordnungen (Permutationen), Symmetrieoperationen, etc.

Wir stellen wichtige Eigenschaften von Gruppen zusammen, die direkt aus den Definitionen folgen.

Satz 3.2 *Ist G eine Gruppe, so gilt:*

i) *Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt, und außerdem gilt $a * e = a$ für alle $a \in G$.*

ii) *Das inverse Element a^{-1} ist für jedes $a \in G$ eindeutig bestimmt, und außerdem gilt $a * a^{-1} = e$ sowie $(a^{-1})^{-1} = a$ und $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.*

iii) *Es gelten die Kürzungsregeln $a * b' = a * b \;\Rightarrow\; b = b'$ und $b' * a = b * a \;\Rightarrow\; b = b'$.*

Beweis. Sei $e \in G$ eines der neutralen Elemente und $a \in G$. Zum Inversen $a^{-1} \in G$ gibt es wieder ein Inverses $(a^{-1})^{-1} \in G$, und es gilt

$$\begin{aligned} a * a^{-1} &= e * (a * a^{-1}) = ((a^{-1})^{-1} * a^{-1}) * (a * a^{-1}) = (((a^{-1})^{-1} * a^{-1}) * a) * a^{-1} \\ &= ((a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a)) * a^{-1} = ((a^{-1})^{-1} * e) * a^{-1} = (a^{-1})^{-1} * (e * a^{-1}) \\ &= (a^{-1})^{-1} * a^{-1} = e \end{aligned}$$

und daraus

$$a * e = a * (a^{-1} * a) = (a * a^{-1}) * a = e * a = a \, .$$

Sei $\tilde{e} \in G$ ein weiteres neutrales Element, so gilt aus Sicht von e die Gleichung $e * \tilde{e} = \tilde{e}$ und aus Sicht von $\tilde{e}$ die Gleichung $e * \tilde{e} = e$, also $e = \tilde{e}$. Damit ist i) bewiesen und $a * a^{-1} = e$ aus ii).

Sei $\widetilde{a^{-1}}$ ein weiteres Inverses zu a, so gilt

$$\widetilde{a^{-1}} = \widetilde{a^{-1}} * e = \widetilde{a^{-1}} * (a * a^{-1}) = (\widetilde{a^{-1}} * a) * a^{-1} = e * a^{-1} = a^{-1} \, ,$$

also ist das Inverse eindeutig. Damit ist wegen $a * a^{-1} = e$ das Inverse von a^{-1} durch a selbst gegeben. Schließlich gilt

$$(b^{-1}*a^{-1})*(a*b) = ((b^{-1}*a^{-1})*a)*b = (b^{-1}*(a^{-1}*a))*b = (b^{-1}*e)*b = b^{-1}*b = e$$

so daß $b^{-1} * a^{-1}$ das Inverse zu $a * b$ ist.

Die Kürzungsregeln folgen nach Verknüpfung von links/rechts mit a^{-1} unter Verwendung der Assoziativität. □

Definition 3.3 Sei G eine Gruppe mit Verknüpfung $*$. Eine nichtleere Teilmenge $H \subset G$ heißt *Untergruppe*, wenn für alle $a, b \in H$ auch $a * b \in H$ und $a^{-1} \in H$ gilt.

Es folgt automatisch $e \in H$ (durch Wahl von $b = a^{-1}$). Ist G eine Gruppe, so sind die Teilmengen $H = G$ und $H = \{e\}$ Untergruppen. Sie heißen *triviale Untergruppen*.

Beispiele sind $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ bezüglich der Addition oder G als Gruppe der Drehungen eines Körpers und H als Untergruppe der Drehungen um eine feste Achse.

3.2 Körper

Die Erweiterung von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ bewirkt, daß die Division durch von Null verschiedene Elemente ausführbar wird. Außerdem sind die beiden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ kompatibel. Man sagt, $\mathbb{Q}$ ist ein Körper:

Definition 3.4 Eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + :& K \times K \to K\ , \qquad + : (a,b) \mapsto a + b \qquad \text{(Addition)} \\ \cdot :& K \times K \to K\ , \qquad \cdot : (a,b) \mapsto a \cdot b \qquad \text{(Multiplikation)} \end{aligned}$$

heißt *Körper*, wenn folgendes gilt:

(K1) K zusammen mit der Addition ist eine kommutative Gruppe. Ihr neutrales Element wird mit 0 bezeichnet und das zu $a \in K$ inverse Element mit $-a$.

(K2) Sei $K^\times := K \setminus \{0\}$, dann ist für $a, b \in K^\times$ auch $a \cdot b \in K^\times$, und $K^\times$ mit dieser Multiplikation ist eine kommutative Gruppe. Ihr neutrales Element wird mit 1 bezeichnet und das zu $a \in K^\times$ inverse Element mit $a^{-1} = 1/a$. Man schreibt auch $a/b = a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1}$.

(K3) Es gelten die Distributivgesetze

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{und} \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

für alle $a, b, c \in K$.

Offenbar sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ Körper, $\mathbb{Z}$ ist es nicht. Später werden wir den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen einführen. In der Algebra werden noch viele weitere Körper untersucht, z.B. kann man die zweielementige Menge $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$ zu einem Körper machen. In $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ schreiben wir die Multiplikation meist als ab statt $a \cdot b$.

In einem Körper gilt

i) $1 \neq 0$ (da $1 \in K^\times$ und $0 \notin K^\times$)

ii) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ (verwende $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$)

iii) $a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$ oder $b = 0$ (aus (K2))

iv) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ und $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

v) $a \cdot b = a \cdot c$ und $a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad b = c$

3.3 Angeordnete Körper

Die rationalen und reellen Zahlen sind dadurch gekennzeichnet, daß gewisse Elemente als *positiv* ausgezeichnet sind:

Definition 3.5 (Anordnungs-Axiome) Ein Körper K heißt *angeordnet*, falls eine Teilmenge $K_+^\times \subset K$ existiert mit folgenden Eigenschaften:

(A1) Für $a \in K^\times$ ist entweder $a \in K_+^\times$ oder $-a \in K_+^\times$.

(A2) Aus $a, b \in K_+^\times$ folgen $a + b \in K_+^\times$ und $ab \in K_+^\times$.

Die Elemente $a \in K_+^\times$ heißen *positiv*, Schreibweise $a > 0$.

Offenbar sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ angeordnete Körper. Man vereinbart

$$\begin{array}{ll} a > b, & \text{falls } a - b > 0 \\ b < a, & \text{falls } a > b \\ a \leq b, & \text{falls } a < b \text{ oder } a = b \\ a \geq b, & \text{falls } a > b \text{ oder } a = b \end{array}$$

Ist $-a$ positiv, also $a < 0$, so heißt a negativ. Ist $a \geq 0$, so heißt a nichtnegativ. Die Menge der nichtnegativen rellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}_+$ bezeichnet, die der positiven rellen Zahlen mit $\mathbb{R}_+^\times$. Außerdem ist $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Anordnung ermöglicht die Darstellung der rellen Zahlen auf der Zahlengeraden.

Alle Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen folgen aus diesen Axiomen. Hier eine Auswahl ohne Beweis.

Lemma 3.6 *Es sei K ein angeordneter Körper (z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$). Dann gelten:*

i) *Für beliebige $a, b \in K$ gilt genau eine der Relationen $a > b$, $a = b$, $a < b$.*

ii) *Aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$ (Transitivität).*

iii) *Aus $a > b$ folgen $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, $a + c > b + c$ für alle $c \in K$ sowie $ac > bc$ für $c \in K_+^\times$ und $ac < bc$ für $-c \in K_+^\times$.*

iv) *Aus $a > b$ und $c > d$ folgt $a+c > b+d$ und im Fall $b, d > 0$ auch $ac > bd$.*

v) *Für $a \neq 0$ gilt $a^2 > 0$.*

Analoge Regeln gelten für "$\geq$". Indem man $n \in \mathbb{N}$ mit $n1 := \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}} \in K$ identifiziert, kann man $\mathbb{N}$ als Teilmenge jedes geordneten Körpers K auffassen, analog auch $\mathbb{Z}$. Indem man $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+^\times$ für $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $(p1)(q1)^{-1} \in K$ identifiziert, kann man $\mathbb{Q}_+^\times$ und analog auch $\mathbb{Q}$ als Teilmenge jedes geordneten Körpers K auffassen.

Definition 3.7 (Absolutbetrag) Es sei K ein angeordneter Körper und $a \in K$. Dann heißt

$$|a| \in K_+ \,, \qquad |a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

der *Absolutbetrag* von a.

Satz 3.8 *Für den Absolutbetrag in einem angeordneten Körper K gilt (mit $a, b \in K$)*

i) $|a| = |-a|$

ii) $a \leq |a|, \qquad -a \leq |a|$

iii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(Dreiecksungleichung)*

iv) $|ab| = |a||b|$

v) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Beweis. i) und ii) folgen aus der Definition.
iii) Aus ii) und Lemma 3.6.iv folgen $a+b \leq |a|+|b|$ und $-(a+b) \leq |a|+|b|$, aus der Definition des Betrages dann iii).
iv) Durch Fallunterscheidung nach $a \gtreqless 0$ und $b \gtreqless 0$.
v) Aus der Dreiecksungleichung folgt $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ bzw. $|a| - |b| \leq |a - b|$. Vertauschen von a, b liefert $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$, zusammengefaßt damit v). □

Die Dreiecksungleichung (und ihre Verallgemeinerungen) werden wir oft benötigen.

Lemma 3.9 (Bernoullische Ungleichung) *Es sei K ein angeordneter Körper (z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$).*

i) *Für alle $x \in K$ mit $x > -1$ und $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $(1+x)^n > 1 + nx$.*

ii) *Für alle $x \in K$ mit $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.*

Beweis. Wir beweisen i) durch Induktion nach n. (1) Induktionsanfang: Für $n = 2$ ergibt sich $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ wegen $x^2 > 0$.
(2) Induktionsschritt. Die Bernoullische Ungleichung gelte für n. Dann folgt unter Verwendung von $1 + x > 0$ und $x^2 > 0$

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{>1+nx}(1+x) > (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x \,.$$

Der Beweis von ii) ist analog. □

Definition 3.10 Ein angeordneter Körper K heißt *archimedisch*, wenn zusätzlich gilt:

(A3) Zu jedem Element $a \in K$ gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $n - a > 0$.

Offenbar sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet.

Satz 3.11 *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $q, R, \epsilon \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

i) *Ist $q > 1$, so gibt es zu jedem $R \in K$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $q^n > R \quad \forall n \geq N$.*

ii) *Ist $0 < q < 1$, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $q^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$.*

iii) *Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$.*

Beweis. i) Setze $q = 1 + x$ mit $x > 0$. Nach (A3) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{R}{x} < N$, also $Nx > R$. Nach Bernoulli gilt $q^N > 1 + Nx$ für $N \geq 2$, $N \in \mathbb{N}$. Für $Nx > R$ ergibt sich $q^N > 1 + R > R$ und damit $q^n > R$ für alle $n \geq N \geq 2$.

ii) Für $0 < q < 1$ ist $\frac{1}{q} > 1$. Nach i) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{1}{q})^n > R := \frac{1}{\epsilon}$ für alle $n \geq N$. Damit ergibt sich $0 < q^n < \frac{1}{R} = \epsilon$ für alle $n \geq N$.

iii) Nach (A3) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{\epsilon} =: R < N$. Dann ist $N \geq 1$, und es folgt $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{1}{R} = \epsilon$ für alle $n \geq N$. $\square$

4 Reelle Zahlen

Alle bisher eingeführten algebraischen Strukturen gelten gleichermaßen für beide archimedisch angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Der wesentliche analytische Unterschied ist die *Vollständigkeit* von $\mathbb{R}$. Wir definieren die Vollständigkeit zunächst geometrisch über Intervallschachtelungen, später über sogenannte Fundamentalfolgen (was sich auf andere Beispiele verallgemeinern läßt).

Definition 4.1 i) Beschränkte Intervalle. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir setzen

$$\begin{array}{ll} [a,b] := \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\} & \text{(abgeschlossenes Intervall)} \\ ]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\} & \text{(offenes Intervall)} \\ [a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\} & \text{(rechts halboffenes Intervall)} \\ ]a,b] := \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\} & \text{(links halboffenes Intervall)} \end{array}$$

Die Intervalle $[a,b]$ nennt man auch *kompakt*. Für alle diese Intervalle $I = [a,b],]a,b[, \ldots$ heißen die Punkte a, b die *Randpunkte* und die $x \in \mathbb{R}$ mit $a < x < b$ die *inneren Punkte*. Für jedes dieser Intervalle I ist $\bar{I} := [a,b]$ der Abschluß. Die relle Zahl $|I| := b - a$ heißt Länge des Intervalls I.

ii) Unbeschränkte Intervalle. Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$\begin{array}{ll} [a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x\} &]a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x\} \\ ]-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq a\} &]-\infty,a[:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < a\} \end{array}$$

und $]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$.

Die in i) und ii) angegebenen Intervalle heißen auch *echte Intervalle* im Unterschied zum unechten Intervall $[a,a] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq a\} = \{a\}$.

Manchmal werden offene Intervalle auch als (a, b) geschrieben.

Definition 4.2 Eine *Intervallschachtelung* ist eine Folge $I_0, I_1, I_2, \ldots,$ kompakter Intervalle, kurz $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit folgenden Eigenschaften:

(I1) $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(I2) zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n mit der Länge $|I_n| < \epsilon$.

Eine Formulierung der Vollständigkeit der reellen Zahlen besteht in der Gültigkeit des

4.3 Intervallschachtelungsprinzip. *Zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Die so erhaltene reelle Zahl x ist eindeutig bestimmt: Gäbe es zwei solche Zahlen x_1, x_2 mit $x_1 < x_2$, so müßte das Intervall $[x_1, x_2]$ in allen I_n enthalten sein, und jedes dieser I_n hätte eine Länge $\geq x_2 - x_1$ im Widerspruch zu (I2).

Eine erste Anwendung der Vollständigkeit ist die Existenz der k-ten Wurzeln positiver reeller Zahlen.

Satz 4.4 *Zu jeder reellen Zahl $x > 0$ und jeder natürlichen Zahl $k \geq 1$ gibt es genau eine reelle Zahl $y > 0$ mit $y^k = x$. (Diese wird als $y = x^{\frac{1}{k}}$ oder $y = \sqrt[k]{x}$ geschrieben.)*

Beweis. Da aus $y_1 > y_2 > 0$ die Relation $y_1^k > y_2^k > 0$ folgt, kann es höchstens eine positive Lösung geben. Für $x = 1$ ist $y = 1$ die einzige Lösung. Wir betrachten zunächst den Fall $x > 1$ und konstruieren eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1_n) $\quad a_n^k \leq x \leq b_n^k$

(2_n) $\quad |I_n| = \frac{1}{2^n}|I_0|$

Wir beginnen mit $I_0 := [1, x]$ als Induktionsanfang. Dann ist (2_0) klar, und aus $1 < x$ folgt $1^k \leq x \leq x^k$. Induktionsschritt von n auf $n+1$: Gegeben ist $I_n = [a_n, b_n]$ mit (1_n) und (2_n). Setze $m_n := \frac{1}{2}(a_n + b_n) = a_n + \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ (Mittelpunkt) und

$$\begin{aligned} a_{n+1} &:= m_n \ , \ b_{n+1} := b_n \quad \text{falls } m_n^k \leq x \ , \\ a_{n+1} &:= a_n \ , \ b_{n+1} := m_n \quad \text{falls } m_n^k > x \ . \end{aligned}$$

Diese Konstruktion erfüllt (1_{n+1}) und wegen $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$ auch (2_{n+1}). Nach Satz 3.11 erfüllt $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Eigenschaften einer Intervallschachtelung (Definition 4.2), und nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bleibt zu beweisen, daß $y^k = x$. Dazu zeigt man, daß auch $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $J_n := [a_n^k, b_n^k]$ eine Intervallschachtelung ist. Der Einschluß $J_{n+1} \subset J_n$ ist klar, und für die Längen gilt für $k > 1$

$$|J_n| = b_n^k - a_n^k = \underbrace{(b_n - a_n)}_{=|I_n|} \underbrace{(b_n^{k-1} a_n^0 + b_n^{k-2} a_n^1 + \cdots + b_n^0 a_n^{k-1})}_{<kx^{k-1}} < \frac{kx^{k-1}}{2^n}|I_0| \ .$$

Nun liegen nach Konstruktion sowohl x als auch y^k in jedem Intervall J_n. Da diese in allen Intervallen der Schachtelung liegende reelle Zahl eindeutig ist, gilt $y^k = x$.

Ist $0 < x < 1$, so konstruiert man zu $\frac{1}{x} > 1$ die k-te Wurzel $y > 1$ mit $y^k = \frac{1}{x}$. Dann ist $\frac{1}{y}$ die k-te Wurzel aus x, denn $(\frac{1}{y})^k = \frac{1}{y^k} = \frac{1}{1/x} = x$. □

Definition 4.5 (obere und untere Schranken) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt* bzw. *nach unten beschränkt*, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt

$$x \leq s \qquad \text{bzw.} \qquad x \geq s\ .$$

In diesem Fall heißt s eine *obere Schranke* bzw. eine *untere Schranke*. Die Menge M heißt *beschränkt*, wenn M nach oben und unten beschränkt ist.

Beispiel 4.6 Für $a, b \in \mathbb{R}$ sind die offenen, halboffenen und abgeschlossenen Intervalle $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ und $[a, b]$ beschränkt, damit auch nach oben oder unten beschränkt. Aus dem archimedischen Axiom folgt: Die Intervalle $[a, \infty]$ und $]a, \infty]$ sind nach unten beschränkt, aber nicht beschränkt. Die Intervalle $]-\infty, b[$ und $]-\infty, b]$ sind nach oben beschränkt, aber nicht beschränkt. Das Intervall $]-\infty, \infty[$ ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

In einer beschränkten Menge braucht es eine größte oder kleinste Zahl nicht zu geben. Ist $I =]0, 1[$, dann gibt es zu jeder Zahl $x \in I$ eine größere, z.B. $\frac{1+x}{2} > x$. Damit ist $s = 1$ eine obere Schranke von I (und jede reelle Zahl $s > 1$ ist ebenfalls eine obere Schranke), aber $1 \notin I$. Aber 1 ist die kleinste obere Schranke von I:

Definition 4.7 (Supremum und Infimum) Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* der Menge $M \subset \mathbb{R}$, geschrieben $s = \sup M$, wenn s die kleinste obere Schranke für M ist, d.h.

i) M ist beschränkt und s ist eine obere Schranke für M.

ii) Jede Zahl $s' < s$ ist keine obere Schranke für M.

Entschrechend ist das *Infimum* von $M \subset \mathbb{R}$ die größte untere Schranke, geschrieben $\inf M$.

Beispiel 4.8 Für die Intervalle I gegeben durch $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ und $[a, b]$ mit $a < b$ gilt jeweils $\sup I = b$ und $\inf I = a$. Auf der nach oben abgeschlossenen Seite von $[a, b]$ und $]a, b]$ wird das Supremum b in I angenommen, es liegt dann ein Maximum vor, wobei $\max M := \{x \in M \ :\ y \leq x \quad \forall y \in M\}$. Es gilt dann $\sup(]a, b]) = \max(]a, b]) = b$. Dagegen gilt $\sup([a, b[) = b$, aber $[a, b[$ besitzt kein Maximum.

Satz 4.9 *Jede nach oben (unten) beschränkte nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (Infimum).*

Bemerkung: Das ist eine Formulierung der Vollständigkeit und gilt somit nicht für $M \subset \mathbb{Q}$.

Beweis (für das Supremum). Analog zum Existenzbeweis der k-ten Wurzel (Satz 4.4) konstruiert man eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ derart, daß $b_n \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke ist und $a_n \in M$ keine obere Schranke ist. Man startet mit einem beliebigen $a_0 \in M$ und einer beliebigen oberen Schranke b_0 und konstruiert per Induktion das Intervall I_{n+1} durch Halbierung von I_n. Eine der Hälften hat die geforderten Eigenschaften. □

Umgekehrt folgt das Intervallschachtelungsprinzip aus der Existenz eines Supremums und Infimums für beschränkte Mengen: Es sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung. Die Menge $A := \{a_0, a_1, \dots\}$ ist nach oben beschränkt durch jede der oberen Schranken b_i. Dann gibt es das Supremum $s = \sup A \in \mathbb{R}$ (kleinste obere Schranke) mit $a_n \leq s \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

5 Komplexe Zahlen

Die komplexen Zahlen stellen eine Erweiterung der reellen Zahlen dar, in der die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ lösbar ist. Viele Bereiche der Analysis lassen sich ohne Modifikation von den reellen auf die komplexen Zahlen erweitern, und manche Eigenschaften im Reellen lassen sich über den "Umweg" der komplexen Zahlen besser verstehen.

Für den zu bestimmenden Erweiterungskörper $\mathbb{C}$ der reellen Zahlen fordern wir:

i) $z^2 + 1 = 0$ ist lösbar, und i bezeichne eine Lösung dieser Gleichung.

ii) Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt auch $x \in \mathbb{C}$.

Dann ist für $x, y \in \mathbb{R}$ auch $z := x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. Die Körperaxiome (insbesondere Kommutativität und Distributivität) sowie $\mathrm{i}^2 = -1$ liefern für $x, y, u, v \in \mathbb{R}$:

$$(x+\mathrm{i}y)+(u+\mathrm{i}v) = (x+u)+\mathrm{i}(y+v)\;, \qquad (x+\mathrm{i}y)\cdot(u+\mathrm{i}v) = (xu-yv)+\mathrm{i}(xv+yu)\;.$$

Damit ist die Menge der Elemente der Form $x + \mathrm{i}y$ abgeschlossen unter Addition und Multiplikation. Aus $(x+\mathrm{i}y) = (u+\mathrm{i}v)$ folgt $(x-u)^2 = -(y-v)^2$, also $x = u$ und $y = v$. Die beiden reellen Zahlen x, y in $z = x + \mathrm{i}y$ sind durch z eindeutig definiert. Das formalisiert man wie folgt:

Definition 5.1 Eine komplexe Zahl ist ein Element $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit folgender Addition und Multiplikation:

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)\;, \qquad (x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)\;.$$

Satz 5.2 *Die mit dieser Addition und Multiplikation definierte Menge der komplexen Zahlen bildet einen Körper, der mit $\mathbb{C}$ bezeichnet wird.*

Beweis. Es sind die Körperaxiome nach Definition 3.4 zu überprüfen. Man findet:

- $0 = (0, 0)$ ist das neutrale Element der Addition.
- $1 = (1, 0)$ ist das neutrale Element der Multiplikation.
- $-z = (-x, -y)$ ist bezüglich der Addition das zu $z = (x, y)$ inverse Element.
- Nicht so offensichtlich ist das zu $z \neq 0$ bezüglich der Multiplikation inverse Element: Dieses ist gegeben durch $z^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$, d.h. es gilt $(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}) \cdot (x, y) = (1, 0)$.

(Man kann allgemein zeigen, daß das neutrale und inverse Element einer Gruppe eindeutig ist.) Durch Nachrechnen zeigt man die Distributivgesetze. □

Die durch $\iota : x \mapsto (x, 0)$ definierte Abbildung $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist injektiv. Wegen $(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0)$ und $(x, 0) \cdot (u, 0) = (xu, 0)$ kann man deshalb $\mathbb{R}$ mit seinem Bild $\iota(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$ identifizieren und somit die reellen Zahlen als Unterkörper der komplexen Zahlen auffassen.

Unter Verwendung der *imaginären Einheit* $\mathrm{i} := (0, 1) \in \mathbb{C}$, mit $\mathrm{i}^2 = (-1, 0) = -1$, kann man eine komplexe Zahl schreiben als $z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = \iota(x) + \mathrm{i}\iota(y)$, oder kurz als $z = x + \mathrm{i}y$.

Definition 5.3 Für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ heißt

- $\mathrm{Re}(z) := x \in \mathbb{R}$ der *Realteil* von z,
- $\mathrm{Im}(z) := y \in \mathbb{R}$ der *Imaginärteil* von z
- $\bar{z} := x - \mathrm{i}y$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*.
- $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ der *Betrag* von z.

Die Abbildung $z \mapsto \bar{z}$ heißt *komplexe Konjugation*.

Dabei ist mit $\sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$ die eindeutig bestimmte nichtnegative Wurzel gemeint. Damit folgt für $z \neq 0$ die Identität $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
\overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} \;, & \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \;, \\
z + \bar{z} &= 2\mathrm{Re}(z) \;, & z - \bar{z} &= 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z) \;, \\
\bar{\bar{z}} &= z \;, & z \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad z = \bar{z} \;.
\end{aligned}
$$

Satz 5.4 *Für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

i) $|z| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \neq 0$,

ii) $|\bar{z}| = |z|$,

iii) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \;, \qquad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$,

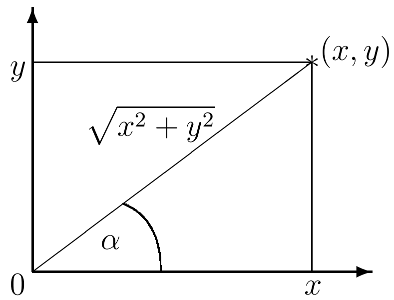
iv) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,

v) $|z+w| \leq |z|+|w|$ *(Dreiecksungleichung).*

Beweis. i),ii),iii) sind klar. Zu (iv) betrachte $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$. Bleibt die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\overset{iii)}{\leq} |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2 . \qquad \square\end{aligned}$$

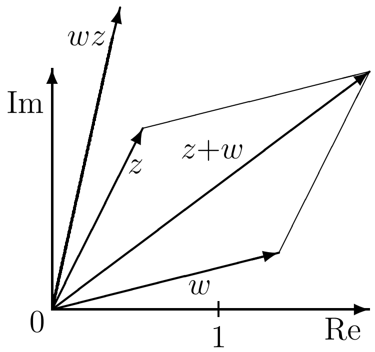
Es ist nun sehr intuitiv, eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ als Punkt (x, y) in einem kartesischen Koordinatensystem in der Ebene (Gaußsche Zahlenebene) darzustellen. Nach Pythagoras ist dann $|z|$ gerade der Abstand dieses Punktes vom Ursprung $0 = (0, 0)$.



Ist $z \neq 0$, dann ergeben sich Real- und Imaginärteil in Polarkoordinaten zu $x = |z|\cos\alpha$ und $y = |z|\sin\alpha$, so daß wir folgende Darstellung einer komplexen Zahl erhalten:

$$z = |z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) , \qquad 0 \leq \alpha < 2\pi .$$

Die Addition $(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$ entspricht geometrisch der Addition von Vektoren:



Die Dreiecksungleichung $|z+w| \leq |z|+|w|$ entspricht der Tatsache, daß in einem Dreieck die Summe zweier Seitenlängen größer ist als die Länge der verbleibenden Seite.

Die Multiplikation schreibt man am besten in Polarkoordinaten: Ist $z = |z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ und $w = |w|(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}zw &= |z||w|\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\big) \\ &= |z||w|\big(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)\big) ,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Additionstheoreme verwendet wurden. Folglich ergibt sich in Polarkoordinaten das Produkt zw durch Multiplikation der Radien und Addition der Winkel von z und w. Alternativ kann man sich überlegen, daß für festes $w \in \mathbb{C}$ die durch $f : z \mapsto zw$ definierte Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wegen $|f(z_1 - z_2)| = |w|\,|z_1 - z_2|$ eine *Ähnlichkeitsabbildung* ist: Alle Längen werden um $|w|$ gestreckt/gestaucht, ansonsten bleiben die Winkel zwischen Vektoren erhalten. Da der Ursprung erhalten bleibt und 1 in w überführt wird, ist die Abbildung $z \mapsto wz$ für $w = |w|(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$ zusammengesetzt aus einer Drehung von z um den Ursprung mit Drehwinkel β und einer anschließenden Skalierung um den Faktor $|w|$.

Über diese geometrische Deutung der Multiplikation findet man die *n-ten Einheitswurzeln*, also komplexe Zahlen mit $z^n = 1$. Nach der Eindeutigkeit der reellen Wurzeln gilt $|z_k| = 1$ für jede Lösung z_k: die Einheitswurzeln liegen auf dem (Einheits-) Kreis mit Radius 1 um den Ursprung. Damit gilt $z_k = \cos\alpha_k + \mathrm{i}\sin\alpha_k$ und nach der Multiplikationsregel $z_k^n = \cos(n\alpha_k) + \mathrm{i}\sin(n\alpha_k)$. Aus $z_k^n = 1$ folgt nun $n\alpha_k = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und die Menge der verschiedenen Lösungswinkel ist somit $\alpha = \{\frac{2\pi k}{n} \,:\, k = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Folglich hat $z^n = 1$ die n Lösungen $z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{n}$ mit $k = 0, 1, \dots, n-1$. Insbesondere hat $z^2 = 1$ die Lösungen $z = \{1, -1\}$, und $z^4 = 1$ hat die Lösungen $z = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$. Die Tatsache, daß $z^n = 1$ genau n Lösungen hat, steht in Verbindung zum

5.5 Fundamentalsatz der Algebra. *Es sei $n > 0$. Jede Gleichung*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit komplexen Koeffizienten besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Lösung.

Nach Polynomdivision hat die Gleichung dann genau n mit Vielfachheit gezählte Lösungen. Der Beweis wird später gegeben, wenn geeignete Methoden erarbeitet sind.

Wir betrachten den Fall $n = 2$ und

$$0 = z^2 + 2az + b = (z+a)^2 - (a^2 - b)\ .$$

Wir suchen Lösungen $w = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ von $w^2 = c$ mit $w = z + a$ und $c = a^2 - b = \alpha + \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$x^2 - y^2 = \alpha\ , \qquad x^2 + y^2 = |c| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\ , \qquad 2xy = \beta\ .$$

Ist $\beta \neq 0$, dann folgt unter Beachtung von $2xy = \beta$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2} + \alpha)}\ , \qquad y = \pm\frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha)}\ ,$$

Ist $\beta = 0$, dann ist $w = \pm\sqrt{\alpha}$ für $\alpha > 0$ und $w = \pm\mathrm{i}\sqrt{-\alpha}$ für $\alpha < 0$.

Teil II
Folgen und Reihen

6 Folgen und Grenzwerte

Unter einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen versteht man eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, d.h. jedem $n \in \mathbb{N}$ wird eine komplexe Zahl $a_n \in \mathbb{C}$ zugeordnet. Analog ist eine Folge reeller Zahlen definiert.

Definition 6.1 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ gibt mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Die Zahl a heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, geschrieben $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*. Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

Wichtig ist, daß das $N \in \mathbb{N}$ in der Definition von ϵ abhängt. Verkleinert man ϵ, dann muß im allgemeinen N vergrößert werden.

Im Fall der Konvergenz ist der Grenzwert einer Folge eindeutig: Angenommen, a, b wären Grenzwerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann gibt es zu jedem $\epsilon = \frac{1}{3}|a - b| > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ und $|a_n - b| < \epsilon$. Nach der Dreicksungleichung gilt aber $|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < 2\epsilon$, im Widerspruch zu $2\epsilon = \frac{2}{3}|a - b|$. Geometrisch bedeutet Definition 6.1, daß alle Folgenglieder a_n mit $n \geq N$ in der Kreisscheibe

$$K_\epsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z - a| < \epsilon\}$$

in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt a und Radius ϵ liegen, bzw. für reelle Folgen im offenen Intervall $I_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \;:\; |x - a| < \epsilon\}$ mit Mittelpunkt a und halber Länge (Radius) ϵ. Die Teilmengen $K_\epsilon(a) \subset \mathbb{C}$ bzw. $I_\epsilon(a) \subset \mathbb{R}$ heißen auch die ϵ-*Umgebungen* von a.

Beispiel 6.2
i) Die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen a.

ii) Die Folge $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Satz 3.11.ii) gegen 0, ist also eine Nullfolge.

iii) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert: Angenommen, $a \in \mathbb{C}$ wäre Grenzwert dieser Folge, dann gäbe es für $\epsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|(-1)^n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Damit wäre nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} 2 &= |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = |(-1)^{n+1} - a + a - (-1)^n| \\ &\leq |(-1)^{n+1} - a| + |a - (-1)^n| < 2 \;, \qquad \text{Widerspruch.} \end{aligned}$$

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen a und gibt es für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $a_n = b_{n+m}$ für alle $n \geq N$, so ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. Damit können in einer konvergenten Folge die Folgenglieder a_n mit $n \leq N$ beliebig abgeändert werden, insbesondere auch weggelassen oder endlich viele Glieder vor a_n eingeschoben werden, ohne Konvergenz und Grenzwert zu ändern.

Satz 6.3 *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = ab$

iii) *Ist $b \neq 0$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$, und* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+N}}{b_{n+N}} = \dfrac{a}{b}$

Beweis. i) Zu gegebenem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ (man wähle die größere der Schranken N beider Folgen). Die Dreiecksungleichung liefert

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \geq N\ .$$

ii) Wähle N derart, daß $|a_n - a| < \min(1, \frac{\epsilon}{2(|b|+1)})$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2(|a|+1)}$ für alle $n \geq N$. Dann ist $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < |a| + 1$ und

$$\begin{aligned}|a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| \\ &= |a_n|\,|b_n - b| + |a_n - a|\,|b| < (|a|+1)\frac{\epsilon}{2(|a|+1)} + \frac{\epsilon}{2(|b|+1)}|b| < \epsilon\ .\end{aligned}$$

iii) Sei $c := \frac{1}{2}|b| > 0$. Wähle N derart, daß $|b_n - b| < \min(c, \frac{\epsilon}{2}|b|^2)$ für alle $n \geq N$. Für diese n gilt dann $|b| = |(b - b_n) + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n|$, also $|b_n| \geq |b| - |b - b_n| > \frac{1}{2}|b| > 0$. Weiter folgt für $n \geq N$

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\Big| = \Big|\frac{b - b_n}{b_n b}\Big| = \frac{|b_n - b|}{|b|\,|b_n|} < \frac{2|b_n - b|}{|b|^2} < \epsilon\ .$$

Somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_{N+n}} = \dfrac{1}{b}$, und mit ii) folgt die Behauptung. □

Satz 6.4 (elementare Grenzwerte) *Im folgenden sei $n \in \mathbb{N}^\times$.*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^s} = 0$ *für alle $s \in \mathbb{Q}_+^\times$. (Dabei ist $n^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{n^p} \in \mathbb{R}$.)*

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *für alle $a \in \mathbb{R}_+^\times$.*

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < 1$.

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{z^n} = 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| > 1$ *und alle* $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. i) Zu gegebenem $\epsilon > 0$ wähle nach dem Archimedischen Axiom $N \in \mathbb{N}$ derart, daß $N > \epsilon^{-\frac{1}{s}}$. Dann gilt für $n \geq N$ zunächst $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$, dann $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{N^p}$ und $\sqrt[q]{\frac{1}{n^p}} \leq \sqrt[q]{\frac{1}{N^p}}$, also $|\frac{1}{n^s}| \leq |\frac{1}{N^s}| < \epsilon$.

ii) Für $a \geq 1$ setze $x_n := \sqrt[n]{a} - 1 > 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung ist $a = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n$, damit $x_n < \frac{a}{n}$ und $0 < |\sqrt[n]{a} - 1| = x_n < \epsilon$ für alle $n \geq N > \frac{a}{\epsilon}$. Für $0 < a < 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = 1$. Die Behauptung folgt dann aus Satz 6.3.iii).

iii) Sei $n \geq 2$. Nach der Binomialentwicklung gilt für $x_n := \sqrt[n]{n} - 1 > 0$

$$n = (1 + x_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} x_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \,,$$

also $n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$ und schließlich $x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$ für $n \geq 2$. Wähle $N > \frac{2}{\epsilon^2}$, so folgt $|\sqrt[n]{n} - 1| = x_n < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

iv) Es gilt $|z^n - 0| = |z|^n$. Die Aussage folgt aus Satz 3.11.ii).

v) Betrachte $n > 2k + 1$ und $|z| = 1 + x$ mit $x > 0$. Dann ergibt die Binomialentwicklung

$$(1 + x)^n > \binom{n}{k+1} x^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} x^{k+1} > n \cdot \Big(\frac{n}{2}\Big)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \,,$$

also $\left|\frac{n^k}{z^n}\right| < \frac{2^k (k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{n}$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \max\big(\frac{2^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{\epsilon}\,,\ 2k+1\big)$, dann folgt $\left|\frac{n^k}{z^n}\right| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. □

Beispiel 6.5 Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{3n^2 + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \dfrac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \dfrac{4}{n^2}} = \frac{2}{3}$$

ii) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^k = (\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}))^k = 1$

Einige weitere Rechenregeln für Grenzwerte:

Satz 6.6 i) *Die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiere gegen* $a \in \mathbb{C}$. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| \,, \quad \lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \bar{a} \,, \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(a) \,, \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n) = \mathrm{Im}(a) \,.$$

Insbesondere sind die Grenzwerte reeller Folgen reell, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) + \mathrm{i} \cdot \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n) \,.$$

ii) *Es gelte* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$*, ferner gebe es ein* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $a_n \leq b_n$ *für alle* $n \geq N$*. Dann gilt* $a \leq b$*.*

iii) *Zu einer Folge* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gebe es konvergente Folgen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und ein* $N \in \mathbb{N}$ *derart, daß* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *für alle* $n \geq N$*. Gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$*, dann konvergiert auch* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$*.*

iv) *Für eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *komplexer Zahlen gebe es ein* $N \in \mathbb{N}$ *und ein* $0 < q < 1$*, so daß für alle* $n \geq N$ *gilt* $a_n \neq 0$ *und* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$*. Dann gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*.*

Beweis. i) Nach Satz 5.4 gilt $|\mathrm{Re}(a_n) - \mathrm{Re}(a)| = |\mathrm{Re}(a_n - a)| \leq |a_n - a|$, damit folgt aus der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Konvergenz von $(\mathrm{Re}(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Analog für $\mathrm{Im}(a_n)$ und $\overline{a_n}$. Für die Beträge folgt die Aussage aus Satz 3.8: $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$. Der zweite Teil ist klar.

ii) Nach Voraussetzung gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß gleichzeitig $a_n \leq b_n$ sowie $|a_n - a| < \epsilon$ und $|b_n - b| < \epsilon$ gilt für alle $n \geq N$. Nach Fallunterscheidung bedeutet das $-\epsilon < a_n - a < \epsilon$ und $-\epsilon < b_n - b < \epsilon$, somit schließlich $a - \epsilon < a_n \leq b_n < b + \epsilon$. Das ergibt $a - b < 2\epsilon$ für alle $\epsilon > 0$, also $a - b \leq 0$.

iii) Wie in ii) gilt $a - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \epsilon$ für alle $n \geq N$, also $|c_n - a| < \epsilon$.

iv) Aus $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$ folgt $|a_{n+1}| \leq q|a_n|$, damit für $n = N + k$ die Relation

$$|a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq q^2|a_{n-2}| \cdots \leq q^k|a_N| = q^n \frac{|a_N|}{q^N} \;.$$

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es nach Satz 3.11.ii) ein $N' \in \mathbb{N}$ mit $q^n < \epsilon \frac{q^N}{|a_N|}$ für alle $n \geq N'$. Damit gilt $|a_n - 0| < \epsilon$ für alle $n \geq \max(N', N)$. □

Beispiel 6.7 i) Für $s \in \mathbb{Q}_+^*$ gilt $1 \leq \sqrt[n]{n^s} \leq \sqrt[n]{n^k}$ für ein $k \geq s$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^s} = 1$.

ii) Für $0 \leq a < b$ gilt $b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2(b^n)} = b\sqrt[n]{2}$, damit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.

Entsprechend der allgemeinen Definition beschränkter Teilmengen heißt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 6.8 *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei a der Grenzwert einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann gibt es zu $\epsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Dann ist $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < |a| + 1$ für alle $n \geq N$, und insgesamt gilt $|a_n| \leq s := \max\big(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_N|, |a| + 1\big)$. □

Die Umkehrung wäre falsch: Aus der Beschränktheit einer Folge folgt nicht die Konvergenz, wie das Beispiel $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeigt.

Definition 6.9 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reeller* Zahlen heißt

i) *monoton wachsend* bzw. *streng monoton wachsend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$ bzw. $a_n < a_{n+1}$;

ii) *monoton fallend* bzw. *streng monoton fallend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \geq a_{n+1}$ bzw. $a_n > a_{n+1}$;

iii) *(streng) monoton*, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Bemerkung: Monotonie kann nicht für Folgen komplexer Zahlen definiert werden.

Satz 6.10 *Jede beschränkte monotone Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert*

i) *gegen* $\sup A$*, falls die Folge monoton wachsend ist,*

ii) *gegen* $\inf A$*, falls die Folge monoton fallend ist,*

wobei $A := \{a_n \;:\; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$*.*

Beweis. i) Sei $s := \sup A$, d.h. die kleinste obere Schranke. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $a_N \in A$ mit $s - \epsilon < a_N$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, gilt $s - \epsilon < a_n \leq s$, d.h. $|a_n - s| < \epsilon$, für alle $n \geq N$. ii) ist analog. □

Satz 6.11 (Eulersche Zahl e) *Für $n \in \mathbb{N}^\times$ sei $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$. Dann gilt: Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent, und für ihren Grenzwert $e := \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ gilt $2 < e \leq 3$.*

Genauer gilt: e ist irrational mit $e = 2,71828\ldots$. Wir werden später sehen, daß e in der Analysis eine wichtige Rolle spielt.

Beweis. Wir zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ ist monoton wachsend und beschränkt. Monotonie folgt aus

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{n}{n-1}\Big(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\Big)^n = \frac{n}{n-1}\Big(\frac{n^2-1}{n^2}\Big)^n = \frac{n}{n-1}\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)^n$$
$$\overset{\text{Bernoulli}}{>} \frac{n}{n-1}\Big(1 - n\frac{1}{n^2}\Big) = 1\;,$$

d.h. $a_n > a_{n-1}$ für alle $n \geq 2$. Weiter gilt nach der binomischen Formel für $n \geq 2$

$$\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$
$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3\;.$$

Dabei wurde für $k \geq 1$ die Ungleichung $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ sowie im letzten Schritt die geometrische Summenformel benutzt. Also ist a_n beschränkt mit $a_n < 3$, und nach Satz 6.10 konvergiert die Folge. Eine untere Schranke ergibt sich z.B. für $n = 2$ zu $(1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} > 2$. $\square$

Oft sind Folgen rekursiv definiert durch einen Startwert a_0 (oder mehrere Startwerte $a_0, a_1, \ldots, a_N$) und eine Rekursionsformel.

Satz 6.12 (Folge zur Berechnung der Quadratwurzeln) *Es sei $a \in \mathbb{R}_+^*$. Für einen beliebigen Startwert $x_0 > 0$ konvergiert die rekursiv definierte Folge*

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

gegen $\sqrt{a} \in \mathbb{R}_+^*$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Beweis. Nach Induktion ist $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt

$$x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big)^2 - a = \frac{1}{4}\Big(x_n - \frac{a}{x_n}\Big)^2 \geq 0 \;,$$

d.h. $x_n \geq \sqrt{a}$ für alle $n \geq 1$. Damit ergibt sich, daß die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend ist:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - a) > 0 \qquad n \geq 1 \;.$$

Nach Satz 6.10 konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert $x \geq \sqrt{a}$. Für diesen Grenzwert gilt die Gleichung $x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$, mit der positiven Lösung $x = \sqrt{a}$. $\square$

Das Rekursionsverfahren hat mehrere interessante Eigenschaften: 1) Es ist stabil, also unabhängig vom Startwert. 2) Man kann zeigen, daß die Folge sehr schnell (quadratisch) gegen den Grenzwert konvergiert, so daß schon wenige Folgenglieder eine brauchbare Näherung liefern.

Allgemeiner gilt (Beweis ist analog):

Satz 6.13 (Folge zur Berechnung der k-ten Wurzeln) *Es sei $a \in \mathbb{R}_+^*$. Für einen beliebigen Startwert $x_0 > 0$ konvergiert die rekursiv definierte Reihe*

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\Big((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\Big) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

gegen $\sqrt[k]{a} \in \mathbb{R}_+^*$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[k]{a}$.

7 Der Satz von Bolzano-Weierstraß. Cauchy-Folgen

Definition 7.1 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Direkt aus der Definition folgt, daß jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist gegen den gleichen Grenzwert, d.h. für konvergente Folgen gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$.

Definition 7.2 Eine Zahl $h \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen h konvergiert.

Satz 7.3 *Eine Zahl $h \in \mathbb{C}$ ist genau dann Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{nh\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $\epsilon > 0$ gilt: Die Menge $\{n \in \mathbb{N} \;:\; |h - a_n| < \epsilon\}$ ist unendlich.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Es gebe eine gegen h konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Also gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - h| < \epsilon$ für alle $k \geq N$. Die Menge $\{n_k \in \mathbb{N} \;:\; k \geq N\}$ ist unendlich.

($\Leftarrow$) Jede ϵ-Umgebung von h enthalte unendlich viele Folgenglieder. Wir konstruieren induktiv eine Abbildung $k \to n_k$ mit $n_{k+1} > n_k$ und $|a_{n_k} - h| < \frac{1}{k+1}$, also eine gegen h konvergente Teilfolge.
i) Induktionsanfang: Wegen $\{n \in \mathbb{N} \;:\; |a_n - h| < 1\} \neq \varnothing$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_0} - h| < 1$.
ii) Induktionsschritt $k \to k+1$: Sei a_{n_k} gewählt mit $|a_{n_k} - h| < \frac{1}{k+1}$. Nach Voraussetzung ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} \;:\; |a_n - h| < \frac{1}{k+2}$ unendlich, insbesondere enthält sie eine Zahl $m > n_k$. Setze $n_{k+1} := m$. □

Beispiel 7.4

i) Die alternierende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$ besitzt die beiden Häufungspunkte 1 und -1, denn $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1 und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen -1.

ii) Die durch $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ gegebenen Folge hat ebenfalls 1 und -1 als Häufungspunkte, denn $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \dfrac{1}{n+1}) = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(-1 + \dfrac{1}{n+1}) = -1$.

iii) Die durch $a_n = n$ definierte Folge hat keine Häufungspunkte: jede Teilfolge enthält unendlich viele Elemente, die paarweise einen Abstand ≥ 1 haben.

iv) Eine konvergente Folge hat ihren Grenzwert als einzigen Häufungspunkt, da jede Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert konvergiert.

Satz 7.5 (Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Wir zeigen den Satz zunächst für Folgen reeller Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$. Wegen der Beschränktheit der Folge gibt es reelle Zahlen $c < d$ mit $a_n \in [c, d]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren induktiv eine Intervallschachtelung $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so daß

$I_k = [c_k, d_k]$ unendlich viele Folgenglieder a_n enthält, sowie eine zugehörige Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $n_{k+1} > n_k$ und $a_{n_k} \in I_k$.
i) Induktionsanfang: Wähle $I_0 = [c_0, d_0]$ mit $c_0 := c$ und $d_0 = d$ sowie ein $a_{n_0} \in I_0$.
ii) Induktionsschritt $k \to k+1$. Sei $I_k = [c_k, d_k]$ bereits konstruiert und $m_k := \frac{1}{2}(c_k + d_k)$ der Mittelpunkt. Da I_k unendlich viele Folgenglieder enthält, können nicht beide Teilintervalle $[c_k, m_k]$ und $[m_k, d_k]$ nur endlich viele Folgenglieder enthalten. Setze $I_{k+1} := [c_{k+1}, d_{k+1}]$ mit $c_{k+1} := c_k$ und $d_{k+1} := m_k$, falls $[c_k, m_k]$ unendlich viele Folgenglieder enthält, ansonsten $I_{k+1} := [c_{k+1}, d_{k+1}]$ mit $c_{k+1} := m_k$ und $d_{k+1} := d_k$. Offenbar gilt $I_{k+1} \subset I_k$ und $|I_{k+1}| = \frac{1}{2}|I_k| = \frac{1}{2^{k+1}}|I_0|$. Da die Menge $\{n \in \mathbb{N} \,:\, a_n \in I_{k+1}\}$ unendlich ist, enthält sie ein Element $m > n_k$. Setze $n_{k+1} := m$, d.h. es gilt $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ und $n_{k+1} > n_k$.

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $h \in \mathbb{R}$ mit $h \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $I_k \subset [h-\epsilon, h+\epsilon]$ für alle $k \geq N$, d.h. $|a_{n_k} - h| \leq \epsilon < 2\epsilon$ für alle $k \geq N$. Das bedeutet $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = h$, und der Satz von Bolzano-Weierstraß ist im reellen Fall bewiesen.

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen, dann bildet $(\mathrm{Re}(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folgen reeller Zahlen. Nach obigem Beweis gibt es eine konvergente Teilfolge $(\mathrm{Re}(a_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \mathrm{Re}(a_{n_k}) = h_1$. Die Folge der Imaginärteile $(\mathrm{Im}(a_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls eine beschränkte Folge reeller Zahlen und enthält somit eine konvergente Teilfolge $(\mathrm{Im}(a_{(n_k)_l}))_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{l\to\infty} \mathrm{Im}(a_{(n_k)_l}) = h_2$. Dann gilt auch $\lim_{l\to\infty} \mathrm{Re}(a_{(n_k)_l}) = h_1$ als Teilfolge einer konvergenten Folge. Insgesamt ist eine konvergente komplexe Teilfolge $(a_{(n_k)_l})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruiert mit $\lim\limits_{l\to\infty} a_{(n_k)_l} = h_1 + \mathrm{i}h_2$. $\square$

Nach Definition 7.2 kann man den Satz von Bolzano-Weierstraß auch so formulieren, daß jede beschränkte Folge komplexer Zahlen mindestens einen Häufungspunkt besitzt.

Definition 7.6 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge *reeller* Zahlen.

- Der größte Häufungspunkt a^* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *limes superior*, geschrieben $a^* = \limsup a_n$.
- Der kleinste Häufungspunkt a_* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *limes inferior*, geschrieben $a_* = \liminf a_n$.

Für konvergente Folgen gilt $a_* = a^* = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Der Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß nutzt ganz entscheidend das Intervallschachtelungsprinzip. Unter Verwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß beweisen wir nun das Cauchysche Konvergenzkriterium, das es auch ohne Kenntnis des Grenzwertes erlaubt, die Konvergenz von Folgen zu entscheiden.

Satz 7.7 (Cauchysches Konvergenzkriterium) *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn es zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so daß* $|a_n - a_m| < \epsilon$ *gilt für alle* $n, m \geq N$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei konvergent mit Grenzwert a. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|a_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N$. Die Dreiecksungleichung liefert $|a_n - a_m| = |a_n - a + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \epsilon$.

($\Leftarrow$) Es gelte $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$. Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, denn zu $\epsilon = 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_N| < 1$ für alle $n \geq N$; somit gilt $|a_n| \leq \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_N|, |a_N| + 1)$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a := \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Wir zeigen, daß auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert: Zu beliebigem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$, so daß gleichzeitig gilt $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $m, n \geq N'$ und $|a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für ein $n_k \geq N'$. Die Dreiecksungleichung liefert $|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + (a_{n_k} - a)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon$. □

Definition 7.8 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt *Cauchy-Folge* (oder *Fundamentalfolge*), wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Nach Satz 7.7 sind in $\mathbb{C}$ genau die Cauchy-Folgen die konvergenten Folgen. Der Beweis benutzt Bolzano-Weierstraß, wobei der entscheidende Teil für *reelle Folgen* bewiesen wird, wo das Intervallschachtelungsprinzip zur Verfügung steht. Damit wird das Cauchysche Konvergenzkriterium letztendlich auf die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zurückgeführt. Bemerkenswert ist, daß auch die Umkehrung gilt:

Satz 7.9 *Für einen archimedisch angeordneten Körper folgt das Intervallschachtelungsprinzip aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium.*

Beweis. Es sei $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_N - b_N| < \epsilon$. Wegen $a_n < b_N$ für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $m, n \geq N$, d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. Sei $s := \lim_{n\to\infty} a_n$ der Grenzwert. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, gilt $a_n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $a_k < b_n$ und Satz 6.6 für die konstante Folge $(b_n)_k = b_n$ folgt $s \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $s \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Wir werden sehen, daß sich Folgen in sehr viel allgemeineren Räumen als $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ betrachten lassen. In diesen Fällen ist die Intervallschachtelung nicht mehr sinnvoll, während die Definition der Vollständigkeit über die Konvergenz von Cauchy-Folgen im wesentlichen die gleiche bleibt, solange ein *Abstand* erklärt ist.

8 Reihen

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, so werden durch

$$s_0 := a_0 \ , \quad s_1 := a_0 + a_1 \ , \quad \dots \ , \quad s_m := \sum_{k=0}^{m} a_k$$

die sogenannten *Partialsummen* definiert. Diese bilden dann die *Folge der Partialsummen* $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$, die wieder auf Konvergenz untersucht werden kann. Eine solche Folge der Partialsummen heißt *(unendliche) Reihe*, und für diese schreibt man $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Das Symbol hat eine doppelte Bedeutung: Zum einen ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gleichbedeutend mit der Folge der Partialsummen $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $s_m := \sum_{k=0}^{m} a_k$. Konvergiert diese Folge, dann meint man mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ auch den eindeutig bestimmten Grenzwert der Folge der Partialsummen. Über das Cauchysche Konvergenzkriterium für Folgen erhalten wir:

Satz 8.1 (Cauchy-Kriterium für Reihen) *Eine Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so daß* $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon$ *für alle* $m \geq n > N$*.*

Beweis. Klar wegen $|s_m - s_{n-1}| = \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right|$. □

Daraus ergibt sich, daß aus der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ auch die Konvergenz von $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ folgt, und umgekehrt (wenn alle a_n definiert sind).

Satz 8.2 *Die geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *konvergiert für* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $0 < |z| < 1$*, und in diesem Fall gilt* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$.

Beweis. Nach Satz: 2.3 (analog zu beweisen für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$) sind für $z \notin \{0,1\}$ die Partialsummen gegeben durch

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} ,$$

und nach Satz 6.4.iv) ist die Folge $\left(\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ für $|z| < 1$ konvergent mit dem angegebenen Grenzwert. □

Beispiel 8.3 (periodische Dezimalbrüche) Für $q = 0.\overline{162} := 162 \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-3n}$ gilt $q = \frac{162}{1000} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-3n} = \frac{162}{1000} \cdot \frac{1}{1-10^{-3}} = \frac{162}{999} = \frac{18}{111} = \frac{6}{37}$.

Satz 8.4 *Die harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *ist divergent.*

Beweis. Wir zeigen, daß die Folge der Partialsummen keine Cauchy-Folge ist. Für beliebige $N \in \mathbb{N}^{\times}$ gilt

$$s_{2N} - s_N = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{1}{2} .$$

Wäre $(s_n)_{n \geq 1}$ eine Cauchy-Folge, so gäbe es zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|s_n - s_m| < \frac{1}{2}$ für alle $n, m \geq N$, Widerspruch. □

Es ist im allgemeinen leichter, die Konvergenz einer Reihe zu beweisen, als den Grenzwert konkret anzugeben. Für den Konvergenzbeweis stehen mehrere Kriterien zur Verfügung.

Lemma 8.5 *Sind* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergent, so gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \textit{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (z a_n) = z \sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad (z \in \mathbb{C}) .$$

Beweis. Folgt aus Satz 6.3. □

Lemma 8.6 *Ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergent, so bildet* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

Beweis. Es sei s der Grenzwert der Reihe. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n > N$. Aus $a_n = s_n - s_{n-1}$ folgt $|a_n - 0| = |s_n - s_{n-1}| = |s_n - s + (s - s_{n-1})| \leq |s_n - s| + |s_{n-1} - s| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. □

Das ist nützlich in negierter Form: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, so kann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht konvergent sein. Daraus ergibt sich, daß für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ nicht konvergieren kann, da $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann keine Nullfolge ist.

Die Umkehrung von Lemma 8.6 wäre falsch: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge, so kann zunächst nichts über die Konvergenz gesagt werden, wie das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt.

Lemma 8.7 *Eine Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *mit positiven reellen Gliedern* $a_n \geq 0$ *konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.*

Beweis. Für $a_n \geq 0$ ist die Folge der Partialsummen monoton. □

Beispiel 8.8 *Die folgende Reihe ist konvergent:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Beweis. Wegen $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ (Partialbruchzerlegung) gilt

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)} = 1 - \frac{1}{m+1}\ .$$

Die Folge $(1 - \frac{1}{n+1})_{n\geq 1}$ ist konvergent mit dem angegebenen Grenzwert.

Satz 8.9 *Für* $s \in \mathbb{Q}_+^\times$ *ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \begin{cases} \textit{konvergent} & \textit{für } s > 1 \\ \textit{divergent} & \textit{für } s \leq 1 \end{cases}$$

Beweis. Für $s \leq 1$ gilt für die Partialsummen

$$s_n = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\ ,$$

und für die (divergente) harmonische Reihe ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt.

Für $s > 1$ betrachten wir die Teilfolge s_{2^k-1} der Partialsummen. Durch Zusammenfassen der Summanden $a_{2^j}, \ldots a_{2^{j+1}-1}$ entsteht

$$\begin{aligned} s_{2^k-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{7^s}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^s} + \cdots + \frac{1}{(2^k-1)^s}\right) \\ &\leq 1 + 2\cdot\frac{1}{2^s} + 4\cdot\frac{1}{4^s} + \cdots + 2^{k-1}\cdot\frac{1}{(2^{k-1})^s} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2^j}{(2^j)^s} = \sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^j = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(s-1)k}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{s-1}} < \frac{2^{s-1}}{2^{s-1}-1}\ . \end{aligned}$$

Damit ist die Teilfolge $(s_{2^k-1})_{k\geq 1}$ beschränkt. Da jedes $n \in \mathbb{N}$ durch ein $2^k-1 \geq n$ abgeschätzt werden kann und die Folge der Partialsummen monoton ist, ist auch $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst beschränkt und damit konvergent. □

Die Reihe $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ heißt *Riemannsche Zeta-Funktion*, wobei zunächst $z \in \mathbb{Q}$ mit $z > 1$ ist. Später wird sich zeigen, daß die Reihe auch für gewisse $z \in \mathbb{C}$ sinnvoll ist. Über die Grenzwerte können wir zunächst nicht viel sagen. Später werden wir z.B. $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ zeigen.

Satz 8.10 (Konvergenzkriterium von Leibniz) *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge (insbesondere $a_n \in \mathbb{R}_+$). Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent, und für den Grenzwert s gilt $\left|s - \sum_{j=0}^{n}(-1)^j a_j\right| \leq a_{n+1}$.*

Solche Reihen heißen *alternierend*.

Beweis. Für die geraden Partialsummen gilt $s_{2k+2} - s_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k+1} < 0$, d.h. die Teilfolge $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend. Für die ungeraden Partialsummen gilt $s_{2k+3} - s_{2k+1} = -a_{2k+3} + a_{2k+2} > 0$, d.h. die Teilfolge $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Weiter gilt $s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} < 0$, d.h. $s_{2k} \geq s_{2k+1} \geq s_1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da also $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt ist, konvergiert die gerade Teilfolge gegen einen Grenzwert s_g, und analog konvergiert $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert $s_u \leq s_g$. Nach Satz 6.3 gilt $s_g - s_u = \lim_{k\to\infty}(s_{2k} - s_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$. Damit konvergiert die gesamte Folge der Partialsummen gegen den gemeinsamen Grenzwert $s = s_g = s_u$.

Die Fehlerabschätzung ergibt sich daraus, daß s zwischen s_k und s_{k+1} liegt und $|s_k - s_{k+1}| = a_{k+1}$. □

Beispiel 8.11 Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$ ist konvergent. Der Grenzwert liegt zwischen $s_1 = \frac{1}{2}$ und $s_0 = 1$. Mit später bereitgestellten Methoden kann man $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} = \ln 2$ zeigen.

Die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$ ist konvergent. Der Grenzwert liegt zwischen $s_1 = \frac{1}{3}$ und $s_0 = 1$. Mit später bereitgestellten Methoden kann man $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ zeigen.

9 Absolute Konvergenz von Reihen

Definition 9.1 Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Satz 9.2 (Majorantenkriterium) *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen und $p \in \mathbb{N}$ derart, daß $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \geq p$.*

i) *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ konvergent, so konvergieren auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, und es gilt*

$$\Big|\sum_{n=p}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=p}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=p}^{\infty} |b_n| \,.$$

Insbesondere ist jede absolut konvergente Reihe auch konvergent.

ii) *Ist $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ divergent, so ist auch $\sum_{n=p}^{\infty} |b_n|$ divergent.*

Das Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe zeigt, daß aus Konvergenz nicht absolute Konvergenz folgt.

Beweis. ii) folgt aus i) durch Negation.

i) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq p$, so daß $\sum_{k=n}^{m} |b_k| < \epsilon$ für alle $m \geq n > N$. Nach der Dreiecksungleichung gilt für die *endliche Summe*

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} a_k\Big| = |a_n + \cdots + a_m| \leq |a_n| + \cdots + |a_m| = \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} |b_k| < \epsilon \,,$$

so daß $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=p}^{\infty} |a_n|$ nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium konvergent sind. Aus Satz 6.6.i) folgt schließlich

$$\Big|\sum_{n=p}^{\infty} a_n\Big| = \Big|\lim_{m\to\infty} \sum_{n=p}^{m} a_n\Big| = \lim_{m\to\infty} \Big|\sum_{n=p}^{m} a_n\Big| \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=p}^{m} |a_n| \begin{cases} = \sum_{n=p}^{\infty} |a_n| \\ \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=p}^{m} |b_n| = \sum_{n=p}^{\infty} |b_n| \end{cases}$$

□

Beispiel 9.3 i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ist konvergent, da für $n > 2$ gilt:

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{2}{n^2}, \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \text{ ist (absolut) konvergent.}$$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ist divergent, da $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{n+1}$, und die harmonische Reihe ist divergent.

Satz 9.4 (Quotientenkriterium) *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine Reihe mit* $a_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*, und es gebe ein* $N \in \mathbb{N}$ *und ein* $0 < q < 1$*, so daß* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ *für alle* $n \geq N$*. Dann konvergiert die Reihe absolut.*

Beweis. Für $n \geq N$ gilt dann $|a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq \ldots (q)^{n-N}|a_N|$, so daß die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ durch die konvergente Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} q^n \frac{|a_N|}{q^N} = \frac{|a_N|}{1-q}$ majorisiert wird. □

Die Eigenschaft $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für ein $0 < q < 1$ ist automatisch erfüllt, wenn die Folge $(|\frac{a_{n+1}}{a_n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $\alpha < 1$ konvergiert: Nach Definition des Grenzwertes gibt es dann zu $\alpha < q < 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \alpha + \alpha\right| \leq \alpha + \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \alpha\right| \leq q$ für alle $n \geq N$. Gilt $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q > 1$, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, und die Reihe divergiert.

Wichtig ist, daß das q im Quotientenkriterium unabhängig von n sein muß. Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ mit $s \in \mathbb{Q}_+^*$ ist zwar $\left|(\frac{n}{n+1})^s\right| < 1$ für alle $n \geq 1$, aber zu jedem $q < 1$ findet man ein $N \in \mathbb{N}$ mit $q < \left|(\frac{n}{n+1})^s\right| < 1$ für alle $n \geq N$. Über die Konvergenz kann das Quotientenkriterium in diesem Fall keine Aussage machen. Die Reihe ist für $s > 1$ absolut konvergent und für $s \leq 1$ divergent.

Die Konvergenz der geometrischen Reihe kann nicht mit dem Quotientenkriterium begründet werden!

Beispiel 9.5 (komplexe Binomialreihen) Über $\binom{\alpha}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha - j + 1}{j}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ lassen sich komplexe Binomialkoeffizienten definieren. Wir betrachten für $z \in \mathbb{C}$ die zugehörige *binomische Reihe*

$$B_\alpha(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n ,$$

die für $\alpha \in \mathbb{N}$ bei $k = \alpha$ abbricht und in die binomische Formel übergeht. Das Quotientenkriterium liefert $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha - n}{n+1}\cdot z\right| = |z|$, so daß die binomische Reihe für $|z| < 1$ absolut konvergent ist und für $|z| > 1$ divergiert.

Satz 9.6 (Wurzelkriterium) *Für eine Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *existiere ein* $N \in \mathbb{N}$ *und ein* $0 < q < 1$, *so daß* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ *für alle* $n \geq N$. *Dann konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut.*

Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, und die Reihe ist divergent.

Beweis. Die Reihe $\sum\limits_{n=N}^{\infty} |a_n|$ besitzt die konvergente Majorante $\sum\limits_{n=N}^{\infty} q^n$. $\square$

Die Eigenschaft $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für ein $0 < q < 1$ ist automatisch erfüllt, wenn $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, insbesondere wenn $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\alpha < 1$ konvergiert.

Beispiel 9.7 Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist absolut konvergent: Wir betrachten $\sqrt[n]{|n^k z^n|} = \sqrt[n]{n^k}|z|$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\sqrt[n]{n^k} < \frac{2}{1+|z|}$. Damit kann im Wurzelkriterium $q = \frac{2|z|}{1+|z|} < 1$ gewählt werden.

Es sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann nennt man die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ eine *Umordnung* der Reihe. Im Gegensatz zu endlichen Summen gilt das Kommutativgesetz "$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$" nicht immer. Wir zeigen, daß es bei absolut konvergenten Reihen gilt und zumindest für die alternierende harmonische Reihe nicht gilt.

Satz 9.8 (Umordnungssatz) *Es sei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine absolut konvergente Reihe. Dann ist auch jede Umordnung dieser Reihe absolut konvergent mit dem gleichen Grenzwert.*

Beweis. Es sei $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es wegen der absoluten Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt

$$\Big| s - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \Big| = \Big| \sum_{n=N}^{\infty} a_n \Big| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2} .$$

Sei nun ein $N' \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $\{0, 1, \dots, N-1\} \subset \{\tau(0), \tau(1), \dots, \tau(N')\}$, d.h. $N' \geq \max(\tau^{-1}(0), \dots \tau^{-1}(N-1)\}$. Dann gilt für alle $m \geq N'$ nach der Dreiecksungleichung

$$\Big| \sum_{n=0}^{m} a_{\tau(n)} - s \Big| \leq \Big| \sum_{n=0}^{m} a_{\tau(n)} - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \Big| + \Big| \sum_{n=0}^{N-1} a_n - s \Big| < \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon ,$$

denn in $\sum_{n=0}^{m} a_{\tau(n)} - \sum_{n=0}^{N-1} a_n$ heben sich $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$ gegeneinander weg und die Summe über die verbleibenden Terme ist wie angegeben beschränkt. Damit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ gegen den gleichen Grenzwert s. Die absolute Konvergenz folgt durch Wiederholung des Beweises für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\tau(n)}|$. □

Wir zeigen nun am Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe, die konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, daß der Umordnungssatz in diesem Fall nicht gilt. Wir betrachten folgende Umordnung:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\tau(n)+1}}{\tau(n)} &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \Big(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{6}\Big) + \Big(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15} - \tfrac{1}{8}\Big) + \dots \\ &\quad + \Big(\tfrac{1}{2^n+1} + \tfrac{1}{2^n+3} + \dots + \tfrac{1}{2^{n+1}-1} - \tfrac{1}{2n+2}\Big) + \dots\end{aligned}$$

In dieser Umordnung kommen alle negativ zu zählenden Glieder $\frac{1}{2n+2}$ vor, aber immer mehr verzögert gegenüber den positiven Gliedern. Nun gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}\Big(\tfrac{1}{2^n+1} + \tfrac{1}{2^n+3} + \dots + \tfrac{1}{2^{n+1}-1} - \tfrac{1}{2n+2}\Big) > 2^{n-1} \tfrac{1}{2^{n+1}} - \tfrac{1}{2n+2} &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2n+2} \\ &\geq \tfrac{1}{12} \quad \text{für } n \geq 2 .\end{aligned}$$

Wie schon im Divergenzbeweis der harmonischen Reihe ist damit für $\epsilon = \frac{1}{12}$ das Cauchysche Konvergenzkriterium verletzt, so daß die umgeordnete Reihe divergiert. Man kann übrigens für die alternierende harmonische Reihe zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung derart finden, daß die umgeordnete Reihe gegen x konvergiert.

10 Polynome

Ein Polynom in x mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ ist ein formaler Ausdruck der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ , \qquad a_i \in \mathbb{C} \ .$$

Die Menge aller solcher Polynomome wird mit $\mathbb{C}[x]$ bezeichnet, bzw. mit $\mathbb{R}[x]$ wenn $a_i \in \mathbb{R}$. Die Unbestimmte x werden wir zunächst als $x \in \mathbb{C}$ oder $x \in \mathbb{R}$ auffassen; später werden Verallgemeinerungen wichtig. Es gibt eine offensichtliche Addition

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\Big) + \Big(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\Big) := \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i \ ,$$

wobei $a_i = 0$ für $i > n$ und $b_i = 0$ für $i > m$ gesetzt wird. Das Nullpolynom $f(x) = 0$ (alle a_i verschwinden) ist das neutrale Element. Außerdem erhält man durch Ausmultiplizieren und Ordnen nach Potenzen von x eine Multiplikation

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\Big) \cdot \Big(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\Big) := \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k \ , \qquad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j \ .$$

(Es wird wieder $a_i = 0$ für $i > n$ und $b_j = 0$ für $j > m$ gesetzt.) Die auftretenden Summanden ergeben sich aus den Diagonalen im folgenden Schema (mit $k = \max(m,n)$):

$$\begin{array}{ccccc}
a_k b_0 & a_k b_1 & & \ldots & a_k b_k \\
\vdots & & & & \vdots \\
a_2 b_0 & & & \ldots & a_2 b_k \\
a_1 b_0 & a_1 b_1 & & \ldots & a_1 b_k \\
a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \ldots & a_0 b_k
\end{array}$$

Der maximale Exponent von x, für den der Koeffizient in $f(x)$ ungleich Null ist, heißt der *Grad des Polynoms* und wird mit $\deg(f)$ bezeichnet. Genauer ist für $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$$\deg(f) = \begin{cases} -\infty & \text{für } f = 0 \\ \max\{i \in \mathbb{N} \ : \ a_i \neq 0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Konstante, aber nichtverschwindende, Polynome haben den Grad 0. Es gilt

$$\deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g)) \ , \qquad \deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$$

(mit $(-\infty) + n = -\infty$ und $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$).

Satz 10.1 (Division mit Rest) *Sind $f, g \in \mathbb{C}[x]$ und ist $g \neq 0$, dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in \mathbb{C}[x]$ mit*

$$f = q \cdot g + r \;, \qquad \deg(r) < \deg(g) \;.$$

Beweis. i) Wir beweisen zunächst die Eindeutigkeit. Sei $f = q \cdot g + r = q' \cdot g + r'$ mit $\deg(r) < \deg(g)$ und $\deg(r') < \deg(g)$, dann folgt

$$(q - q') \cdot g = r' - r \;.$$

Wäre $q \neq q'$, dann ist der Grad der linken Seite $\deg((q-q') \cdot g) > \deg(g)$, während der Grad der rechten Seite $\deg(r' - r) < \deg(g)$ ist, Widerspruch. Also ist $q = q'$ und dann $r = r'$.

ii) Existenz der Polynome durch explizite Konstruktion mittels "Division mit Rest". Sei $f = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ und $g = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, mit $a_n, b_m \neq 0$. Für $n < m$ ist $q = 0$ und $r = f$. Sei also $n \geq m$. Wir setzen

$$q_{(1)} := \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \;, \qquad f_{(1)} := f - q_{(1)} \cdot g \;.$$

Da der höchste Koeffizient von f durch Subtraktion entfernt wurde, gilt $\deg(f_{(1)}) < \deg(f)$. Auf diese Weise konstruiert man eine Folge von Monomen $q_{(k)} = c_k x^{i(k)}$, so daß für $f_{(k)} := f_{(k-1)} - q_{(k)} \cdot g$ gilt $\deg(f_{(k)}) < \deg(f_{(k-1)})$. Das Verfahren bricht im l-ten Schritt ab, wenn $\deg(f_{(l)}) < \deg(g)$. Dann ist $r := f_{(l)}$ und $q := q_{(1)} + \cdots + q_{(l)}$. □

Beispiel 10.2 Es sei $f = x^3$ und $g = 2x^2 + x$, also $a_3 = 1$ und $b_2 = 2$. Dann ist $q_{(1)} = \frac{a_3}{b_3} x^{3-2} = \frac{1}{2} x$ und $f_{(1)} = f - \frac{1}{2} x \cdot (2x^2 + x) = -\frac{1}{2} x^2$. Im nächsten Schritt ist $q_{(2)} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} x^0 = -\frac{1}{4}$ und $f_{(2)} = f_{(1)} + \frac{1}{4} \cdot (2x^2 + x) = \frac{1}{4} x$. Hier bricht das Verfahren ab. Somit gilt $x^3 = (\frac{1}{2} x - \frac{1}{4})(2x^2 + x) + \frac{1}{4} x$.

Ist $r = 0$ in Satz 10.1, so heißt g ein *Teiler* von f.

Definition 10.3 Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ heißt *Nullstelle* eines Polynoms $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, wenn $f(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_n \alpha^i = 0$.

Satz 10.4 *Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ ist genau dann* Nullstelle *eines Polynoms $f \in \mathbb{C}[x]$, wenn $x - \alpha$ Teiler von f ist.*

Beweis. Für $\deg(f) = 0$ hat f keine Nullstellen, für $\deg(f) = -\infty$ ist $f = 0$ und $x - \alpha$ ein Teiler für beliebige $\alpha \in \mathbb{C}$. Verbleibt $\deg(f) \geq 1$. Die Division mit Rest liefert eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in \mathbb{C}[x]$ mit $f = q \cdot (x - \alpha) + r$ und $\deg(q) = \deg(f) - 1$, $\deg(r) < \deg(x - \alpha) = 1$, also $r \in \mathbb{C}$. Dann ist $f(\alpha) = r$. □

Hat auch q eine Nullstelle α_2, so läßt sich ein weiterer Linearfaktor $x - \alpha_2$ abspalten, usw. Aus der Abbruchbedingung der Division mit Rest folgt, daß ein Polynom vom Grad $n \geq 0$ höchstens n Nullstellen haben kann.

Satz 10.5 (Identitätssatz für Polynome) *Stimmen die Werte der Polynome* $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *und* $f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ *an* $n+1$ *verschiedenen Stellen überein, dann gilt* $a_i = b_i$ *für alle* $i = 0, \ldots, n$ *und somit* $f(x) = g(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{C}$.

Beweis. Das Polynom $f - g$ hat $n + 1$ verschiedene Nullstellen und einen Grad $\leq n$. Damit ist $f - g$ das Nullpolynom. □

Der Identitätssatz liefert die sehr wichtige Methode des

10.6 Koeffizientenvergleich. *Gibt es für ein Polynom zwei Darstellungen, so sind die entsprechenden Koeffizienten einander gleich.*

Satz 10.7 (Additionstheorem der Binomialkoeffizienten) *Für alle* $s, t \in \mathbb{C}$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}.$$

Beweis. i) Sei zunächst $s, t \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(1+x)^{s+t} = \sum_{n=0}^{s+t} \binom{s+t}{n} x^n$$

$$(1+x)^s \cdot (1+x)^t = \Big(\sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} x^k\Big)\Big(\sum_{l=0}^{t} \binom{t}{l} x^l\Big) = \sum_{n=0}^{s+t} \Big(\sum_{k+l=n} \binom{s}{k}\binom{t}{l}\Big) x^n$$

Die Behauptung folgt aus $\sum_{k+l=n} \binom{s}{k}\binom{t}{l} = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k}\binom{t}{n-k}$ und Koeffizientenvergleich.

ii) Sei $s \in \mathbb{C}$ und $t \in \mathbb{N}$. Interpretieren wir beide Seiten des Additionstheorems als Polynome in s, dann stimmen diese nach i) in unendlich vielen Stellen überein, nach dem Identitätssatz dann für alle $s \in \mathbb{C}$.

iii) Für $s, t \in \mathbb{C}$ werden schließlich beide Seiten bei festem s als Polynome in t aufgefaßt, die nach ii) an unendlich vielen Stellen übereinstimmen, damit überall.
□

11 Potenzreihen

Potenzreihen sind Verallgemeinerungen von Polynomen auf unendliche Summen, also Reihen, $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und einer Unbestimmten

$z \in \mathbb{C}$. Beispiele sind die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ und die binomische Reihe $B_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$. Später werden auch die in einen anderen Ursprung $z_0 \in \mathbb{C}$ verschobenen Potenzreihen $P(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ betrachtet. Im allgemeinen werden diese Reihen nicht für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergieren.

Satz 11.1 *Konvergiert eine Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, dann konvergiert sie absolut in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$.*

Beweis. Die Folge $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist als Nullfolge insbesondere beschränkt, d.h. es gilt $|a_n z_0^n| \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $|a_n z^n| = q^n |a_n z_0^n| \leq q^n S$ mit $q := |\frac{z}{z_0}| < 1$. Damit besitzt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die konvergente Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} q^n S$, so daß die Reihe für $|z| < |z_0|$ absolut konvergent ist. □

Dieser Satz liefert für jede Potenzreihe $P(z)$ die Existenz eines *Konvergenzkreises* mit Radius

$$R(P) := \sup\{r \in \mathbb{R} \ : \quad P(r) \text{ konvergiert } \} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \,.$$

Man nennt $R(P)$ den *Konvergenzradius* von P.

Satz 11.2 *Die Potenzreihe P ist für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R(P)$ absolut konvergent und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R(P)$ divergent.*

Beweis. i) Für $|z| < R(P)$ gibt es ein $r \in \mathbb{R}$ mit $|z| < r < R(P)$, so daß $P(r)$ konvergent ist. Dann ist $P(z)$ absolut konvergent nach Satz 11.1.

ii) Sei $|z| > R(P)$. Wäre $P(z)$ konvergent, so wäre nach Satz 11.1 $P(r)$ (sogar absolut) konvergent für alle $R(P) < r < |z|$, im Widerspruch zur Supremumseigenschaft von $R(P)$. □

Der Konvergenzradius einer Potenzreihe $P(z)$ kann unendlich sein; in diesem Fall ist $P(z)$ absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$. Der Konvergenzradius $R(P)$ ist 0, wenn $P(z)$ nur für $z = 0$ konvergiert. Die Bestimmung des Konvergenzradius von $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ kann über das Wurzelkriterium oder das Quotientenkriterium versucht werden:

i) $R(P) = \frac{1}{L}$, wenn $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ ist (Cauchy-Hadamard),

ii) $R(P) = \frac{1}{q}$, wenn $\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\}_{n\geq 1}$ gegen q konvergiert (Euler).

Über Konvergenz von $P(z)$ auf dem Rand des Konvergenzkreises, d.h. für $|z| = R(P)$, kann keine Aussage gemacht werden.

Beispiel 11.3 Für $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist nach Satz 8.2 $R(P) = 1$.

Für $P(z) = B_\alpha(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ ist nach Beispiel 9.5 $R(P) = 1$.

Für den Polylogarithmus $P(z) = \mathrm{Li}_s(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$ ist $R(P) = 1$.

Absolut konvergente Reihen können nach Satz 9.8 beliebig umgeordnet werden. Dadurch wird es möglich, zwei Reihen innerhalb des gemeinsamen Konvergenzkreises zu multiplizieren und nach gemeinsamen Potenzen von z umzuordnen, ähnlich zum Produkt von Polynomen auf Seite 35:

Satz 11.4 *Konvergieren die Potenzreihen* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *im Punkt* $z \in \mathbb{C}$ *absolut, so gilt*

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \Big) z^n .$$

Beweis. Wegen der absoluten Konvergenz gibt es $A, B \in \mathbb{R}_+^\times$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq A$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n z^n| \leq B$. Nach dem Cauchy-Kriterium gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=k}^{m} |a_n z^n| < \frac{\epsilon}{3B}$ und gleichzeitig $\sum_{n=k}^{m} |b_n z^n| < \frac{\epsilon}{3A}$ für alle $m \geq k \geq N$. Wir betrachten die Partialsummen $f_N(z) = \sum_{n=0}^{2N} a_n z^n$, $g_N(z) = \sum_{n=0}^{2N} b_n z^n$ und $h_N(z) := \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&|f_N(z) g_N(z) - h_N(z)| \\
&= \Big| \sum_{n=0}^{4N} \sum_{k=0}^{\min(2N,n)} a_k b_{n-k} z^n - \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n \Big| = \Big| \sum_{n=2N+1}^{4N} \sum_{k=0}^{2N} a_k b_{n-k} z^n \Big| \\
&= \Big| \sum_{n=2N+1}^{3N} \sum_{k=0}^{N} a_k b_{n-k} z^n + \sum_{n=2N+1}^{3N} \sum_{k=N+1}^{2N} a_k b_{n-k} z^n + \sum_{n=3N+1}^{4N} \sum_{k=0}^{2N} a_k b_{n-k} z^n \Big|
\end{aligned}$$

$$\le \sum_{k=0}^{N} |a_k z^k| \sum_{n=2N+1}^{3N} |b_{n-k} z^{n-k}| + \sum_{k=N+1}^{2N} |a_k z^k| \sum_{n=2N+1}^{3N} |b_{n-k} z^{n-k}|$$
$$+ \sum_{k=0}^{2N} |a_k z^k| \sum_{n=3N+1}^{4N} |b_{n-k} z^{n-k}|$$
$$< \frac{\epsilon}{3A} \sum_{k=0}^{N} |a_k z^k| + B \sum_{k=N+1}^{2N} |a_k z^k| + \frac{\epsilon}{3A} \sum_{k=0}^{2N} |a_k z^k| \le \epsilon \,.$$

Somit gilt $\lim_{m\to\infty} f_m(z) g_m(z) = \lim_{m\to\infty} h_m(z)$. Analog ergibt sich

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n z^n|\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}|\, |b_k|\Big) |z|^n \,.$$

Aus $\Big|\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k z^n\Big| \le \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}|\, |b_k| |z|^n$ folgt nun die absolute Konvergenz von $f(z) \cdot g(z)$. □

Satz 11.5 (Multiplikation der Binomialreihen) i) *Für alle $s, t \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt $B_s(z) \cdot B_t(z) = B_{s+t}(z)$.*

ii) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ und alle $s \in \mathbb{Q}$ gilt $B_s(x) = (1+x)^s$*

Beweis. i) Nach Satz 10.7 gilt

$$B_s(z) \cdot B_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k}\Big) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+t}{n} z^n = B_{s+t}(z) \,.$$

ii) Aus $B_p(x) = (1+x)^p$ für $p \in \mathbb{N}$ folgt mit $s = \frac{p}{q}$ und $q \in \mathbb{N}^\times$

$$\underbrace{B_{\frac{p}{q}}(x) \cdots B_{\frac{p}{q}}(x)}_{q \text{ mal}} = B_p(x) = (1+x)^p \,,$$

also $B_{\frac{p}{q}}(x) = (1+x)^{\frac{p}{q}}$ wegen der Eindeutigkeit der Wurzel reeller Zahlen. Für negative s benutzt man $B_s(x) \cdot B_{-s}(x) = B_0(x) = 1$. □

Daraus ergibt sich z.B.

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1} x + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{(\frac{1}{2}-1)}{2} x^2 + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{(\frac{1}{2}-1)}{2} \frac{(\frac{1}{2}-2)}{3} x^3 + \dots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 + \dots$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1} x + \frac{-\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{(-\frac{1}{2}-1)}{2} x^2 + \dots$$
$$= 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 + \dots$$

Als weiteres Beispiel können wir die (sehr wichtige) Exponentialreihe einführen und untersuchen:

Satz 11.6 i) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *ist die Exponentialreihe* $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *absolut konvergent, und es gilt* $|\exp(z)| \leq \exp(|z|)$.

ii) *Für alle* $w, z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(w) \cdot \exp(z) = \exp(w+z)$.

iii) *Für* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $|z| < 1 + \frac{N}{2}$ *gilt* $\Big|\exp(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\Big| \leq \frac{2|z|^{N+1}}{(N+1)!}$.

iv) *Es gilt* $\exp(z) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$, *insbesondere* $e = \exp(1)$.

Beweis. i) Das Quotientenkriterium liefert $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1} = 0 < 1$, damit ist $\exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. Die Ungleichung $|\exp(z)| \leq \exp(|z|)$ folgt aus Satz 9.2.

ii) Für $t \in \mathbb{C}$ ist nach Satz 11.4

$$\begin{aligned}
\exp(wt)\cdot\exp(zt) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\frac{z^k}{k!}\Big)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}w^{n-k}z^k\Big)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w+z)^n t^n}{n!} = \exp((w+z)t)\ .
\end{aligned}$$

iii) Für $|z| \leq \frac{N+2}{2}$ gilt

$$\begin{aligned}
\Big|\exp(z) - \sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}\Big| &= \Big|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\Big| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!} \\
&= \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}\Big(1 + \frac{|z|}{N+2} + \frac{|z|^2}{(N+2)(N+3)} + \dots\Big) \\
&\leq \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{|z|}{N+2}\Big)^k \leq \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{2|z|^{N+1}}{(N+1)!}\ .
\end{aligned}$$

iv) Aus ii) folgt $\exp(z) = \big(\exp(\frac{z}{n})\big)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\Big|\exp(z) - \big(1+\tfrac{z}{n}\big)^n\Big| &= \Big|\big(\exp(\tfrac{z}{n})\big)^n - \big(1+\tfrac{z}{n}\big)^n\Big| \\
&= \Big|\big(\exp(\tfrac{z}{n}) - (1+\tfrac{z}{n})\big)\sum_{k=0}^{n-1}\big(\exp(\tfrac{z}{n})\big)^k\big(1+\tfrac{z}{n}\big)^{n-k-1}\Big| \\
&\leq \big|\exp(\tfrac{z}{n}) - (1+\tfrac{z}{n})\big|\sum_{k=0}^{n-1}\big(\exp(\tfrac{|z|}{n})\big)^k\big(1+\tfrac{|z|}{n}\big)^{n-k-1}\ .
\end{aligned}$$

Offenbar gilt $1 + \frac{|z|}{n} \leq \exp(\frac{|z|}{n})$ und deshalb

$$\sum_{k=0}^{n-1} \big(\exp(\tfrac{|z|}{n})\big)^k \big(1 + \tfrac{|z|}{n}\big)^{n-k-1} \leq n\big(\exp(\tfrac{|z|}{n})\big)^{n-1} \leq n\big(\exp(\tfrac{|z|}{n})\big)^{n} = n\exp(z)\ .$$

Schließlich gilt nach iii) für $N = 1$ und $|\frac{z}{n}| < \frac{3}{2}$, also $n \geq \frac{3}{2}|z|$,

$$\big|\exp(\tfrac{z}{n}) - (1 + \tfrac{z}{n})\big| \leq 2|\frac{|z|^2}{2n^2}$$

und damit $\left|\exp(z) - \big(1+\frac{z}{n}\big)^n\right| \leq \dfrac{|z|^2}{n^2} \cdot n\exp(z)$. Für $n \to \infty$ folgt die Behauptung.
□

Diese Eigenschaften haben mehrere Folgerungen.

i) Wegen $\exp(0) = 1$ existiert für alle $z \in \mathbb{C}$ das Inverse $\big(\exp(z)\big)^{-1} = \exp(-z) \in \mathbb{C}$, damit ist $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

ii) Die Exponentialreihe konvergiert sehr schnell; im Schritt $s_N \to s_{N+1}$ der Partialsummen verbessert sich die Konvergenz um den Faktor $N + 2$. Damit kann die Eulersche Zahl e numerisch gut berechnet werden. Die Folge $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ konvergiert viel schlechter.

iii) Es gilt $\exp s = e^s$ für alle $s \in \mathbb{Q}$.

iv) Im Reellen folgt aus $x_1 > x_2 > 0$ die Beziehung $\exp(x_1) > \exp(x_2)$. Über $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ folgt dann $\exp(x_1) > \exp(x_2)$ für alle $x_1 > x_2$. Damit ist die zugehörige reelle Exponentialfunktion streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

Restgliedabschätzungen wie bei der Exponentialfunktion werden oft benötigt.

Satz 11.7 *Eine Potenzreihe* $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *habe einen Konvergenzradius* $R(P) > 0$. *Dann gibt es zu jedem* $0 < r < R(P)$ *und jedem* $p \in \mathbb{N}$ *eine Konstante* $c_p \in \mathbb{R}$, *so daß* $\left|\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n z^n\right| < c_p|z|^p$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| \leq r$.

Beweis. Setze $c_p := \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{k+p}| r^k$. Dann gilt $\left|\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \sum\limits_{n=p}^{\infty} |a_n||z|^n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{k+p}||z|^k|z|^p \leq c_p|z|^p$. □

Eine wichtige Anwendung ist folgende Aussage über mögliche Nullstellen einer Potenzreihe:

Satz 11.8 *Eine Potenzreihe* $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*, mit* $a_k \neq 0$ *für mindestens ein* k*, habe einen Konvergenzradius* $R(P) > 0$*. Dann gibt es ein* $0 < r < R(P)$*, so daß höchstens endlich viele Nullstellen in der Kreisscheibe* $\overline{K_r(0)} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq r\}$ *liegen.*

Beweis. Es sei $N = \min(k \ : \ a_k \neq 0)$. Zu beliebigem $0 < r < R(P)$ gibt es nach Satz 11.7 ein $c > 0$ mit $\left|P(z) - a_N z^N\right| \leq c|z|^{N+1}$. Wäre die Aussage falsch, so enthielte jeder Kreis mit Radius $\frac{r}{k}$ um 0, mit $k \in \mathbb{N}^{\times}$, eine Nullstelle $z_k \neq 0$ von P. Für diese gilt $|a_N z_k^N| \leq c|z_k|^{N+1}$, also $|a_N| \leq c|z_k| \leq \frac{r}{k}$. Für $k \to \infty$ ergibt sich ein Widerspruch zu $a_N \neq 0$. □

Satz 11.9 (Identitätssatz für Potenzreihen) *Für zwei Potenzreihen* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *mit positiven Konvergenzradien gebe es eine Nullfolge* $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *mit* $f(z_k) = g(z_k)$*. Dann gilt* $a_n = b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

Beweis. Folgt für $P(z) = f(z) - g(z)$ aus Satz 11.8. □

Gilt z.B. $f(z) = g(z)$ innerhalb einer Kreisscheibe um 0 oder auch nur entlang eines die 0 enthaltenen Kurvenstücks, so ist $f = g$ innerhalb des gemeinsamen Konvergenzkreises.

12 Wiederholung

- Folgen, Konvergenz, Grenzwert
- elementare Grenzwerte, Eulersche Zahl
- Satz von Bolzano-Weierstraß
- Cauchy-Folgen, Vollständigkeit über Cauchy-Kriterium
- Reihen, Konvergenz, geometrische Reihe
- Leibniz-Kriterium
- absolute Konvergenz, Umordnungssatz
- Majorantenkriterium, Quotientenkriterium, Wurzelkriterium
- Polynome, Polynomdivision, Nullstellen
- Potenzreihen, Konvergenzradius
- Multiplikationssatz
- Binomialreihe, Exponentialreihe
- Identitätssätze für Polynome und Potenzreihen

Teil III
Vektorräume

13 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Wir geben hier zunächst eine elementare Einführung in lineare Gleichungssysteme (LGS) und das Standardverfahren zur Bestimmung der Lösung. Eine systematische Untersuchung der Menge der Lösungen erfolgt später, wenn Vektorräume und linearen Abbildungen zwischen ihnen bereitgestellt sind.

Definition 13.1 Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ein *lineares Gleichungssystem* über $\mathbb{K}$ aus m Gleichungen mit n Unbekannten ist ein System der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $(a_{ij}) = \{a_{11}, \ldots, a_{mn}\} \in \mathbb{K}$ und die $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ fest vorgegebene Zahlen sind und das n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ eine zu bestimmende Lösung des Systems ist.

Wichtig ist, daß keine Exponenten wie x_1^2, x_2^{-1}, x_n^3 usw. der x_i auftreten.

Beispiel 13.2 Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 & \Leftrightarrow \quad & 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 && = 2 \\ 3x_2 - x_4 &= 6 & \Leftrightarrow \quad & 0 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + (-1) \cdot x_4 && = 6 \\ x_2 &= -\tfrac{1}{4}x_3 & \Leftrightarrow \quad & 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \tfrac{1}{4} \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 && = 0 \end{aligned}$$ ◁

Offenbar gilt:

Satz 13.3 (elementare Zeilenumformungen) *Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Die Menge der Lösungen $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ des Systems bleibt unverändert bei folgenden Typen von Änderungen des Systems:

Typ I *Vertauschen zweier Gleichungen.*

Typ II *Ersetzen der j-ten Gleichung durch die Summe aus der i-ten und j-ten Gleichung und Beibehalten der i-ten Gleichung.*

Typ III *Multiplikation der i-ten Gleichung mit $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ (d.h. $\lambda \neq 0$).*

Die Änderungen vom Typ II und III werden oft zusammen ausgeführt:

Typ IV *Ersetzen der j-ten Gleichung durch die Summe aus dem λ-fachen der i-ten Gleichung und der j-ten Gleichung und Beibehalten der i-ten Gleichung.*

Alle diese elemenaren Zeilenumformungen lassen sich wieder rückgängig machen. Z.B. Typ II durch

i) Multiplikation der i-ten Gleichung mit (-1)

ii) Addition der neuen i-ten Gleichung zur j-ten

iii) Multiplikation der i-ten Gleichung mit (-1)

und Typ III durch

i) Multiplikation der i-ten Gleichung mit $\frac{1}{\lambda}$.

Die Lösungsstrategie besteht darin, durch elementaren Zeilenumformungen das System so umzuformen, daß zumindest eine der Variablen allein steht und abgelesen werden kann. Das Verfahren wird dann für die verbliebenen $n-1$ Variablen wiederholt, u.s.w. Wir sehen uns das Beispiel 13.2 an:

Beispiel 13.4 I_{ij} bedeutet Vertauschen der Gleichungen i und j und $\mathrm{IV}_{ij}(\lambda)$ bedeutet Addition der λ-fachen i-ten Gleichung zur j-ten:

$$\begin{aligned} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + \quad 0\cdot x_4 &= 2\\ 0\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + (-1)\cdot x_4 &= 6\\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + \tfrac{1}{4}\cdot x_3 + \quad 0\cdot x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathrm{I}_{23},\ \mathrm{IV}_{23}(-3):\qquad \begin{aligned} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + \quad 0\cdot x_4 &= 2\\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + \tfrac{1}{4}\cdot x_3 + \quad 0\cdot x_4 &= 0\\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 - \tfrac{3}{4}\cdot x_3 + (-1)\cdot x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Geben wir z.B. x_4 beliebig vor, dann lesen wir ab: $x_3 = -8 - \frac{4}{3}x_4$, $x_2 = 2 + \frac{1}{3}x_4$ und $x_1 = 10 + \frac{4}{3}x_4$. $\lhd$

Das ist eine typische Situation: in Lösungen linearer Gleichungssysteme können manche Variablen beliebig gewählt werden, andere sind eindeutig bestimmt, oder es kann auch gar keine Lösung geben. Wir werden im 2. Semster Methoden erarbeiten, mit denen die Menge der Lösungen eines LGS charakterisiert werden kann. Zunächst führen wir eine Matrixschreibweise ein, mit der lineare Gleichungssysteme und die elementaren Zeilenumformungen sich übersichtlicher schreiben lassen.

Definition 13.5 Ein Schema der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{K}$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ heißt $m \times n$-*Matrix (über* $\mathbb{K}$). Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$ wird mit $M(m \times n, \mathbb{K})$ bezeichnet.

Man schreibt auch $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ oder, wenn die Größe $m \times n$ klar ist, auch $A = (a_{ij})$, mit dem Eintrag a_{ij} auf der Kreuzung der i-ten Zeile mit der j-ten Spalte. Der erste Index ist also der Zeilenindex, der zweite Index der Spaltenindex.

Wir identifizieren $M(n \times 1, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K}^n$, d.h. wir schreiben Elemente aus $\mathbb{K}^n$ in der Regel als Spalten $x = (x_i)_{i=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Sind $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ und ist $\lambda \in \mathbb{K}$, so erklärt man die Addition und die Multiplikation mit Skalaren durch

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \lambda x := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Schließlich erklären wir eine Matrixmultiplikation $\cdot : M(m \times n, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ wie folgt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Die Größe der Matrizen muß dabei passen, d.h. ein Produkt $M(m \times n, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^l$ ist für $l \neq n$ nicht erklärt! Ist also $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ und $x = (x_j)_{j=1,\dots,n}$, so ist $A \cdot x = b = (b_i)_{i=1,\dots,m}$ mit $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.

Beispiel 13.6 Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{R})$ und $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, so ist

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) \\ 8 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) \\ 9 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,.$$

◁

Damit läßt sich ein lineares Gleichungssystem aus m Gleichungen mit n Unbekannten schreiben als $A \cdot x = b$, wobei $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^m$ gegeben sind und die Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ gesucht ist. Wir können nun die elementaren Zeilenumformungen des LGS $A \cdot x = b$ in Matrixschreibweise formulieren:

Typ I Vetauschen zweier Zeilen von A und der entsprechenden Einträge von b.

Typ II Ersetzen der j-ten Zeile von A durch die Summe aus der i-ten und j-ten Zeile und Beibehalten der i-ten Zeile, sowie Ersetzen des j-ten Eintrags von b durch die Summe aus i-tem und j-tem Eintrag von b und Beibehalten des i-ten Eintrags von b.

Typ III Multiplikation der i-ten Zeile von A und des i-ten Eintrags von b mit $\lambda \in \mathbb{K}^\times$.

Typ IV Ersetzen der j-ten Zeile von A durch die Summe aus dem λ-fachen der i-ten Zeile und der j-ten Zeile und Beibehalten der i-ten Zeile, und entsprechend für die Einträge von b.

Man sieht dabei, daß die elementaren Zeilenumformungen an der Lösung $x = (x_j)$ nichts ändern. Deshalb kann x gefahrlos weggelassen werden und die Zeilenumformungen einheitlich für die *erweiterte Koeffizientenmatrix*

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

durchgeführt werden.

Beispiel 13.7 Wir wiederholen die Schritte aus Beispiel 13.4:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{I}_{23} \\ \mathrm{IV}_{13}(-3)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -1 & 6 \end{array}\right)$$

Eine solche Matrix heißt in *Zeilenstufenform*. Durch Zeilenumformung vom Typ III kann erreicht werden, daß die erste von Null verschiedene Zahl jeder Zeile zu 1 wird:

$$\xrightarrow{\mathrm{III}_3(-\frac{4}{3})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -8 \end{array}\right)$$

Schließlich kann mit Typ IV erreicht werden, daß alle Zahlen oberhalb der ersten 1 jeder Zeile zu Null werden:

$$\xrightarrow{\mathrm{IV}_{32}(-\frac{4}{3}),\ \mathrm{IV}_{31}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -8 \end{array}\right)$$

Die Lösung ist damit (wie zuvor) $x_3 = -8 - \frac{4}{3}x_4$, $x_2 = 2 + \frac{1}{3}x_4$ und $x_1 = 10 + \frac{4}{3}x_4$. ◁

Eine nützliche Definition ist also

Definition 13.8 Eine Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ heißt in *Zeilenstufenform*, falls gilt:

i) Es gibt eine Zahl $r \leq m$, so daß die Zeilen mit Index $i = 1, \ldots, r$ nicht identisch Null sind, während die Zeilen mit Index $i = r+1, \ldots, m$ identisch Null sind.

ii) Bezeichne $j_i := \min\{j \ : \ a_{ij} \neq 0\}$ den kleinsten Spaltenindex der Zeilen $i = 1, \ldots, r$ mit Eintrag $\neq 0$, so gilt $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

Beispiel 13.9 Ein Beispiel für eine Matrix in Zeilenstufenform ist also:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◁

Satz 13.10 *Jede Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ läßt sich durch endlich viele elementare Zeilenumfomungen auf spezielle Zeilenstufenform*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots & * & 0 & * & \ldots & * & 0 & * & \ldots & * & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots & * & 0 & * & \ldots & * & 0 & \ldots \\ 0 & & & & & \ldots & & & & & 0 & 1 & * & \ldots & * & 0 & \\ 0 & & & & & & & & & \ldots & & & & & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & & & & & & & & & \ldots & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

bringen mit $a_{ij_i} = 1$ und $a_{kj_i} = 0$ für $k \neq i$, wenn $j_i := \min\{j \ : \ a_{ij} \neq 0\}$. Ein $*$ steht für ein beliebiges Element aus $\mathbb{K}$. Jede Zeile wird nach einer Reihe von Nullen mit 1 begonnen, und zwar später als in jeder der vorangehenden Zeilen. Oberhalb und unterhalb der führenden 1 sind alle Einträge Null.

Beweis. Suche die erste Spalte j, die nicht identisch Null ist. Durch Zeilenvertauschung (Typ I) läßt sich erreichen, daß der erste Eintrag a_{1j} dieser Spalte $\neq 0$ ist. Teile die erste Zeile durch diesen Eintrag a_{1j} (Typ III). Diese neue erste Zeile wird nun festgehalten. Addiere zu jeder Zeile $i = 2, \dots m$ das $(-a_{ij})$-fache der neuen ersten Zeile (Typ IV). Dadurch wird $a_{ij} = 0$ für alle $i > 1$. Wiederhole das Verfahren für die Zeilen 2 bis m, wobei j nun der kleinste Spaltenindex mit einem $a_{ij} \neq 0$ für $i = 2, \dots, m$ ist, u.s.w. Das Ergebnis ist eine Matrix in Zeilenstufenform, wobei jede Zeile nach einer Reihe von Nullen mit 1 begonnen wird. Durch erneute Umformungen vom Typ IV werden dann (wie in Beispiel 13.7) oberhalb der führenden 1 jeder Zeile die Einträge auf 0 gebracht. □

Definition 13.11 Die Anzahl der Zeilen einer Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$, die nach Überführung in Zeilenstufenform nicht identisch Null sind, heißt der *Rang* von A, geschrieben $\operatorname{rang}(A)$.

Wir werden später sehen, daß der Rang unabhängig von der Wahl der elementaren Zeilenumformungen ist.

Liegt die erweiterte Koeffizientenmatrix in spezieller Zeilenstufenform vor (was nach Satz 13.10 durch elementare Zeilenumformungen immer erreicht werden kann, wobei sich nach Satz 13.3 die Menge der Lösungen des LGS nicht ändert), so läßt sich die Lösung des LGS $A \cdot x = b$ mit $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^m$ wie folgt ermitteln:

Satz 13.12 (Gaußsches Eliminationsverfahren) *Es sei $A \cdot x = b$ ein lineares Gleichungssystem, $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Die erweiterterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ liege in spezieller Zeilenstufenform vor.*

- *Ist* $\operatorname{rang}(A|b) \neq \operatorname{rang}(A) = r$, *d.h.* $b_{r+1} \neq 0$, *so gibt es keine Lösung, denn die* $(r+1)$*-te Gleichung* $0 = \sum_{j=1}^{n} a_{r+1,j} x_j = b_{r+1}$ *ist nicht lösbar.*
- *Ist* $\operatorname{rang}(A|b) = \operatorname{rang}(A)$, *so sind die* $n - r$ *Variablen* x_k *mit* $k \notin \{j_1, \dots, j_r\}$ *im Sinne von Definition 13.8.ii), welche also Stufen der Länge* ≥ 2 *entsprechen,* freie Variablen. *Sie können beliebig aus* $\mathbb{K}$ *gewählt werden.*
- *Die verbleibenden* x_{j_i} *mit* $i = 1, \dots, r$ *sind* gebundene Variablen, *deren Wert sich nach Wahl der freien* x_k *bestimmt zu* $x_{j_i} = b_i - \sum_{k \notin \{j_1,\dots,j_r\}} a_{ik} x_k$. □

Offenbar gilt: Für $n = r$ ist die Lösung eindeutig bestimmt, für $m = r$ (keine Nullzeilen) ist das LGS für alle $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar. Achtung: die sofortige Lösung des LGS durch $x_{j_i} = b_i - \sum_{k \notin \{j_1,\dots,j_r\}} a_{ik} x_k$ ist nur richtig, wenn $(A|b)$ in spezieller Zeilenstufenform vorliegt.

Mit $y = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_r} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^r$ für die gebundenen Variablen und $w = \begin{pmatrix} x_{k_1} \\ \vdots \\ x_{k_{n-r}} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n-r}$ mit $k_1 < \dots < k_{n-r} \notin \{j_1, \dots, j_r\}$ für die freien Variablen und Zusammenfassung der Matrixelemente $c_{il} := a_{ik_l}$ zu einer Matrix $C = (c_{il}) \in$

$M(r \times (n-r), \mathbb{K})$ ergibt sich die Lösung von $A \cdot x = b$ (in spezieller Zeilenstufenform) zu $y = \tilde{b} - C \cdot w$ mit $w \in \mathbb{K}^{n-r}$ beliebig und $\tilde{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^r$.

Beispiel 13.13 In Beispiel 13.9 mit $b_5 = 0$ ergibt sich nach elementaren Zeilenumformungen

$$\widetilde{(A|b)} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{9} & 0 & 0 & 0 & b_1 - \frac{2}{9}b_2 - \frac{22}{9}b_3 + \frac{11}{9}b_4 \\ 0 & 1 & \frac{8}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9}b_2 - \frac{7}{9}b_3 + \frac{8}{9}b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & b_3 - 2b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Als Lösung ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - \frac{2}{9}b_2 - \frac{22}{9}b_3 + \frac{11}{9}b_4 \\ \frac{1}{9}b_2 - \frac{7}{9}b_3 + \frac{8}{9}b_4 \\ b_3 - 2b_4 \\ b_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{11}{9} & 0 \\ \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

mit $x_3, x_6 \in \mathbb{R}$ beliebig. Die gebundenen Variablen sind also $x_5 = b_4 - 2x_6$, $x_4 = b_3 - 2b_4 + x_6$, $x_2 = \frac{1}{9}b_2 - \frac{7}{9}b_3 + \frac{8}{9}b_4 - \frac{8}{9}x_3$ und $x_1 = b_1 - \frac{2}{9}b_2 - \frac{22}{9}b_3 + \frac{11}{9}b_4 - \frac{11}{9}x_3$. $\triangleleft$

14 Vektorräume

Vektorräume sind der zentrale Gegenstand der linearen Algebra.

Definition 14.1 Sei K ein Körper. Eine Menge V zusammen mit einer inneren Verknüpfung $+ : V \times V \to V$ (der Addition) und einer äußeren Verknüpfung $\cdot : K \times V \to V$ (Multiplikation mit Skalaren) heißt *Vektorraum über K*, wenn gilt:

(V1) V zusammen mit der Addition ist eine kommutative Gruppe. (Wie üblich wird das neutrale Element wird mit $0 \in V$ bezeichnet und das zu $v \in V$ inverse Element mit $-v$.)

(V2) Für die Multiplikation mit Skalaren gilt

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot v &= \lambda \cdot v + \mu \cdot v \;, & \lambda \cdot (v + w) &= \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \;, \\ \lambda \cdot (\mu \cdot v) &= (\lambda\mu) \cdot v \;, & 1 \cdot v &= v \;, \end{aligned}$$

für alle $\lambda, \mu \in K$ und $v, w \in V$.

Ein Element eines Vektorraumes V heißt *Vektor*.

Die wichtigsten Fälle sind Vektorräume über $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$, und schreiben oft auch $\mathbb{K}$ statt K. Wir sprechen dann von reellen bzw. komplexen Vektorräumen.

Satz 14.2 *In einem Vektorraum über K gilt*

i) $0 \cdot v = 0 \in V \quad \forall v \in V$

ii) $\lambda \cdot 0 = 0 \in V \quad \forall \lambda \in K$

iii) $(-1) \cdot v = -v \quad \forall v \in V$

iv) $\lambda \cdot v = 0 \in V \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0$ *oder* $v = 0$

Beweis. Beweis von i),ii),iii) analog zu Körpern am Ende von 3.2.
iv): Ist $\lambda \cdot v = 0$, aber $\lambda \neq 0$, so gilt $v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot v = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = 0$. □

Beispiel 14.3 (für Vektorräume)

i) $K^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in K\}$ ist ein Vektorraum mit Addition

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

und skalarer Multiplikation

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) .$$

Wir schreiben Vektoren aus K^n oft auch als Spalten statt als Zeilen.

ii) Der Vektorraum $M(m \times n, K)$ der $(m \times n)$-Matrizen mit Einträgen aus K ist ein Vektorraum mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation: Schreiben wir $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(m \times n, K)$, so ist

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) , \qquad \lambda \cdot A := (\lambda a_{ij}) .$$

iii) $\mathbb{C}$ kann als reeller Vektorraum aufgefaßt werden durch $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(\lambda, x + \mathrm{i}y) \mapsto \lambda x + \mathrm{i}\lambda y$.

iv) der Vektorraum $\mathbb{K}[t]$ der Polynome in der Variablen t mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$.

v) der Vektorraum der konvergenten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$. ◁

Definition 14.4 Sei V ein Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subset V$ heißt *Untervektorraum*, wenn

(UV1) $W \neq \emptyset$

(UV2) $v, w \in W \quad \Rightarrow \quad v + w \in W$
(d.h. W ist abgeschlossen bezüglich der Addition)

(UV3) $v \in W\ ,\ \lambda \in K \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot v \in W$
(d.h. W ist abgeschlossen bezüglich der Multiplikation mit Skalaren)

Ein Untervektorraum ist automatisch ein Vektorraum. Beispiele sind

i) der Nullvektor $W = \{0\}$

ii) Vielfache $W = \{\lambda \cdot v \ :\ \lambda \in K\}$ eines ausgewählten Vektors $v \in V$, speziell jede Gerade in der Ebene durch den Nullpunkt, $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ ax + by = 0\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Satz 14.5 *Seien W_i mit $i \in I$ (Indexmenge) jeweils Untervektorräume von V, so ist der Durchschnitt $W := \bigcap_{i\in I} W_i \subset V$ wieder ein Untervektorraum von V.*

Beweis. $0 \in W_i\ \forall i \in I$, also $0 \in W$ (damit ist W nicht leer). Seien $v, w \in W$, so sind $v, w \in W_i\ \forall i \in I$. Dann ist auch $v + w \in W_i\ \forall i \in I$ und somit $v + w \in W$. Analog ist $\lambda \cdot v \in W$. □

Dagegen ist die Vereinigung von Untervektorräumen im allgemeinen nicht wieder ein Untervektorraum. Man kann eine solche Vereinigung aber zu einen Vektorraum abschließen.

Definition 14.6 (Linearkombinationen) Seien $v_1, \dots, v_r \in V$ (nicht notwendig verschiedene) Vektoren aus V. Ein Vektor $v \in V$ heißt *Linearkombination* von $v_1, \dots, v_r$, wenn es $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ gibt, so daß

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_r \cdot v_r = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot v_i\ .$$

Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{span}_K(v_1, \dots, v_r) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot v_i \ :\ \lambda_i \in K \right\}$$

den Raum aller Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_r$. Offenbar ist $\mathrm{span}_K(v_1, \dots, v_r)$ ein Untervektorraum von V, er heißt der durch $v_1, \dots, v_r$ *aufgespannte* (oder *erzeugte*) *Untervektorraum.*

Die Definition läßt sich verallgemeinern auf Untervektorräume, die von einer Familie $(v_i)_{i\in I}$ aus möglicherweise unendlich vielen Vektoren aufgespannt wird. Dann ist $\mathrm{span}_K(v_i)_{i\in I}$ definiert als die Menge aller *endlichen* Linearkombinationen, d.h. zu jedem $v \in \mathrm{span}_K(v_i)_{i\in I}$ gibt es Indizes $i_1, \dots, i_r \in I$ und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$, so daß $v = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_{i_j}$.

Beispiel 14.7 (für Linearkombinationen)

i) Für $V = \mathbb{R}^3$ und $v_1, v_2 \in V$ ist $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1)$ die Gerade durch 0 und v_1, falls $v_1 \neq 0$, und $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2)$ die Ebene durch $0, v_1, v_2$, falls $v_1 \neq 0$ und $v_2 \notin \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1)$.

ii) Im Vektorraum K^n setzen wir $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, wobei die 1 an der i-ten Stelle steht. Dann ist $\mathrm{span}_K(e_i)_{i=1,\dots,n} = K^n$. $\triangleleft$

Im weiteren wird es wichtig sein, ob sich ein Vektor $v \in V$ in eindeutiger Weise als Linearkombination von vorgegebenen Vektoren $v_1, \dots, v_r$ darstellen läßt oder nicht.

Definition 14.8 Sei V ein Vektorraum über K. Eine Familie von endlich vielen Vektoren $v_1, \dots, v_r$ heißt *linear unabhängig* (bzw. die Vektoren $v_1, \dots, v_r$ heißen linear unabhängig), wenn aus $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_r \cdot v_r = 0$ für $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$.

Eine beliebige Familie $(v_i)_{i \in I}$ heißt linear unabhängig, wenn jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist. Entsprechend heißt eine Familie $(v_i)_{i \in I}$, die nicht linear unabhängig ist, *linear abhängig.* In diesem Fall gibt es also $v_{i_1}, \dots, v_{i_r} \neq 0$ mit $i_1, \dots, i_r \in I$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$ mit $\sum_{j=1}^r \lambda_j \cdot v_{i_j} = 0$.

Satz 14.9 *Eine Familie $(v_1, \dots, v_n)$ von Vektoren $v_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ \vdots \\ v_{mj} \end{pmatrix} \in K^m$ ist genau dann linear unabhängig, wenn für die Matrix $A = (v_{ij}) \in M(m \times n, K)$ gilt* $\mathrm{rang}(A) = n$.

Beweis. Nach Definition des Matrixprodukts gilt

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot x = 0$$

mit $x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$. Die Familie $(v_1, \dots, v_n)$ ist also genau dann linear unabhängig, wenn $A \cdot x = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$ besitzt. Das erfordert $\mathrm{rang}(A) = n$. $\square$

Beispiel 14.10 Sei z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ so betrachten wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV_{12}(-2)\,,\ IV_{13}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV_{23}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist (v_1, v_2, v_3) nicht linear unabhängig. Dagegen ist (v_1, v_2) linear unabhängig, denn Weglassen der 3. Spalte ergibt $\mathrm{rang}(v_1, v_2) = 2$. $\triangleleft$

Wir werden später sehen, daß in beliebigen endlich erzeugten Vektorräumen die lineare Unabhängigkeit stets durch Lösen linearer Gleichungssysteme ermittelt werden kann.

Satz 14.11 *Für eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ sind folgende Bedingungen äquivalent:*

i) *$(v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig*

ii) *Jeder Vektor $v \in span_K(v_i)_{i\in I}$ läßt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination von Vektoren aus $(v_i)_{i\in I}$ darstellen.*

Beweis. i)⇒ii). Sei $v \in \mathrm{span}_K(v_i)_{i\in I}$ auf zwei verschiedene Arten als Linearkombination darstellbar,

$$v = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i'\in I} \mu_{i'} \cdot v_{i'} \ ,$$

wobei nur endlich viele Skalare $\lambda_i, \mu_{i'}$ ungleich Null sind. Es gibt also eine endliche Teilmenge $J \subset I$ (Vereinigung der Indizes i, i', für die $\lambda_i \neq 0$ oder $\mu_{i'} \neq 0$), so daß

$$\sum_{j\in J} (\lambda_j - \mu_j) \cdot v_j = 0 \ .$$

Da nach Voraussetzung i) jede endliche Teilfamilie von $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist, ist $\lambda_j = \mu_j$ für alle $j \in J$ und weiter für alle $i \in I$ (auf dem Komplement $I \setminus J$ ist $\lambda_i = \mu_i = 0$).

ii)⇒i). Der Nullvektor läßt sich als Linearkombination von $(v_i)_{i\in I}$ darstellen, in der sämtliche Skalare Null sind. Ist die Linearkombination eindeutig, so ist $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig. □

15 Erzeugendensystem, Basis und Dimension

Definition 15.1 Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt *Erzeugendensystem* von V, wenn $V = \mathrm{span}_K(v_i)_{i\in I}$, wenn also jeder Vektor $v \in V$ eine endliche Linearkombination von $(v_i)_{i\in I}$ ist.

Ein Erzeugendensystem $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$ heißt *Basis* von V, wenn $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist.

Der Vektorraum V heißt *endlich erzeugt*, falls es ein endliches Erzeugendensystem $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ von V gibt.

Beispiel 15.2 (für Erzeugendensysteme und Basen)

i) Im Vektorraum K^n ist $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, mit $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, ein Erzeugendensystem, denn jeder Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ läßt sich schreiben als $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ mit $x_i \in K$. Das Erzeugendensystem ist linear unabhängig und deshalb eine Basis, die *Standardbasis* des K^n.

ii) Im Vektorraum $M(m \times n, K)$ ist $\mathcal{B} = (E_{ij})_{\substack{i=1,\dots m \\ j=1,\dots,n}}$ mit

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ & O & & \vdots & & O & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & O & & \vdots & & O & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei die 1 im Schnittpunkt der i-ten Zeile mit der j-ten Spalte steht, ein Erzeugendensystem. Jede Matrix $A = (a_{ij})$ läßt sich darstellen als $A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$. Das Erzeugendensystem ist linear unabhängig und deshalb eine Basis, die *Standardmatrixbasis*.

iii) In $\mathbb{C}$, aufgefaßt als reeller Vektorraum, ist $\mathcal{B} = (1, \mathrm{i})$ eine Basis, denn jede komplexe Zahl kann als $z = x \cdot 1 + y \cdot \mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ geschrieben werden.

Fassen wir $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ dagegen als komplexen Vektorraum auf, dann ist $\mathcal{B} = (1, \mathrm{i})$ zwar ein Erzeugendensystem, aber keine Basis mehr, denn 1 und i sind nicht mehr linear unabhängig über $\mathbb{C}$: $1 \cdot 1 + \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = 0$.

iv) Sei $P_n(x)$ der Vektorraum der reellen oder komplexen Polynome vom Grad $\leq n$ in x. Dann ist $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ eine Basis von $P_n(x)$: Jedes Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$ läßt sich schreiben als $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{K}$ (also ist $\mathcal{B}$ Erzeugendensystem). Aus $p(x) = 0$ folgt nach dem Identitätssatz für Polynome $a_k = 0$, also ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig. $\triangleleft$

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ein endliches Erzeugendensystem bzw. eine endliche Basis, dann ist jede Permutation (Umordnung) der Vektoren v_i wieder ein endliches Erzeugendensystem bzw. eine endliche Basis. Z.B. ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 0)$ eine Basis von K^3, aber es ist übersichtlicher, statt $\mathcal{B}$ mit der durch Umordnung erhaltenen Standardbasis (v_1, v_3, v_2) zu arbeiten.

Für die Definition einer Basis gibt es mehrere äquivalente Möglichkeiten. Wir beschränken uns zunächst auf endlich erzeugte Vektorräume:

Satz 15.3 *Für eine Familie $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von Vektoren $v_i \in V$, $V \neq \{0\}$, sind folgende Bedingungen äquivalent:*

i) *$\mathcal{B}$ ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V (also eine Basis).*

ii) *$\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von V, aber $(v_1, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, \dots, v_n)$ ist für jedes $1 \leq r \leq n$ kein Erzeugendensystem mehr.*

iii) *Zu jedem* $v \in V$ *gibt es eindeutig bestimmte* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ *mit* $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$ *(Eindeutigkeit der Zerlegung von* v *nach der Basis).*

iv) $\mathcal{B}$ *ist linear unabhängig, während* $(v_1, \dots, v_n, v)$ *linear abhängig ist für alle* $v \in V$.

Beweis. i)⇒ii). Wäre $(v_1, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, \dots, v_n)$ ein Erzeugendensystem, dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n \in K$ mit $v_r = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i \cdot v_i + \sum_{j=r+1}^n \lambda_j \cdot v_j$. Damit ist $0 = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i \cdot v_i + (-1) \cdot v_r + \sum_{j=r+1}^n \lambda_j \cdot v_j$, so daß $\mathcal{B}$ nicht linear unabhängig wäre.

ii)⇒iii). Angenommen, es gibt ein $v \in V$ und für dieses zwei verschiedene Darstellungen

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i \qquad \text{und} \qquad v = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot v_i$$

mit $\lambda_r \neq \mu_r$ für mindestens ein r. (Es gibt mindestens eine Darstellung, da $\mathcal{B}$ Erzeugendensystem.) Subtraktion beider Gleichungen und Division durch $(\lambda_r - \mu_r)$ ergibt

$$v_r = \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\lambda_i - \mu_i}{\mu_r - \lambda_r} \cdot v_i + \sum_{j=r+1}^n \frac{\lambda_j - \mu_j}{\mu_r - \lambda_r} \cdot v_j$$

Das würde bedeuten, daß $(v_1, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, \dots, v_n)$ ein Erzeugendensystem wäre, denn in einer Linearkombination ließe sich v_r durch die v_i, v_j mit $i, j \neq r$ ausdrücken, im Widerspruch zu ii).

iii)⇒iv). Nach Satz 14.11 ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig. Andererseits gibt es für jedes $v \in V$ Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i + (-1) \cdot v$, so daß $(v_1, \dots, v_n, v)$ nicht linear unabhängig ist.

iv)⇒i). Da $(v_1, \dots, v_n, v)$ für alle $v \in V$ linear abhängig ist, gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in K$, welche nicht alle gleich 0 sind, mit $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i + \lambda \cdot v$. Wäre $\lambda = 0$, so auch $\lambda_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, da $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist. Also ist $\lambda \neq 0$ und somit

$$v = \sum_{i=1}^n \frac{-\lambda_i}{\lambda} \cdot v_i \,.$$

Damit ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem. □

Die wichtigste Eigenschaft einer Basis ist die Eindeutigkeit der Zerlegung eines gegebenen Vektors nach einer Basis des Vektorraums. Ist eine Basis fixiert, dann kann man an Stelle des Vektors $v \in V$ mit einer Folge von Zahlen $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in K$ arbeiten. Diese Zahlen λ_i heißen die *Koordinaten* von $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$ bezüglich der Basis $(v_1, \dots, v_n)$.

Beispiel 15.4 Es sei $V = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Wir überprüfen, ob (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig sind durch Berechnen des Rangs der Matrix $A = (v_{ij})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV_{12}(-2)\ ,\ IV_{13}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV_{23}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Folglich bildet (v_1, v_2, v_3) eine Basis von V. Ist $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in V$, so muß es eindeutig bestimmte Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ geben mit $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. Das ist aber gerade ein lineares Gleichungssystem

$$(A|w) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{IV_{12}(-2)\ ,\ IV_{13}(-4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{IV_{23}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{IV_{32}(1),\ IV_{31}(1),\ III_3(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{IV_{21}(2),\ III_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

welches die Koeffizienten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ liefert. Insbesondere ist $w \in V$. $\triangleleft$

Satz 15.5 *Ist V nicht endlich erzeugt, dann gibt es eine unendliche linear unabhängige Familie von Vektoren.*

Beweis. Durch Induktion nach der Anzahl n linear unabhängiger Vektoren von V: Seien $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig. Wäre $(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ linear abhängig für jedes $v_{n+1} \in V$, so wäre $(v_1, \ldots, v_n)$ Erzeugendensystem, Widerspruch. $\square$

Satz 15.6 (Austauschlemma von Steinitz) *Es sei $(v_1, \ldots, v_n)$ Erzeugendensystem (bzw. eine Basis) eines Vektorraums V über K und $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ mit $\lambda_r \neq 0$ für ein $r \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist auch $(v_1, \ldots, v_{r-1}, w, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ ein Erzeugendensystem (bzw. eine Basis) von V.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen gilt

$$v_r = \frac{1}{\lambda_r} \cdot w + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{-\lambda_i}{\lambda_r} \cdot v_i + \sum_{j=r+1}^{n} \frac{-\lambda_j}{\lambda_r} \cdot v_j \ .$$

Sei $v \in V$ ein beliebiger Vektor, dann gibt es $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot v_i$. Einsetzen von v_r liefert

$$v = \sum_{i=1}^{r-1} \left(\mu_i - \frac{\mu_r \lambda_i}{\lambda_r}\right) \cdot v_i + \frac{\mu_r}{\lambda_r} \cdot w + \sum_{j=r+1}^{n} \left(\mu_j - \frac{\mu_r \lambda_j}{\lambda_r}\right) \cdot v_j \ .$$

Damit ist $(v_1, \ldots, v_{r-1}, w, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ ein Erzeugendensystem.

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis, dann betrachten wir zur Untersuchung der linearen Unabhängigkeit

$$0 = \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \cdot v_i + \mu \cdot w + \sum_{j=r+1}^{n} \mu_j \cdot v_j \ .$$

Einsetzen von w liefert

$$0 = \sum_{i=1}^{r-1} (\mu_i + \mu\lambda_i) \cdot v_i + \mu\lambda_r \cdot v_r + \sum_{j=r+1}^{n} (\mu_j + \mu\lambda_j) \cdot v_j \ .$$

Da $\mathcal{B}$ linear unabhängig, folgt $\mu_i + \mu\lambda_i = 0$ für $i \neq r$ und $\mu\lambda_r = 0$, also $\mu = 0$ und dann $\mu_i = 0$. $\square$

Satz 15.7 (Basisauswahlsatz) *Aus jedem endlichen Erzeugendensystem läßt sich eine Basis auswählen. Insbesondere hat jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis.*

Beweis. Man nehme aus einem endlichen Erzeugendensystem einzelne Vektoren weg, so daß die reduzierte Familie immer noch ein Erzeugendensystem des Vektorraums bleibt. Ist das nicht mehr möglich, so liegt eine Basis vor. $\square$

Wir zeigen nun, daß alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums aus der gleichen Anzahl an Vektoren bestehen.

Satz 15.8 (Austauschsatz) *In einem Vektorraum V über K sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis und $(w_1, \ldots, w_r)$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren aus V. Dann ist $r \leq n$, und es gibt paarweise verschiedene Indizes $i_1, \ldots, i_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, so daß man nach Austausch von v_{i_j} durch w_j für alle $1 \leq j \leq r$ wieder eine Basis von V erhält. Nach Permutation der Indizes (Umnumerierung) erreicht man, daß $\mathcal{B}^* = (w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist.*

Beweis. Wir tauschen schrittweise die Basisvektoren aus. Im ersten Schritt finden wir ein $1 \leq s \leq n$, so daß $(v_1, \ldots, v_{s-1}, w_1, v_{s+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis ist. Nun nennen wir $v_1 \mapsto v_s$ und ordnen durch Vertauschen von $v_s \leftrightarrow w_1$ die Basis um, so daß $(w_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine Basis ist.

Dann gibt es $\mu_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $w_2 = \mu_1 \cdot w_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \cdot v_i$. Mindestens eines der λ_i ist von 0 verschieden, denn sonst wäre $w_2 = \mu_1 \cdot w_1$, und die Familie

$(w_1, \ldots, w_r)$ wäre nicht linear unabhängig. Es läßt sich deshalb ein v_s mit $2 \leq s \leq n$ durch w_2 austauschen, so daß nach Umnumerierung $(w_1, w_2, v_3 \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist.

Ist $r \leq n$, so führt die wiederholte Anwendung dieses Verfahrens auf eine Basis $(w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$. Wäre $r > n$, dann erhalten wir im n-ten Schritt eine Basis $(w_1, \ldots, w_n)$ von V. Dann ist w_{n+1} nach dieser Basis zerlegbar, so daß $(w_1, \ldots, w_r)$ für $r > n$ nicht mehr linear unabhängig wäre. □

Satz 15.9 *Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann besteht jede Basis von V aus der gleichen Anzahl von Vektoren.*

Beweis. Seien zwei Basen $\mathcal{B}_1 = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{B}_2 = (w_1, \ldots, w_r)$ von V gegeben. Ist $n < r$, dann wäre nach Satz 15.8 $\mathcal{B}_2$ nicht linear unabhängig, also keine Basis. Ist $n > r$, dann wäre nach Satz 15.8 $\mathcal{B}_1$ nicht linear unabhängig, also keine Basis. Folglich gilt $n = r$. □

Definition 15.10 In einem Vektorraum V über K heißt die durch

$$\dim_K V := \begin{cases} 0 & \text{falls } V = \{0\}, \\ n & \text{falls } V \text{ endlich erzeugt ist und eine aus } n \text{ Vektoren} \\ & \text{bestehende Basis besitzt,} \\ \infty & \text{falls } V \text{ nicht endlich erzeugt ist} \end{cases}$$

definierte Zahl die *Dimension* von V.

Offenbar ist $\dim_K(K^n) = n$ und $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$, aber $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$. Wir schreiben auch $\dim(V)$ statt $\dim_K(V)$, wenn der Körper klar ist. Die Dimension ist eine entscheidende Charakterisierung eines Vektorraums.

Satz 15.11 *Ist $W \subset V$ Untervektorraum eines endlich erzeugten Vektorraums V, so ist auch W endlich erzeugt, und es gilt*

i) $\dim(W) \leq \dim(V)$,

ii) *aus* $\dim(W) = \dim(V)$ *folgt* $W = V$.

Beweis. i) Wäre W nicht endlich erzeugt, dann gäbe es nach Satz 15.5 eine unendliche linear unabhängige Familie, die auch in V linear unabhängig wäre, Widerspruch. Ebenso kann es nach dem Austauschsatz höchstens $n := \dim_K(V)$ linear unabhängige Vektoren in W geben.

ii) Sei $\dim(W) = \dim(V) = n$ und $(w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von W. Wäre $V \neq W$, so gibt es ein $v \in V \setminus W$, das keine Linearkombination von $(w_1, \ldots, w_n)$ ist. Damit wäre $(w_1, \ldots, w_n, v)$ linear unabhängig, Widerspruch. □

Dieser Satz ist sehr hilfreich. Wenn wir schon wissen, daß ein Vektorraum V die Dimension n hat und n linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ gegeben sind, dann ist $W = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$ ein Untervektorraum, in dem $(v_1, \ldots, v_n)$

eine Basis ist. Aus der Gleichheit der Dimensionen folgt $W = V$, also ist $(v_1, \ldots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von V. Es ist wesentlich einfacher, die lineare Unabhängigkeit mit dem Gaußschen Algorithmus für lineare Gleichungssysteme zu überprüfen als die Eigenschaft des Erzeugendensystems. Daraus wird die Bedeutung der Dimension ersichtlich.

Ein weiteres nützliches Hilfsmittel ist:

Satz 15.12 (Basisergänzungssatz) *In einem endlich erzeugten Vektorraum V sei eine Familie $(w_1, \ldots, w_r)$ von linear unabhängigen Vektoren gegeben. Dann läßt sich diese Familie zu einer Basis $(w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ von V ergänzen.*

Beweis. Man nehme irgendeine Basis von V und wende den Austauschsatz an. □

In nicht endlich erzeugten (also unendlich-dimensionalen) Vektorräumen gibt es einige Besonderheiten. Zwar gilt unter Benutzung des *Auswahlaxioms*, daß auch jeder unendlich-dimensionale Vektorraum eine Basis besitzt, Jedoch kann man eine solche nicht angeben. Im Vektorraum der reellen Zahlenfolgen $V = \{(a_1, a_2, \ldots) \ : \ a_i \in \mathbb{R}\}$ sind die Vektoren

$$\{(1,0,0,0,\ldots), (0,1,0,0,\ldots), (0,0,1,0,\ldots), \ldots\}$$

zwar linear unabhängig, aber sie bilden keine Basis (auch kein Erzeugendensystem), denn z.B. wird die Folge $(1,1,1,\ldots)$ nicht davon *als endliche Linearkombination* erzeugt. Im nächsten Abschnitt behandeln wir unitäre und euklidische Vektorräume, welche auch unendlich-dimensional sein können. Oft gibt es in diesen Vektorräumen sogenannte Orthonormalbasen, so daß sich jeder Vektor als eindeutige unendliche (aber konvergente) Linearkombination darstellen läßt. Die Konvergenz erfordert dann Methoden der Analysis. Unter Verwendung des Auswahlaxioms existiert zwar auch dort eine Basis, so daß jeder Vektor eine endliche Linearkombination ist, diese Basis ist aber viel größer (überabzählbar) als die sehr natürliche Orthonormalbasis.

Definition 15.13 Sei V ein Vektorraum und $W_1, \ldots, W_r \subset V$ Untervektorräume. Dann heißt

$$W = W_1 + \cdots + W_r := \{v \in V \ : \ \text{es gibt } v_j \in W_j \text{ mit } v = v_1 + \cdots + v_r \ \}$$

die *Summe* von $W_1, \ldots, W_r$.

Offenbar ist W wieder ein Untervektorraum von V, und es gilt $\dim(\sum_{i=1}^r W_i) \leq \sum_{i=1}^r \dim(W_i)$. Für $r = 2$ können wir mehr zeigen:

Satz 15.14 *Für endlich-dimensionale Untervektorräume $W_1, W_2 \subset V$ gilt $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.*

Beweis. $W_1 \cap W_2$ ist ein endlich-dimensionaler Untervektorraum von V. Man nehme eine Basis $(v_1, \dots, v_m)$ von $W_1 \cap W_2$ und ergänze sie zu Basen $(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r)$ von W_1 und $(v_1, \dots, v_m, w_1', \dots, w_s')$ von W_2. Damit wird $W_1 + W_2$ von $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r, w_1', \dots, w_s')$ erzeugt. Wir zeigen: $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig, also Basis. Dazu sei

$$0 = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j}_{=v \in W_1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{s} \mu_k' w_k}_{=-v \in W_2} \ .$$

Das bedeutet $v \in W_1 \cap W_2$, also $\mu_j = 0$ und $\mu_k' = 0$ und somit $v = 0$. Aus der linearen Unabhängigkeit von $(v_1, \dots, v_m)$ folgt schließlich auch $\lambda_i = 0$. Damit ist ist $\dim(W_1 + W_2) = m + r + s$ sowie $\dim(W_1) = m + r$ und $\dim(W_2) = m + s$. $\square$

Beispiel 15.15 Sei $W_1 = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ und $W_2 = \operatorname{span}(v_4, v_5)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ sowie $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nach Beispiel 14.10 gilt $\dim(W_1) = 2$, insbesondere $W_1 = \operatorname{span}(v_1, v_2)$. Die Dimension $\dim(W_2) = 2$ ist klar. Setzen wir $A = (v_1, v_2, v_4, v_5)$, so suchen wir zur Bestimmung von $W_1 \cap W_2$ die Lösungsmenge $x \in \mathbb{R}^4$ des LGS $Ax = 0$ durch elementare Zeilenumformungen. Die rechte Seite $b = 0$ kann weggelassen werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \lambda_5$ und $\lambda_5 \in \mathbb{R}$ beliebig. Das bedeutet $\sum_{i=1,2,4,5} \lambda_i v_i = \lambda_5 \cdot (6v_1 - 5v_2 + 2v_4 + v_5) = 0$, d.h. Linearkombinationen von

$$\underbrace{5v_2 - 6v_1}_{\in W_1} = \underbrace{2v_4 + v_5}_{\in W_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

spannen $W_1 \cap W_2$ auf. Somit ist $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ und nach der Dimensionsformel (Satz 15.14) $\dim(W_1 + W_2) = 3$. $\triangleleft$

Aus Satz 15.14 erhält man schrittweise eine allgemeine Dimensionsformel für Summen von Vektorräumen. Dabei entstehen komplizierte Durchschnitte ($W_l \cap$

$(W_1+\cdots+W_{l-1})$ für $l = 2, \ldots, r$, die sich im allgemeinen nicht besser ausdrücken lassen. Besonders transparent ist folgende Situation:

Definition 15.16 Sei V ein Vektorraum und $W_1, \ldots, W_k$ Untervektorräume von V. Ein Vektorraum W heißt *direkte Summe* der Untervektorräume $W_1, \ldots, W_k$, bezeichnet mit

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k \;,$$

wenn gilt:

(DS1) $W = W_1 + \cdots + W_k$

(DS2) Von Null verschiedene Vektoren $w_1 \in W_1, \ldots, w_k \in W_k$ sind linear unabhängig in V.

In diesem Fall gilt $\dim(W) = \sum_{i=1}^{k} \dim(W_i)$.

16 Euklidische, unitäre und normierte Vektorräume

Definition 16.1 Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung $\langle\ .\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ mit

(S1) $\langle\ .\ \rangle$ ist linear in der zweiten Variablen, d.h.

$$\langle w, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \langle w, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle w, v_2 \rangle$$

für alle $v_1, v_2, w \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

(S2) Es gilt $\langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$ (komplexe Konjugation) für alle $v, w \in V$.

(S3) Es gilt $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v, v \rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.

Ein reeller bzw. komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt heißt *euklidischer bzw. unitärer Vektorraum* oder (in der Funktionalanalysis) *Prä-Hilbert-Raum*.

Achtung: Wir verwenden hier die Konvention der Physik. In der mathematischen Literatur wird das Skalarprodukt als *linear in der ersten Komponente definiert.* In unserer Konvention folgt aus (S1) und (S2) für die erste Komponente

$$\langle \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, v \rangle = \overline{\langle v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle} = \overline{\lambda_1 \langle v, w_1 \rangle + \lambda_2 \langle v, w_2 \rangle} = \overline{\lambda_1} \langle w_1, v \rangle + \overline{\lambda_2} \langle w_2, v \rangle.$$

In reellen Vektorräumen ist das Skalarprodukt also auch in der ersten Variablen linear. Außerdem vereinfacht sich (S2) in reellen Vektorräumen zur Symmetrie $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$. Es sei bemerkt, daß aus (S2) folgt $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$, so daß (S3) sinnvoll ist.

Beispiel 16.2 (Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$) Durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \;, \qquad \text{für} \quad \begin{array}{l} x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;, \\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

wird ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert. Dieses heißt das *kanonische Skalarprodukt* im $\mathbb{R}^n$. ◁

Beispiel 16.3 (Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^n$) Durch

$$\langle w, z\rangle := \overline{w_1}z_1 + \overline{w_2}z_2 + \cdots + \overline{w_n}z_n\ , \qquad \text{für} \quad \begin{array}{l} w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n\ , \\ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \end{array}$$

wird ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ definiert. Dieses heißt das *kanonische Skalarprodukt* im $\mathbb{C}^n$. ◁

Beispiel 16.4 Es sei $V = \mathbb{R}^2$. Dann definiert

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (2x_1 + x_2)y_1 + (x_1 + 2x_2)y_2 = (2y_1 + y_2)x_1 + (y_1 + 2y_2)x_2$$

ein Skalarprodukt. (S3) folgt aus $\langle x, x\rangle = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = x_2 = 0$. Dieses Skalarprodukt ist verschieden vom kanonischen. Tatsächlich gibt es unendlich viele verschiedene Skalarprodukte auf $\mathbb{K}^n$. ◁

Beispiel 16.5 Es sei

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\ :\ \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty\}\ .$$

Dann definiert

$$\langle f, g\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \overline{f(n)}g(n)\ , \qquad f, g \in \ell^2(\mathbb{N})$$

ein Skalarprodukt auf $\ell^2(\mathbb{N})$. Dabei wird verwendet, daß wegen $|\overline{f(n)}g(n)| = |f(n)|\,|g(n)| \leq \frac{1}{2}(|f(n)|^2 + |g(n)|^2)$ die unendliche Reihe existiert. ◁

Wir kommen nun zur wichtigsten Ungleichung für Skalarprodukte.

Satz 16.6 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) *Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$. Dann gilt*

$$\big|\langle w, v\rangle\big|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle \qquad \textit{für alle } v, w \in V$$

mit Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis. i) Sei $w \neq 0$ (für $w = 0$ ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt), somit ist $\langle w, w\rangle \neq 0$. Dann gilt für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \lambda w - v, \lambda w - v\rangle &= \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle - \overline{\lambda}\langle w, v\rangle - \lambda\langle v, w\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= \langle w, w\rangle\left|\lambda - \frac{\langle w, v\rangle}{\langle w, w\rangle}\right|^2 + \frac{1}{\langle w, w\rangle}\Big(\langle w, w\rangle\langle v, v\rangle - \big|\langle w, v\rangle\big|^2\Big)\ . \end{aligned}$$

Für $\lambda = \frac{\langle w,v\rangle}{\|w\|^2}$ wird direkt die Ungleichung von Cauchy-Schwarz erhalten.

ii) Gilt das Gleichheitszeichen, so ist

$$\langle \lambda w - v, \lambda w - v\rangle = \langle w, w\rangle \left| \lambda - \frac{\langle w, v\rangle}{\langle w, w\rangle}\right|^2$$

für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$. Damit gilt $\langle \lambda w - v, \lambda w - v\rangle = 0$ für $\lambda = \frac{\langle w,v\rangle}{\langle w,w\rangle}$, somit $v = \lambda w$. □

Definition 16.7 Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung $\| \ \| : V \to \mathbb{R}_+$ mit

(N1) $\|v\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$,

(N2) $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$ für alle $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

(N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$ (Dreiecksungleichung)

Ein Vektorraum mit Norm heißt *normierter Vektorraum*.

Satz 16.8 *Jeder euklidische und unitäre Vektorraum ist auch ein normierter Vektorraum mit* $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Beweis. (N1) und (N2) sind klar, (N3) folgt aus Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + 2\mathrm{Re}(\langle v, w\rangle) + \langle w, w\rangle \\ &\leq \langle v, v\rangle + 2|\langle v, w\rangle| + \langle w, w\rangle \\ &\leq \langle v, v\rangle + 2\sqrt{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle} + \langle w, w\rangle = (\|v\| + \|w\|)^2 .\end{aligned}$$ □

Damit liefern die Beispiele 16.2–16.5 auch Beispiele für normierte Vektorräume. Weitere Beispiele sind:

Beispiel 16.9 i) $V = \mathbb{K}^n$ ist mit $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ein normierter Vektorraum $(\mathbb{K}^n, \| \ \|_1)$. (N1) und (N2) sind klar, (N3) folgt aus der Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ für jede Komponente.

ii) Das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ liefert nach Satz 16.8 die *Standardnorm* $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.

iii) $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ist für jedes $1 \leq p < \infty$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$. Vorerst können wir die Norm nur für $p \in \mathbb{Q}$ definieren. Der typische Beweis erfordert die Minkowskische Ungleichung, die erst später bewiesen wird.

iv) Schließlich ist auch $\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$. ◁

Wir sehen also, daß es auf einem Vektorraum verschiedene Normen geben kann, und in unendlich-diemnsionalen Vektorräumen werden die unterschiedlichen Normen wirklich gebraucht! Die aus einem Skalarprodukt folgende Norm ist ausgezeichnet durch

Satz 16.10 *Es sei* $(V, \| \ \|)$ *ein normierter Vektorraum über* $\mathbb{K}$. *Die Norm* $\| \ \|$ *geht genau dann aus einem Skalarprodukt hervor, wenn die* Parallelogrammgleichung *gilt,*

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \qquad \textit{für alle } v, w \in V \ .$$

Beweisidee. Die Richtung $(\Rightarrow)$ ist einfaches Nachrechnen. Für die Umkehrung $(\Leftarrow)$ definiert man über die *Polarisationsformeln*

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \tfrac{1}{4}\big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - \mathrm{i}\|v+\mathrm{i}w\|^2 + \mathrm{i}\|v-\mathrm{i}w\|^2\big) \qquad &\text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C} \ , \\ \langle v, w\rangle &= \tfrac{1}{4}\big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\big) &\text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

zunächst Abbildungen $\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, für die man dann die Eigenschaften (S1)–(S3) zeigen muß, wobei die Parallelogrammgleichung eingeht. Für die Linearität ist das eine sehr mühsame Rechnung! □

17 Wiederholung

Begriffe

- Lineare Gleichungssysteme, Matrix-Schreibweise, erweiterte Koeffizientenmatrix
- Gaußsches Lösungsverfahren: spezielle Zeilenstufenform, Rangbedingung
- Vektorräume, Untervektorräume, lineare Unabhängigkeit, Linearkombinationen
- Erzeugendensystem, Basis, Dimension, Summen und Durchschnitte von Vektorräumen
- Skalarprodukte, Ungleichung von Cauchy-Schwarz, Norm

Methoden

- Lösung linearer Gleichungssysteme
- Bestimmung des Rangs einer Matrix
- Überprüfung einer Familie von Vektoren auf lineare Unabhängigkeit
- Zerlegung eines Vektors nach einer Basis
- Bestimmung von Basen für $W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2$ für Untervektorräume $W_1, W_2 \subset V$.

Teil IV
Metrische Räume, Abbildungen und Stetigkeit

18 Metrische Räume

Aus einer Norm läßt sich ein Abstand erhalten. Dieser ist auf allgemeineren Räumen definiert, insbesondere werden Vektorräume nicht vorausgesetzt.

Definition 18.1 Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, dem *Abstand* oder der *Metrik*, wenn gilt:

(D1) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,

(D2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),

(D3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Jeder normierte Vektorraum ist auch metrischer Raum mit Abstand $d(x, y) := \|x - y\|$. Für den $\mathbb{K}^n$ mit der aus dem Skalarprodukt erhaltenen Standardnorm gilt der *Satz des Pythagoras* $d(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$.

Über die Metrik führen wir den zentralen Begriff der *offenen Teilmengen* ein:

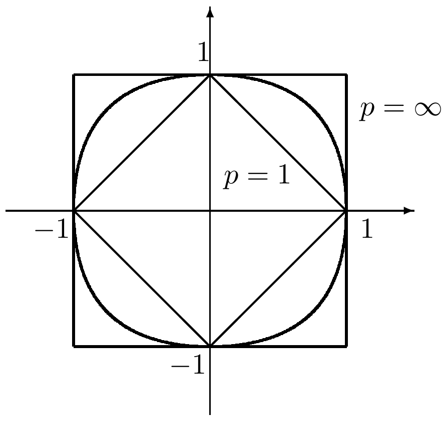
Definition 18.2 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r > 0$. Dann heißt die Teilmenge

$$K_r(a) := \{x \in X \ : \ d(a, x) < r\} \subset X$$

die *offene Kugel* in (X, d) mit Mittelpunkt a und Radius r.

Diese Kugeln können je nach Metrik verschiedene Formen haben:

Beispiel 18.3 Betrachtet werde $X = \mathbb{R}^2$ mit den Metriken $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$, die aus den Normen $\| \ \|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, aus Beispiel 16.9 induziert werden. Dann haben die Einheitskugeln mit $r = 1$ um $a = 0$ folgende Gestalt:



Definition 18.4 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

i) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung* eines Punktes $a \in X$, wenn es eine offene Kugel $K_\epsilon(a) \subset U$ gibt. Speziell heißt $K_\epsilon(a)$ die *ϵ-Umgebung* von a.

ii) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen*, wenn jeder Punkt $x \in U$ eine in U enthaltene ϵ-Umgebung besitzt, d.h. $\forall x \in U\ \exists \epsilon > 0\ :\ K_\epsilon(x) \subset U$. Außerdem wird die leere Menge $\varnothing \subset X$ als offen erklärt.

iii) Die Gesamtheit aller offenen Teilmengen von (X, d) heißt die *von d erzeugte Topologie auf X*.

iv) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist.

v) Sei $Y \subset X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $y \in X$ heißt *Randpunkt* von Y, wenn es in jeder Umgebung von y sowohl Punkte aus Y als auch aus $X \setminus Y$ gibt. Die Menge aller Randpunkte von Y heißt der *Rand* von Y und wird mit ∂Y bezeichnet.

Damit sind X und $\varnothing$ sowohl offen als auch abgeschlossen in X.

Satz 18.5 *In einem metrischen Raum (X, d) gilt:*

i) *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*

ii) *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.*

iii) *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

iv) *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Außerdem gilt (Hausdorffsches Trennungsaxiom):

v) *Zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es disjunkte offene Umgebungen U von x und V von y, d.h. $U \cap V = \varnothing$.*

Satz 18.6 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Dann gilt:*

i) *$Y \setminus \partial Y$ ist offen in X.*

ii) *$Y \cup \partial Y$ ist abgeschlossen in X.*

iii) *∂Y ist abgeschlossen in X.*

Definition 18.7 Für eine Teilmenge $Y \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) wird der *Durchmesser* definiert als $\mathrm{diam}(Y) := \sup_{x,y \in Y} d(x, y)$. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt *beschränkt*, wenn $\mathrm{diam}(Y) < \infty$.

Beispiel 18.8 Die n-dimensionale Einheitsvollkugel $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|x\|_2 \leq 1\}$ ist abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$. Ihr Rand ist die Einheitssphäre $S^{n-1} := \partial B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|x\|_2 = 1\}$, sie ist ebenfalls abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$. Es ist dann sinnvoll, offene Teilmengen von S^{n-1} zu betrachten. Jeder Durchschnitt der S^{n-1} mit einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definiert eine offene Teilmenge von S^{n-1}. Im Sinne dieser Teilmengen ist S^{n-1} dann offen und abgeschlossen zugleich. Es gilt $\operatorname{diam}(B^n) = 2$. $\triangleleft$

Verschiedene Metriken (und Normen) könnten verschiedene Topologien erzeugen. In unendlich-dimensionalen Vektorräumen ist das in der Tat der Fall, im endlich-dimensionalen Fall aber nicht. Wir betrachten hier nur Topologien, die von einer Norm erzeugt werden:

Definition 18.9 Zwei Normen $\|\;\|_a$ und $\|\;\|_b$ auf einem Vektorraum V heißen *äquivalent*, wenn es positive Zahlen $c, C > 0$ gibt, so daß für beliebige $x \in V$ gilt $c\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C\|x\|_a$.

Im Äquivalenzfall enthält jede offene Kugel bezüglich $\|\;\|_a$ eine offene Kugel bezüglich $\|\;\|_b$, und umgekehrt.

Satz 18.10 *Je zwei Normen auf einem n-dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{K}$ sind äquivalent.*

Beweis. Zunächst zeigen wir für $V = \mathbb{R}^n$, daß eine beliebige Norm $\|\;\|$ äquivalent ist zur Standardnorm $\|\;\|_2 = \sqrt{\langle\;,\;\rangle}$. Es sei $(e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis. Dann gilt für $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ nach Dreiecksungleichung und Cauchy-Schwarz

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}\,\underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2}}_{C} = C\|x\|_2\;.$$

Zur Umkehrung betrachten wir die Einheitssphäre $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Sei $c := \inf_{x \in S^{n-1}} \|x\|$. Wir zeigen: $c > 0$, dann ist $x = \frac{1}{\|y\|_2} y \in S^{n-1}$ für beliebige $y \neq 0$, und damit $c \leq \|x\| = \frac{\|y\|}{\|y\|_2}$. (Für $y = 0$ ist die Äquivalenz klar.) Angenommen, es wäre $c = 0$. Dann gibt es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_k \in S^{n-1}$, so daß die Folge $(\|x_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen gegen 0 konvergiert.

Wir betrachten die Komponenten x_{ki} von $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$. Wegen $0 \leq \|x\| \leq C$ ist die Folge $(x_{k1})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Damit enthält sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine gegen a_1 konvergente Teilfolge $(x_{k_m 1})_{m\in\mathbb{N}}$. Analog konstruiert man eine gegen a_2 konvergente Teilfolge von $(x_{k_m 2})_{m\in\mathbb{N}}$, usw., bis schließlich eine Teilfolge von (x_k) erhalten ist, die komponentenweise gegen $a = (a_1, \dots, a_n)$ konvergiert. Diese konvergente Teilfolge sei wieder mit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$

bezeichnet. Dann gilt $a_1^2+\cdots+a_n^2 = \lim_{k\to\infty}(x_{k1}^2+\cdots+x_{kn}^2) = 1$, d.h. $a \in S^{n-1}$. Andererseits gilt nach Dreiecksungleichung

$$\|a\| \le \|a-x_k\| + \|x_k\| \le C\|a-x_k\|_2 + \|x_k\| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} .$$

Nun ist $\lim_{k\to\infty}\|a-x_k\|_2 = \lim_{k\to\infty}\sqrt{|a_1-x_{k1}|^2+\dots|a_n-x_{kn}|^2} = 0$ und $\lim_{k\to\infty}\|x_k\| = 0$, also $\|a\| = 0$ und damit $a = 0$, im Widerspruch zu $a \in S^{n-1}$.

Sei nun V ein beliebiger n-dimensionaler Vektorraum und $\| \ \|_a$, $\| \ \|_b$ zwei Normen auf V. Wir wählen eine Basis $\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$ von V. Dann sind

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_{a,\mathcal{B}} := \|x_1v_1+\cdots+x_nv_n\|_a , \qquad \|(x_1,\dots,x_n)\|_{b,\mathcal{B}} := \|x_1v_1+\cdots+x_nv_n\|_b$$

zwei Normen auf $\mathbb{K}^n$. Somit gibt es $c, C > 0$, so daß für alle $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}$ gilt

$$c\|(x_1,\dots,x_n)\|_{a,\mathcal{B}} \le \|(x_1,\dots,x_n)\|_{b,\mathcal{B}} \le C\|(x_1,\dots,x_n)\|_{a,\mathcal{B}} .$$

Folglich ist $c\|v\|_a \le \|v\|_b \le \|v\|_a$ für beliebige $v \in V$. □

Definition 18.11 Sei (X,d) ein metrischer Raum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus X. Die Folge (x_k) heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in X$ gibt mit folgenden äquivalenten Eigenschaften:

i) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d(a,x_k) < \epsilon$ für alle $k \ge n$.

ii) Zu jeder Umgebung U von a gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in U$ für alle $k \ge n$.

iii) Es gilt $\lim_{k\to\infty} d(x_k,a) = 0$.

Im Konvergenzfall heißt $a \in X$ der *Grenzwert* der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, und man schreibt $\lim_{k\to\infty} x_k = a$.

Existiert der Grenzwert, dann ist er nach Dreiecksungleichung eindeutig bestimmt: Wären $d(x_k,a_1) < \epsilon$ und $d(x_k,a_2) < \epsilon$ für alle $k \ge n$, so ist auch $d(a_1,a_2) \le d(a_1,x_k) + d(x_k,a_2) < 2\epsilon$ für beliebige $\epsilon > 0$, und damit $d(a_1,a_2) = 0$ und $a_1 = a_2$.

Die Definition überträgt sich auf Konvergenz und Grenzwert für Folgen in normierten Vektorräumen $(V, \| \ \|)$ mit der durch die Norm induzierten Metrik. Nach Satz 18.10 ist im endlich-dimensionalen Fall der Konvergenzbegriff unabhängig von der Wahl der Norm. Insbesondere konvergiert im $\mathbb{R}^n$ eine Punktfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = (x_{k1},\dots,x_{kn})$ genau dann gegen $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$, wenn für jede Koordinate $1 \le i \le n$ die Folge x_{ki} gegen a_i konvergiert.

Satz 18.12 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subset X$ ist genau dann abgeschlossen in X, wenn für jede in X konvergente Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $y_k \in Y$ gilt $\lim_{k\to\infty} y_k = x \in Y$.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei $Y \subset X$ abgeschlossen und $x = \lim_{k\to\infty} y_k$ mit $y_k \in Y$. Angenommen, $x \notin Y$, also $x \in X \setminus Y$. Da $X \setminus Y$ offen ist, gibt es in $X \setminus Y$ eine ϵ-Umgebung U_ϵ um x. Da x der Grenzwert der Folge (y_k) ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $y_k \in U_\epsilon \subset X \setminus Y$ für alle $k \geq n$, Widerspruch.

($\Leftarrow$) Die Grenzwerte aller konvergenten Folgen von Punkten aus Y liegen in Y. Wir zeigen: $X \setminus Y$ ist offen. Angenommen, es gibt einen Punkt $\tilde{x} \in X \setminus Y$, der keine ϵ-Umgebung in $X \setminus Y$ besitzt. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $y_k \in Y$ mit $d(\tilde{x}, y_k) < \epsilon_k := \frac{1}{k+1}$. Auf diese Weise wird eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus Y konstruiert, die gegen $\tilde{x}$ konvergiert. Nach Voraussetzung ist $\tilde{x} \in Y$, Widerspruch.
□

Definition 18.13 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus X heißt *Cauchy-Folge*, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $d(x_n, x_m) < \epsilon$ für alle $m, n \geq k$.

Die Definition überträgt sich auf Cauchy-Folgen in normierten Vektorräumen $(V, \| \ \|)$ mit der durch die Norm induzierten Metrik.

Satz 18.14 *Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent in (X, d) mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $m, n \geq k$. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \epsilon$. □

Wie in der eindimensionalen Analysis besteht der Sinn der Cauchy-Folge ist, daß man den Grenzwert nicht kennen muß. Das wirft die Frage auf, wann eine Cauchy-Folge auch konvergent ist.

Definition 18.15 Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in ihm konvergiert.

Ein vollständiger normierter Vektorraum $(V, \| \ \|)$ heißt *Banach-Raum*.

Ein euklidischer oder unitärer Vektorraum $(V, \langle \ , \ \rangle)$, der bezüglich $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ vollständig ist, heißt *Hilbert-Raum*.

Satz 18.16 *Jeder endlich-dimensionale normierte Vektorraum ist vollständig.*

Beweis. Nach Satz 18.10 genügt es in endlich-dimensionalen Vektorräumen, die Vollständigkeit bezüglich einer Norm nachzuweisen. Nach Wahl einer Basis können wir uns dann auf $\mathbb{K}^n$ beschränken. Sei also $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich der $\| \ \|_1$-Norm von Punkten $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn}) \in \mathbb{K}^n$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k, l \geq N$ gilt

$$\|x_k - x_l\|_1 = |x_{k1} - x_{l1}| + \cdots + |x_{kn} - x_{ln}| < \epsilon \ .$$

Also ist $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ für jedes $i = 1, \ldots, n$. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ konvergiert $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a_i \in \mathbb{K}$. Damit konvergiert (x_k) gegen $a = (a_1, \ldots, a_n)$. □

19 Abbildungen und Funktionen

Definition 19.1 Seien X, Y Mengen, dann versteht man unter einer *Abbildung von* X *nach* Y eine Vorschrift f, die jedem $x \in X$ eindeutig ein $f(x) \in Y$ zuordnet. Wir schreiben $f : X \to Y$ für die Abbildung zwischen Mengen und $f : x \mapsto f(x)$ für die Zuordnung der Elemente. Die Menge

$$G(f) := \{(x, f(x)) \ : \ x \in X\} \subset X \times Y$$

heißt der *Graph* von f.

Ist z.B. $X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$, dann ist der Graph eine Kurve im $\mathbb{R}^2$.

Definition 19.2 Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen Mengen und seien $M \subset X$ und $N \in Y$ Teilmengen. Dann heißt

$$f(M) := \{y \in Y \ : \ \exists x \in M \text{ mit } y = f(x)\} \subset Y$$

das *Bild* von M in Y unter f und

$$f^{-1}(N) := \{x \in X \ : \ f(x) \in N\} \subset X$$

das *Urbild* von N in X.

Zu beachten ist, daß für eine einelementige Teilmenge $N = \{y\}$ das Urbild $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\}) \subset X$ aus mehreren Elementen bestehen kann oder auch leer sein kann. Deshalb ist f^{-1} im allgemeinen *keine Abbildung* von Y nach X.

Definition 19.3 Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

- *injektiv*, falls für $x, x' \in X$ aus $f(x) = f(x')$ stets $x = x'$ folgt
- *surjektiv*, falls es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $y = f(x)$
- *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist

Falls f bijektiv ist, dann ist die *Umkehrabbildung* $f^{-1} : Y \to X$ gegeben durch $f^{-1} : y \mapsto x = f^{-1}(y)$ mit $y = f(x)$.

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ Abbildungen, so ist die *Komposition* dieser Abbildungen gegeben durch

$$g \circ f : X \to Z \ , \quad x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)) \ .$$

Satz 19.4 *Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, d.h. für Abbildungen* $f : X \to Y$*,* $g : Y \to Z$ *und* $h : Z \to W$ *gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f : X \to W\ .$$

Beweis. Für $x \in X$ gilt

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)\ .$$

□

Tragen X, Y weitere Strukturen, z.B. Abstände oder sind Vektorräume oder sogar Körper, dann läßt sich über eine Abbildung $f : X \to Y$ sehr viel mehr sagen.

Definition 19.5 Eine *komplexwertige (bzw. reellwertige) Funktion* auf einer Menge X ist eine Abbildung $f : X \to \mathbb{C}$ bzw. $f : X \to \mathbb{R}$. Die Menge X heißt *Definitionsbereich*, das Bild $f(X)$ heißt *Wertebereich* von f.

Die üblichen Rechenregeln für komplexe Zahlen übertragen sich punktweise auf Funktionen $f, g : X \to \mathbb{C}$ (mit $c \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}
&(f+g)(x) := f(x) + g(x)\ , \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)\ , \quad (cf)(x) := c \cdot f(x)\ ,\\
&\tfrac{f}{g}(x) := \tfrac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{falls } g(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in X\ ,\\
&\bar{f}(x) := \overline{f(x)}\ , \qquad (\mathrm{Re}\, f)(x) := \mathrm{Re}(f(x))\ , \quad (\mathrm{Im}\, f)(x) := \mathrm{Im}(f(x))\ .
\end{aligned}$$

Sind $f : X \to \mathbb{C}$ und $g : Y \to \mathbb{C}$ Funktionen mit $f(X) \subset Y$, dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : X \to \mathbb{C}$ erklärt durch $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

Beispiel 19.6

i) Polynome $f \in \mathbb{C}[x]$ mit $x \in X \subset \mathbb{C}$, also $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

ii) Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wenn X Teilmenge des Konvergenzkreises (eventuell ohne den Rand) der Potenzreihe ist, z.B. $f(x) = \exp(x)$ für $x \in \mathbb{C}$ oder $f(x) = B_s(x)$ für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ und $s \in \mathbb{C}$ oder $x \in]-1, 1[\subset \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{Q}$.

iii) Rationale Funktionen. Sind $f, g \in \mathbb{C}[x]$ Polynome, dann heißt die auf $\mathbb{C} \setminus A$ definierte Funktion $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ eine *rationale Funktion*, wobei $A \subset \mathbb{C}$ alle Nullstellen von g enthält. Durch Polynomdivision läßt sich der Definitionsbereich maximal erweitern.

iv) Potenzfunktion mit rationalen Exponenten: Ist $X \subset \mathbb{R}_+$ und $s \in \mathbb{Q}$, dann wird durch $f : x \mapsto x^s$ die Potenzfunktion $f : X \to \mathbb{R}_+$ definiert

v) Zusammensetzungen dieser Funktionen, wenn Definitions- und Wertebereich passen, z.B. $f : x \mapsto x^2 + 2x + 3$ für $x \in \mathbb{R}$ (reelles Polynom ohne Nullstelle) und $g : y \mapsto \sqrt{y}$ für $y \in \mathbb{R}_+$, dann ist $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

vi) Die Bildung von Real- und Imaginärteil sind Funktionen $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Die Bildung des Betrags ist eine Funktion $\mathrm{abs} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$. ◁

Für rationale Funktionen gilt

Satz 19.7 (Partialbruchzerlegung) *Für $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ und $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $f(x) = \alpha_0(x - \alpha_1)^{\nu_1} \cdots (x - \alpha_n)^{\nu_n}$ ein Polynom vom Grad $\deg(f) = \nu_1 + \cdots + \nu_n$. Dann gibt es zu $g \in \mathbb{C}[x]$ ein eindeutig bestimmtes Polynom q vom Grad $\deg(g) - \deg(\mathrm{f})$ (mit $q = 0$ falls $\deg(g) < \deg(\mathrm{f})$) und eindeutig bestimmte Koeffizienten $b_{k,j_k} \in \mathbb{C}$ mit $k = 1, \dots, n$ und $j_k = 1, \dots \nu_k$, so daß für alle $x \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ gilt*

$$\frac{g(x)}{f(x)} = q(x) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j_k=1}^{\nu_k} \frac{b_{k,j_k}}{(x - \alpha_k)^{j_k}} = q(x) + \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{b_{k,1}}{(x - \alpha_k)^1} + \frac{b_{k,2}}{(x - \alpha_k)^2} + \cdots + \frac{b_{k,\nu_k}}{(x - \alpha_k)^{\nu_k}} \Big) .$$

Diese Darstellung heißt Partialbruchzerlegung.

Beweis. Das Polynom q wird durch Division mit Rest erhalten, $g = q \cdot f + r$. Damit genügt es, den Satz für rationale Funktionen $\frac{g}{f}$ mit $\deg(g) < \deg(f)$ und $q = 0$ zu beweisen. Für $r = 1$ ist dieser Beweis die Übungsaufgabe 2 von Blatt 6, der sich dann auf den allgemeinen Fall übertragen läßt. □

Definition 19.8 Sei $X \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt

i) *monoton wachsend* bzw. *streng monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x < y$ gilt $f(x) < f(y)$ bzw. $f(x) \leq f(y)$;

ii) *monoton fallend* bzw. *streng monoton fallend*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x < y$ gilt $f(x) > f(y)$ bzw. $f(x) \geq f(y)$;

iii) *(streng) monoton*, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Jede streng monotone (reellwertige) Funktion auf $X \subset \mathbb{R}$ ist injektiv und besitzt damit eine Umkehrfunktion $g : f(X) \to \mathbb{R}$, die im gleichen Sinn streng monoton ist. In diesem Fall gehen die Graphen von f und g durch Spiegelung an der Diagonalen $y = x$ auseinander hervor:

$$G(f) = \{(x, y) \ : \ y = f(x) \ , \ x \in X\} \quad \Leftrightarrow \quad G(g) = \{(y, x) \ : \ y = f(x) \ , \ x \in X\} \ .$$

20 Stetigkeit

Definition 20.1 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $a \in X$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig* in a, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß

$$d_Y\big(f(x), f(a)\big) < \epsilon \qquad \text{für alle } x \in X \text{ mit } d_X(x, a) < \delta\ .$$

Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig in* X, wenn f in jedem Punkt $a \in X$ stetig ist.

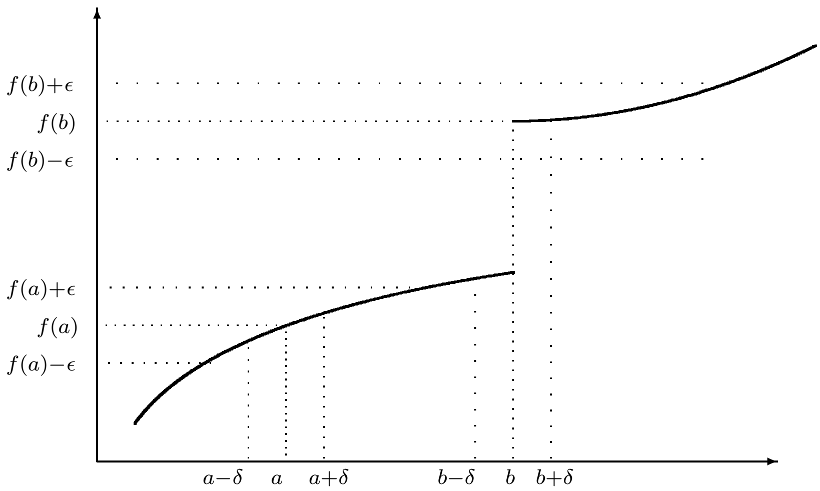
Zu beachten ist, daß δ von ϵ und im allgemeinen auch von a abhängt: wird ϵ verkleinert, so muß im allgemeinen auch δ verkleinert werden, damit die Relationen richtig bleiben. Die Stetigkeitsforderung besagt, daß das immer möglich ist. Die Stetigkeitsforderung besagt also: Betrachte zu $a \in X$ eine beliebige ϵ-Umgebung von $f(a) \in Y$. Dann soll es immer eine δ-Umgebung $K_\delta(a)$ von a geben, deren Bild vollständig in der ϵ-Umgebung von $f(a)$ enthalten ist:

$$f : X \to Y \text{ stetig in } a \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(K_\delta(a)) \subset K_\epsilon(f(a))\ .$$

Insbesondere heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, mit $D \subset \mathbb{R}$ oder $D \subset \mathbb{C}$, *stetig im Punkt* $a \in D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \qquad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta\ .$$

Wir diskutieren die geometrische Bedeutung der Definition für eine reellwertige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$.



Die abgebildete Funktion ist stetig in a, aber unstetig in b. Denn für die abgebildete Wahl von ϵ ist zu *jeder Wahl* von $\delta > 0$ das Bild des Intervalls $]b - \delta, b + \delta[$ *nicht enthalten*[1] im Intervall $]f(b) - \epsilon, f(b) + \epsilon[$.

[1]Das Beispiel zeigt auch, daß die Formulierung der Stetigkeit in b *nicht* lautet: Aus $|f(x) - f(b)| < \epsilon$ folgt $|x - b| < \delta$. So etwas wäre erfüllt.

Beispiel 20.2 *Die Funktion $f(z) = z^2$ ist stetig in ganz $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ fest gewählt und $\epsilon > 0$ beliebig. Es gilt $|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| = |z - z_0|\,|z + z_0| \leq |z - z_0|(|z - z_0| + 2|z_0|)$. Es genügt deshalb, $\delta(\delta + 2|z_0|) \leq \epsilon$ zu wählen, z.B. $\delta := \min(1, \frac{\epsilon}{1+2|z_0|})$. □

Beispiel 20.3 *Die Funktion $f(z) = \exp(z)$ ist stetig in ganz $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ fest gewählt und $\epsilon > 0$ beliebig. Es gilt

$$|\exp(z) - \exp(z_0)| = |\exp(z_0) \cdot (\exp(z - z_0) - 1)| \leq \exp(|z_0|)|\exp(z - z_0) - 1| \,.$$

Nach der Abschätzung in Satz 11.6.iii) für $N = 0$ gilt für $|z - z_0| < 1$ die Relation $|\exp(z - z_0) - 1| < 2|z - z_0|$. Somit genügt es, $\delta := \min(1, \frac{\epsilon}{2\exp(|z_0|)}$ zu wählen. □

Eine wichtige Klasse stetiger Abbildungen ist:

Definition 20.4 Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine Konstante $L \geq 0$ gibt, so daß für alle $x, x' \in X$ gilt

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq L \cdot d_X(x, x') \,.$$

Jede Lipschitz-stetige Abbildung ist stetig: Man wähle $\delta := \frac{\epsilon}{L}$ für $L \neq 0$ und $\delta = 1$ für $L = 0$.

Satz 20.5 *Es sei $(V, \|\ \|)$ ein normierter Vektorraum. Dann ist die Norm, aufgefaßt als Abbildung $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ zwischen metrischen Räumen, Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante* 1.

Beweis. Zu zeigen ist $\big|\|x\| - \|y\|\big| = d(\|x\|, \|y\|) \leq d(x, y) = \|x - y\|$. Das folgt aus den Dreiecksungleichungen $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ und $\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|x - y\| + \|x\|$. □

Beispiel 20.6 Folgende Funktionen Lipschitz-stetig:

i) die konstante Funktion $f(x) = c$ (mit $L = 0$),

ii) lineare Funktionen $f(x) = ax + b$ (mit $L = |a|$),

iii) $f(x) = |x|$, $f(x) = \mathrm{Re}(x)$, $f(x) = \mathrm{Im}(x)$, $f(x) = \overline{x}$ jeweils mit $L = 1$. ◁

Beispiel 20.7 *Für $k \in \mathbb{N}^\times$ ist die Wurzelfunktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) := \sqrt[k]{x}$ stetig.*

Beweis. Sei $x_0 > 0$. Für $y \geq 0$ gilt $y^k \leq (1+y)^k - 1$, also $(\sqrt[k]{\frac{x}{x_0}} - 1)^k \leq \frac{x}{x_0} - 1$ und $\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0} \leq \sqrt[k]{x - x_0}$ für $x \geq x_0$ bzw. (Tausch $x_0 \leftrightarrow x$) $|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}| \leq \sqrt[k]{|x - x_0|}$ für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}_+$. Dann genügt es, $\delta = \epsilon^k$ zu wählen. □

Ein historisch bedeutsames Beispiel ist die nirgends stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Satz 20.8 (Folgenkriterium der Stetigkeit) *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen X, Y ist genau dann stetig im Punkt $a \in X$, wenn für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus X mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ gilt*

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a) .$$

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei $f : X \to Y$ stetig in a. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $d\big(f(x), f(a)\big) < \epsilon$ für alle $x \in X$ mit $d(x, a) < \delta$. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige gegen a konvergente Folge in X, dann gibt es nach Definition des Grenzwertes ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $d(x_n, a) < \delta$ für alle $n \geq N$. Also ist $d\big(f(x_n), f(a)\big) < \epsilon$ für alle $n \geq N$ wegen der Stetigkeit von f in a, und $f(a)$ ist Grenzwert der Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y.

($\Leftarrow$) Die Folgenbedingung sei für alle gegen a konvergenten Folgen erfüllt. Angenommen, f wäre nicht stetig in a. Das bedeutet: Es gibt ein $\epsilon > 0$, so daß für alle $\delta > 0$ gilt: Aus $d(x, a) < \delta$ folgt $d\big(f(x), f(a)\big) \geq \epsilon$. Wähle $\delta = \frac{1}{n+1}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in X$ mit $d(x_n, a) < \frac{1}{n+1}$. Damit gibt es eine gegen a konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die gilt $d\big(f(x_n), f(a)\big) \geq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. $\square$

Beispiel 20.9 Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dann ist f nicht stetig in $a = (0, 0)$, denn für die gegen $(0, 0)$ konvergente Folge $z_k = (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1})$ gilt $f(z_k) = 1 \neq 0$. Für die Folge $z_k = (\frac{1}{k+1}, 0)$ gilt dagegen $f(z_k) = 0$. Es reicht also nicht, das Folgenkriterium für genügend viele Beispiel-Folgen zu überprüfen! $\triangleleft$

Die Rechenregeln für Grenzwerte aus Satz 6.3 übertragen sich auf stetige Funktionen:

Satz 20.10 *Die Funktionen $f, g : X \to \mathbb{C}$ seien stetig in $a \in X$. Dann gilt:*

i) *Die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ sind stetig in a.*

ii) *Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch $g(x) \neq 0$ in einer Umgebung $V \subset X$ von a, und die Funktion $\frac{f}{g} : V \to \mathbb{C}$ ist stetig in $a \in V$.*

Beweis. i) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, so gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ und $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)$. Satz 6.3 liefert $\lim_{n\to\infty}(f + g)(x_n) = (f+g)(a)$ und $\lim_{n\to\infty}(f\cdot g)(x_n) = (f\cdot g)(a)$. Nach dem Folgenkriterium sind dann $f + g$ und $f \cdot g$ stetig.

ii) Wir zeigen: Ist g stetig in $a \in X$, dann enthält $V := \{x \in X : |g(x)| \geq \frac{1}{2}|g(a)|\} \subset X$ eine offene Kugel um a. Für $g(a) = 0$ ist $V = X$, ansonsten gibt es zu $\epsilon = \frac{1}{2}g(a)$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ mit $d(x,a) < \delta$ gilt $|g(x) - g(a))| < \epsilon$. Dann gilt (Lemma 3.8)

$$|g(x)| \geq \big| |g(a)| - |g(x) - g(a)| \big| \geq \frac{1}{2}|g(a)| \qquad \text{für } d(x,a) < \delta \,.$$

Somit ist $X \cap K_\delta(a) \subset V$, und $X \cap K_\delta(a)$ enthält als offene Teilmenge eine offene Kugel. Damit ist V Umgebung von a.

Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge von Punkten $x_k \in V$, dann konvergiert $(\frac{f}{g}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{f}{g}(a)$. □

Beispiel 20.11 i) Die reellwertige Funktion $f(x) = x^s$ für $x \in \mathbb{R}_+^*$ und $s \in \mathbb{Q}$ ist stetig.

ii) Jedes Polynom ist auf ganz $\mathbb{C}$ stetig.

iii) Jedes Polynom in mehreren Variablen

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=0}^{n_n} a_{k_1\ldots,k_m} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$$

ist stetig auf $\mathbb{C}^m$ bzw. $\mathbb{K}^m$

iv) Jede rationale Funktion ist stetig auf ihrem Definitionsbereich.

v) Die Projektion

$$p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n \,, \qquad p(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$$

ist stetig. ◁

Satz 20.12 *Seien $f : X \to Y$ stetig in a und $g : Y \to Z$ stetig in $f(a)$, dann ist $f \circ g : X \to Z$ stetig in a.*

Beweis. Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, dann konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ und schließlich $(g(f(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $g(f(a))$. □

Beispiel 20.13 i) Mit $f : X \to \mathbb{C}$ sind auch $|f|$, $\overline{f}$, $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ stetig als Komposition mit den stetigen Funktionen $g(y) = |y|$ usw.

ii) Für stetige Funktionen $f, g : X \to \mathbb{C}$ sind auch $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|)$ und $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|)$ stetig.

Satz 20.14 *Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist im Inneren ihres Konvergenzkreises stetig.*

Beweis. Es sei $R(f)$ der Konvergenzradius von $f(z)$ und $|z_0| < r < R(f)$. Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n < \frac{\epsilon}{3}$. Da das Polynom $\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n$ stetig ist, gibt es ein $r - |z_0| > \delta > 0$, so daß $\left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z_0^n \right| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$. Dann ist $|z| \leq |z - z_0| + |z_0| < \delta + |z_0| < r$, so daß

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z_0^n \right| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n z| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n z_0| < \epsilon \,. \qquad \square$$

21 Der Zwischenwertsatz

Wir können die Definition der Stetigkeit auch so formulieren:

Satz 21.1 *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen X, Y ist genau dann stetig im Punkt $a \in X$, wenn zu jeder offenen Umgebung $V \subset Y$ von $f(a) \in V$ eine offene Umgebung $U \subset X$ von $a \in U$ existiert mit $f(U) \subset V$.*

Daraus ergibt sich:

Satz 21.2 *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig auf ganz X (d.h. in jedem Punkt $a \in X$), wenn das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subset Y$ offen in X ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Ist $f^{-1}(V) = \varnothing$, so ist diese Menge offen. Ansonsten gibt es zu jedem Punkt $a \in f^{-1}(V)$, also $f(a) \in V$, wegen der Offenheit von V eine ϵ-Umgebung $K_\epsilon(f(a)) \subset V$. Wegen der Stetigkeit von f existiert eine δ-Umgebung $K_\delta(a) \subset X$ mit $f(K_\delta(a)) \subset K_\epsilon(f(a)) \subset V$. Also ist $K_\delta(a) \subset f^{-1}(V) \subset X$, d.h. $f^{-1}(V)$ ist offen.

($\Leftarrow$) Sei $a \in X$ beliebig. Eine beliebige offene Umgebung $V \subset Y$ von $f(a)$ enthält eine offene Kugel $K_\epsilon(f(a)) \subset Y$. Deren Urbild $f^{-1}(K_\epsilon(f(a))$ ist nach Voraussetzung offen, enthält also eine δ-Umgebung von a. Damit ist f stetig. $\square$

Durch Bildung der Komplemente folgt: Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig auf ganz X, wenn das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder abgeschlossenen Menge $A \subset Y$ abgeschlossen in X ist.

Insbesondere gilt:

Satz 21.3 *Für eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gilt:*

i) *$U := \{x \in X \;:\; f(x) < c\}$ ist offen, ebenso $U' := \{x \in X \;:\; f(x) > c\}$.*

ii) *$A := \{x \in X \ : \ f(x) \leq c\}$ ist abgeschlossen, ebenso $A := \{x \in X \ : \ f(x) \geq c\}$.*

iii) *$N := \{x \in X \ : \ f(x) = c\}$ ist abgeschlossen.* □

Definition 21.4 Ein metrischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es keine Zerlegung $X = U \cup V$ mit U, V offen und $U, V \neq \varnothing$ und $U \cap V = \varnothing$ gibt.

In $\mathbb{R}$ führt diese Definition auf Intervalle:

Satz 21.5 *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ mit mindestens zwei verschiedenen Punkten ist genau dann zusammenhängend, wenn X ein Intervall ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei $X = I$ ein Intervall. Angenommen, $I = U \cup V$ mit U, V offen und $U, V \neq \varnothing$ und $U \cap V = \varnothing$. Dann gibt es Punkte $u \in U \subset I$ und $v \in V \subset I$ mit $u < v$ oder $u > v$. Sei $u < v$, dann ist $[u, v] \subset I$. Sei $s := \sup\{[u, v] \cap U\}$. Dann gibt es eine gegen s konvergente Folge von Punkten aus $[u, v] \cap U$. Da $U = I \setminus V$ in I abgeschlossen ist, ist $s \in U$, also ist $]s, v] \subset V$. Andererseits ist U offen in I, enthält also auch eine Kugel $K_\epsilon(s)$, Widerspruch.

Sei umgekehrt X kein Intervall. Dann gibt es $u < s < v \in \mathbb{R}$ mit $u, v \in X$ und $s \notin X$. Also sind $U = X \cap]-\infty, s[$ und $V = X \cap]s, \infty[$ offen, disjunkt und nichtleer, außerdem ist $X = U \cup V$. Somit ist X nicht zusammenhängend. □

Satz 21.6 *Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen X, Y. Ist X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.*

Beweis. Wäre $f(X)$ nicht zusammenhängend, so gäbe es disjunkte nichtleere offene Mengen U, V mit $f(X) = U \cup V$. Wegen der Stetigkeit von f sind $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offen, nichtleer und disjunkt, denn $f(x)$ liegt entweder in U oder in V. Somit wäre $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, Widerspruch. □

Satz 21.7 (Zwischenwertsatz) *Sei X ein zusammenhängender metrischer Raum, $a, b \in X$ und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis. Nach Satz 21.6 ist $f(X)$ zusammenhängend. Ist $f(a) \neq f(b)$, dann ist $f(X)$ nach Satz 21.5 ein Intervall. Für $f(a) = f(b)$ ist nichts zu zeigen. □

Für Funktionen auf Intervallen gilt insbesondere:

Satz 21.8 (Zwischenwertsatz für Intervalle) *Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert zu jedem $\gamma \in [f(a), f(b)]$ bzw. $\gamma \in [f(b), f(a)]$ ein $c \in [a, b]$ mit $\gamma = f(c)$.*

Wir geben einen alternativen Beweis für $f(a) < f(b)$. Durch Intervallhalbierung konstruiert man eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = a$, $b_0 = b$ und $|[a_n, b_n]| = \frac{1}{2^n}|[a, b]|$, so daß $f(a_n) \leq \gamma \leq f(b_n)$. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen den in jedem Intervall enthaltenen Punkt $c \in [a_n, b_n]$. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq \gamma \qquad \text{und} \qquad f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq \gamma \;,$$

also $f(c) = \gamma$. □

Der Zwischenwertsatz beschreibt die anschauliche Tatsache, daß man stetige Funktionen lückenlos durchzeichnen kann. Das ist eine weitere Version der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Der Zwischenwertsatz ist nützlich in vielen Existenzbeweisen:

Satz 21.9 (Existenz n-ter Wurzeln) *Jedes reelle Polynom $P(x) = x^n - \alpha$ mit $\alpha > 0$ hat eine positive Nullstelle.*

Beweis. Es ist $P(0) = -\alpha < 0$ und $P(1 + \alpha) = (1 + \alpha)^n - 1 > 0$ (binomische Formel). Da Polynome stetig sind, hat P in $[0, 1 + \alpha]$ mindestens eine Nullstelle y mit $y^n = \alpha$. □

Die Eindeutigkeit der Nullstelle ergibt sich aus der Monotonie von $P(x)$.

Satz 21.10 *Jedes reelle Polynom $P(x) = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i x^i$ ungeraden Grades ($a_{2n+1} \neq 0$) besitzt in $\mathbb{R}$ mindestens eine Nullstelle.*

Beweis. (für $a_{2n+1} > 0$) Wegen $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ gibt es reelle Zahlen $a < b$ mit $P(a) < 0$ und $P(b) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es mindestens eine Punkt $c \in [a, b]$ mit $P(c) = 0$. □

Satz 21.11 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige streng monotone Funktion. Dann bildet f das Intervall I bijektiv auf das Intervall $I' := f(I)$ ab, und die Umkehrfunktion $f^{-1} : I' \to I$ ist ebenfalls streng monoton (im gleichen Sinn) und stetig.*

Beweis. Nach Satz 21.6 ist $I' := f(I)$ zusammenhängend, nach Satz 21.5 ein Intervall. Damit bildet f als streng monotone Funktion I bijektiv auf I' ab. Entsprechend wird jedes Teilintervall von I bijektiv auf ein Teilintervall abgebildet, und zwar (wegen der strengen Monotonie) offene Intervalle auf offene und abgeschlossene Intervalle auf abgeschlossene. Insbesondere ist das Urbild in I' unter f^{-1} jeder offenen Umgebung in I wieder offen. Damit ist f^{-1} stetig. □

22 Grenzwerte von Funktionen

Stetigkeit ist eng verbunden mit dem Begriff des Grenzwertes für Funktionen.

Definition 22.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Punkt $a \in X$ heißt *Häufungspunkt einer Teilmenge* $D \subset X$, wenn jede ϵ-Umgebung $K_\epsilon(a)$ von a unendlich viele Punkte aus D enthält.

Ein Häufungspunkt von D ist nicht notwendigerweise in D enthalten. Für die offene Kreisscheibe $D = K_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |a - z| < r\}$ sind alle Punkte des abgeschlossenen Kreises $\overline{K_r(a)} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |a - z| \leq r\}$ Häufungspunkte, aber die Randpunkte $|z - a| = r$ gehören nicht zu D.

Definition 22.2 Es sei $a \in X$ ein Häufungspunkt von $D \subset X$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ hat in a den *Grenzwert* λ, wenn

i) es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $|f(x) - \lambda| < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $d(x, a) < \delta$, oder

ii) für *jede* gegen a konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus D gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda$.

In diesem Fall schreibt man $\lambda = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Wie im Satz 20.8 sind beide Versionen i) und ii) des Grenzwertes äquivalent. Gehört a zum Definitionsbereich von f, dann ist f nach Satz 20.8 in a genau dann stetig, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Damit gibt es folgende Möglichkeiten für Unstetigkeiten einer Funktion f im Punkt a:

i) f hat in a keinen Grenzwert,

ii) f hat in a einen Grenzwert ungleich $f(a)$.

Die Bedeutung des Grenzwertes von Funktionen besteht darin, daß man Funktionen unter Umständen stetig über den Definitionsbereich hinaus *fortsetzen* kann.

Beispiel 22.3 Für $z \in D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei $f(z) = \frac{\exp(cz)-1}{z}$ für $c \in \mathbb{C}$. Wir zeigen: $\lim_{z\to 0} f(z) = c$. Auf D gilt

$$\frac{\exp(cz) - 1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(cz)^n}{zn!} = c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c(cz)^k}{(k+1)!} \ .$$

Nach Satz 11.7 gibt es zu $r = 1$ ein $c_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$\Big|\frac{\exp(cz) - 1}{z} - c\Big| \leq \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c(cz)^k}{(k+1)!}\Big| < c_1|z| \ .$$

für alle $|z| < 1$. Wähle $\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{c_1})$.

Man kann übrigens beweisen, daß $f(z) = \exp(cz)$ die einzige Lösung der beiden Bedingungen $f(w)f(z) = f(w+z)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-1}{z} = c$ ist (siehe Königsberger, *Analysis 1*, §8.1).

Damit ist die Funktion $F(z) = \begin{cases} \dfrac{\exp(cz)-1}{z} & \text{für } z \neq 0 \\ c & \text{für } z = 0 \end{cases}$ stetig auf ganz $\mathbb{C}$.

Für des Rechnen mit Grenzwerten gelten die üblichen Regeln (der Beweis ist ähnlich wie in Satz 6.3 und Satz 20.10.

Satz 22.4 *Gilt* $\lim_{x\to a} f(x) = \lambda$ *und* $\lim_{x\to a} g(x) = \mu$, *so folgt* $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lambda + \mu$, $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \lambda \cdot \mu$ *und, falls* $\mu \neq 0$, $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lambda}{\mu}$.

Ist die Komposition $g \circ f$ *definiert und ist* $\lim_{x\to a} f(x) = y$ *und* g *stetig in* y, *dann folgt* $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = g(y)$.

Im Reellen kann man zusätzlich einseitige Grenzwerte definieren:

Definition 22.5 Es sei a ein Häufungspunkt von $D \subset \mathbb{R}$ und $D_- := D \cap\,]-\infty, a[$ und $D_+ := D \cap\,]a, \infty[$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ hat in a *linksseitig* bzw. *rechtsseitig* den Grenzwert λ, falls die Einschränkung von f auf D_- bzw. D_+ den Grenzwert λ hat. In diesem Fall schreibt man

$$\lambda = \lim_{x\nearrow a} f(x) = f(a-) \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda = \lim_{x\searrow a} f(x) = f(a+)\ .$$

Ist $a \in D$ und $f(a) = f(a-)$ bzw. $f(a) = f(a+)$, dann heißt f in a *linksseitig* bzw. *rechtsseitig* stetig.

Beispiel 22.6 Es sei $f(x) = [x] \in \mathbb{Z}$ der *ganze Teil* einer reellen Zahl x, d.h. $[x] = \sup\{g \in \mathbb{Z} \ :\ g \leq x\}$. Dann hat f in $g \in \mathbb{Z}$ linksseitig den Grenzwert $g-1$ und rechtsseitig den Grenzwert g und ist rechtsseitig stetig.

Über die einseitigen Grenzwerte kann man den Grenzwert einer im Reellen definierten Funktion in $\pm\infty$ definieren:

Definition 22.7 Der Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ einer Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ sei nach oben unbeschränkt. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Grenzwert von f in ∞, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N gibt mit $|f(x)-\lambda| < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $x > N$. In diesem Fall schreibt man $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda$. Analog ist ein Grenzwert in $-\infty$ definiert.

Beispiel 22.8 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x} - x) = \frac{1}{2}$ für $x \geq 0$.

Beweis. Für $x > 1$ gilt unter Verwendung der Binomialreihe

$$\sqrt{x^2+x} - x = x\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\Big) = x\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{x^n} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k+1}\frac{1}{x^k}$$

Da der Konvergenzradius gleich 1 ist, gibt es nach Satz 11.7 ein $c_1 \in \mathbb{R}$ mit $\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k+1}\frac{1}{x^k}\Big| < c_1\frac{1}{x}$ für alle $x > 1$. $\square$

Dieses Beispiel demonstriert bereits das allgemeine Prinzip der Zurückführung von Grenzwerten in ∞ auf Grenzwerte in 0:

Lemma 22.9 *Setzt man $g(\xi) = f(\frac{1}{\xi})$ für $\frac{1}{\xi} \in D$, dann gilt: f besitzt genau dann in ∞ einen Grenzwert, wenn g rechtsseitig in 0 einen Grenzwert besitzt, und dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g(0+)$.*

Analog gilt gegebenenfalls $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g(0-)$.

Schließlich führen wir $\pm\infty$ als uneigentliche Grenzwerte reellwertiger Funktionen ein:

Definition 22.10 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ den *uneigentlichen Grenzwert* ∞ bzw. $-\infty$, wenn es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ eine Umgebung $V \subset D \setminus \{x_0\}$ gibt, so daß für alle $x \in V$ gilt $f(x) > M$ bzw. $f(x) < M$.

Beispiel 22.11 Für Polynome $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $n \geq 1$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{falls } a_n > 0 \\ -\infty & \text{falls } a_n < 0 \end{cases}$$

Ist $a_n > 0$, so gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\infty & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für $a_n < 0$ tauschen sich die Vorzeichen.

23 Die Exponentialfunktion

23.1 Logarithmus und komplexe Potenzen

Die Exponentialfunktion $\exp(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ ist nach Beispiel 20.3 in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ stetig. Insbesondere ist auch die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und nach Bemerkung iv) im Anschluß an Satz 11.6 streng monoton wachsend. Wegen $\exp(0) = 1$ und $\lim_{x\to\infty}\exp(x) = \infty$ nimmt exp auf $\mathbb{R}_+$ jeden Wert $y \geq 1$ genau einmal an. Dann folgt aus $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, daß exp auf $\mathbb{R}_-$ jeden Wert $0 < y \leq 1$ genau einmal annimmt, d.h. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\times$ ist bijektiv. Somit existiert die Umkehrfunktion, der (natürliche) *Logarithmus*:

$$\ln : \mathbb{R}_+^\times \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \quad \ln(x) := \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exp(y) = x\}\ ,$$

und nach Satz 21.11 ist $\ln : \mathbb{R}_+^\times \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Speziell ist $\ln(1) = 0$.

Satz 23.1 *Es gilt die Funktionalgleichung* $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}_+^\times$ *sowie* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Beweis. i) Setze $\xi := \ln(x)$ und $\eta := \ln y$, dann ist $\exp(\xi+\eta) = \exp(\xi)\cdot\exp(\eta) = x \cdot y$. Einsetzen in ln liefert die Behauptung.

ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $x_n \neq 0$ für alle n und $y_n := \ln(1+x_n)$. Wegen $\ln(1) = 0$ ist auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Dann gilt $\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = \frac{y_n}{\exp(y_n)-1}$, und nach Beispiel 22.3 konvergiert $(\frac{y_n}{\exp(y_n)-1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1. □

Die Funktionalgleichung des Logarithmus führt auf folgende Definition allgemeiner komplexer Potenzen:

$$x^z := \exp(z \ln x)\ , \qquad x \in \mathbb{R}_+^\times\ , \quad z \in \mathbb{C}\ .$$

Insbesondere gilt $e^z = \exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^\times$. Die so definierten komplexen Potenzen haben folgende Eigenschaften:

i) Als Komposition stetiger Funktionen ist $x \mapsto x^z$ stetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}_+^\times$ (dabei ist z festgehalten), und $z \mapsto x^z$ ist stetig in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ (dabei ist x festgehalten).

ii) Für reelle Exponenten $a \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto x^a$ streng monoton wachsend falls $a > 0$ und streng monoton fallend falls $a < 0$ (für $a = -b$ mit $b > 0$ gilt $x^{-b} = \exp(-b\ln x) = \frac{1}{\exp(b\ln x)} = \frac{1}{x^b}$). Folglich bildet die Funktion $x \mapsto x^a$ den Definitionsbereich $\mathbb{R}_+^\times$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^\times$ ab.

iii) Für $x, y \in \mathbb{R}_+^\times$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die Identitäten

$$(x^a)^b = x^{a\cdot b}\ , \qquad x^z \cdot y^z = (xy)^z\ .$$

1) $(x^a)^b := \exp(b\ln(x^a)) = \exp(b\ln(\exp(a\ln x))) = \exp(ba\ln x) = x^{ab}$, dabei ist $x^a \in \mathbb{R}_+^\times$ entscheidend.
2) $x^z \cdot y^z = \exp(z\ln x)\cdot\exp(z\ln y) = \exp(z(\ln x + \ln x)) = \exp(z\ln(xy)) = (xy)^z$.

iv) Es gelten folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} x^a = \begin{cases} \infty & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} x^a = \begin{cases} 0 & \text{für } a > 0 \\ \infty & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \quad \text{für } a > 0\ , \qquad \lim_{x\to 0} x^a \ln x = 0 \quad \text{für } a > 0\ .$$

Die erste Zeile folgt aus der Tatsache, daß $x \mapsto x^a$ streng monoton ist und $\mathbb{R}_+^\times$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^\times$ abbildet. In der ersten Gleichung der zweiten Zeile verwende $\lim_{y\to\infty} \frac{y}{\exp(ay)} = 0$ für $a > 0$ und setze $y = \ln x$.

v) Als Konsequenz aus $\lim_{x\to 0} x^a = 0$ für $a > 0$ kann $x \mapsto x^a$ stetig nach $x = 0$ fortgesetzt werden, so daß $f_a(x) = \begin{cases} x^a & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ eine stetige Funktion $f_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ist (für $a > 0$).

Satz 23.2 *Für alle $s \in \mathbb{C}$ und $x \in]-1, 1[$ gilt*

$$(1+x)^s = B_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n , \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n .$$

Beweis. Für $s \in \mathbb{Q}$ hatten wir $(1+x)^s = B_s(x)$ bereits in Satz 11.5.ii) gezeigt. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und $s \in \mathbb{C}^\times$ schreiben wir

$$\frac{B_s(z) - 1}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s,z) , \qquad f_n(s,z) := \frac{1}{s}\binom{s}{n} z^n = \frac{(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} z^n .$$

Es gilt $\left|\frac{f_{n+1}(s,z)}{f_n(s,z)}\right| = \frac{|s-n|}{n+1}|z|$, so daß für $|z| < 1$ und $|s| < M$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s,z)$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent ist. Sie definiert deshalb für festes s eine stetige Funktion in z, andererseits kann sie für festes z umgeordnet werden in eine Potenzreihe in s, die in jedem Punkt $s \in \mathbb{C}$ mit $|s| < M$, insbesondere in $s = 0$, stetig ist. Wegen $f_n(0,z) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ gilt somit

$$L(z) := \lim_{s\to 0} \frac{B_s(z) - 1}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n , \qquad |z| < 1 .$$

Zusammen mit dem Additionstheorem $B_{s+t}(z) = B_s(z) \cdot B_t(z)$ aus Satz 11.5.i) folgt aus Beispiel 22.3, daß für festes z gilt $B_s(z) = \exp(sL(z))$. Für $s = 1$ ergibt sich $B_1(z) = (1+z) = \exp(L(z))$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Für $z = x \in]-1, 1[$ wird durch Logarithmieren $\ln(1+x) = L(x)$ und dann $B_s(x) = \exp(sL(x)) = (1+x)^s$ erhalten. □

Die Logarithmus-Reihe $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ ist zunächst nur für $|x| < 1$ erklärt. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert sie auch für $x = 1$ (alternierende harmonische Reihe). Da die Logarithmus-Funktion $\ln(1+x)$ für $x > -1$ erklärt ist, ist zu vermuten, daß die alternierende harmonische Reihe gegen $\ln 2$ konvergiert. Nach dem Leibniz-Kriterium gilt für $0 \leq x < 1$

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{x^{k+1}}{k+1} .$$

Alle Funktionen in dieser Ungleichung sind stetig in $x = 1$, so daß wir im Limes $x \to 1$ erhalten

$$\Big|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big| \leq \frac{1}{k+1} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 \;.$$

23.2 Trigonometrische Funktionen

Für die Exponentialfunktion gilt $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$, deshalb für rein imaginäre Zahlen $z = \mathrm{i}x$ mit $x \in \mathbb{R}$ zunächst $\overline{\exp(\mathrm{i}x)} = \exp(-\mathrm{i}x) = \frac{1}{\exp(\mathrm{i}x)}$, also

$$\big|e^{\mathrm{i}x}\big|^2 = \exp(\mathrm{i}x)\exp(-\mathrm{i}x) = 1 \;.$$

Damit liegt jeder Punkt $e^{\mathrm{i}x}$ auf dem Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \;;\; |z| = 1\}$. Wir definieren

$$\cos x := \mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}x}) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}) \;, \qquad \sin x := \mathrm{Im}(e^{\mathrm{i}x}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}) \;.$$

Damit gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x \;, \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \;.$$

Insbesondere sind $\sin, \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ stetige Funktionen.

Satz 23.3 *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\cos(x + y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \;, \quad \sin(x + y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \;,$$

die Potenzreihendarstellungen

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \;, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sowie der Grenzwert $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Beweis. Zum Beweis der Additionstheoreme zerlegt man $e^{\mathrm{i}(x+y)} = e^{\mathrm{i}x} \cdot e^{\mathrm{i}y}$ nach Real- und Imaginärteil. Die Potenzreihen ergeben sich aus der Exponentialfunktion unter Beachtung, daß i^n reell ist für n gerade und rein imaginär für n ungerade. Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ folgt aus der Reihendarstellung des Sinus und Satz 11.7. □

Wir kommen nun zur Definition der Zahl π:

Satz 23.4 *Der Cosinus hat im Intervall* $[0, 2]$ *genau eine Nullstelle, die mit* $\frac{\pi}{2}$ *bezeichnet wird. Es gilt* $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ *und* $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Beweis. Wir zeigen, daß $\cos : [0,2] \to [-1,1]$ streng monoton fallend ist mit $\cos 0 = 1 > 0$ und $\cos 2 < 0$. Der Zwischenwertsatz liefert dann die Existenz einer Nullstelle, aus der Monotonie folgt ihre Eindeutigkeit. Insbesondere is $0 < \pi < 4$.

Die Reihen für cos und sin sind alternierend. Für $x \in]0,2]$ bilden die Beträge der Summanden a_k in der Cosinusreihe bzw. der Sinusreihe eine streng monoton fallende Nullfolge ab $k = 1$ bzw. $k = 0$. Nach der Fehlerabschätzung im Leibniz-Kriterium (Satz 8.10) gilt damit für $x \in]0,2]$

$$\underbrace{1 - \frac{x^2}{2}}_{s_1} < \cos x < \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}_{s_3}, \qquad \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{s_1} < \sin x < \underbrace{x}_{s_0},$$

insbesondere ist $\cos 2 < -\frac{1}{3}$ und $\sin x > 0$ für $x \in]0,2]$. Die Monotonie des Cosinus folgt aus folgenden Differenzengleichung

$$\cos x - \cos y = \cos(\tfrac{x+y}{2} + \tfrac{x-y}{2}) - \cos(\tfrac{x+y}{2} - \tfrac{x-y}{2}) = -2 \sin \tfrac{x-y}{2} \sin \tfrac{x+y}{2}\ .$$

Ist $0 \leq y < x \leq 2$, so ist die rechte Seite negativ. $\square$

Somit gelten $e^{\frac{i\pi}{2}} = \mathrm{i}$ und damit $e^{i\pi} = -1$, $e^{\frac{3i\pi}{2}} = -\mathrm{i}$ und $e^{2\pi i} = 1$ und damit

$$e^{\mathrm{i}(x+\frac{\pi}{2})} = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x}\ , \qquad e^{\mathrm{i}(x+\pi)} = -e^{\mathrm{i}x}\ , \qquad e^{\mathrm{i}(x+\frac{3\pi}{2})} = -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}x}\ , \qquad e^{\mathrm{i}(x+2\pi)} = e^{\mathrm{i}x}\ .$$

Zerlegung nach Real- und Imaginärteil liefert die folgenden Periodizitäten für Cosinus und Sinus:

$$\begin{array}{llll} \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x\ , & \cos(x+\pi) = -\cos x\ , & \cos(x+\frac{3\pi}{2}) = \sin x\ , & \cos(x+2\pi) = \cos x\ , \\ \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x\ , & \sin(x+\pi) = -\sin x\ , & \sin(x+\frac{3\pi}{2}) = -\cos x\ , & \sin(x+2\pi) = \sin x\ . \end{array}$$

Wegen $\cos x = \cos(-x)$ sind $\pm\frac{\pi}{2}$ die einzigen Nullstellen des Cosinus im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Aus $\cos(x+\pi) = -\cos x$ folgt dann, daß $x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ die einzigen Nullstellen des Cosinus sind, und entsprechend sind $x_k = k\pi$ die einzigen Nullstellen des Sinus.

Satz 23.5 $e^z = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = 2\mathrm{i}\pi k$ *für* $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. ($\Leftarrow$) ist klar. Umgekehrt sei $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt $|e^z| = e^x|e^{\mathrm{i}y}| = e^x$, also $x = 0$ und dann $1 = e^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y$. Folglich ist $\cos y = 1$ und $\sin y = 0$, der Sinus liefert zunächst $y = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, wegen $\cos(0 + \pi) = -\cos(0) = -1$ und der 2π-Periodizität sind aber nur $y = 2\pi k$ Lösungen. $\square$

Folglich besitzt jede komplexe Zahl $z \neq 0$ die Darstellung $z = re^{\mathrm{i}\phi}$ mit $r = |z| \in \mathbb{R}_+^\times$ und $\phi \in \mathbb{R}$, wobei ϕ nur bis auf Addition eines Vielfachen von 2π bestimmt ist.

23.3 Weitere trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Außerhalb der Nullstellen von cos bzw. sin werden Tangens und Cotangens definiert als

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{(k+\tfrac{1}{2})\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$$
$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

Diese sind stetig und π-periodisch, und als Hauptzweig wählt man das Intervall $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ für den Tangens und das Intervall $]0,\pi[$ für den Cotangens.

Satz 23.6 i) cos *ist im Intervall* $[0,\pi]$ *streng monoton fallend und bildet somit* $[0,\pi]$ *bijektiv auf* $[-1,1]$ *ab. Die damit existierende stetige Umkehrfunktion ist* $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.

ii) sin *ist im Intervall* $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *streng monoton wachsend und bildet somit* $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *bijektiv auf* $[-1,1]$ *ab. Die damit existierende stetige Umkehrfunktion ist* $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

iii) tan *ist im Intervall* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *streng monoton wachsend und bildet* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *bijektiv auf* $\mathbb{R}$ *ab. Die damit existierende stetige Umkehrfunktion ist* $\arctan : \mathbb{R} \to\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Beweis. i) cos ist nach dem Beweis von Satz 23.4 streng monoton fallend in $[0,\frac{\pi}{2}]$, und wegen $\cos(\pi-x) = -\cos(-x) = -\cos x$ ist cos auch in $[\frac{\pi}{2},\pi]$ streng monoton fallend.

ii) folgt aus i) mit $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2}-x)$.

iii) Da sin in $[0,\frac{\pi}{2}[$ streng monoton wächst und cos dort streng monoton fällt und beide nichtnegativ sind, ist tan streng monoton wachsend in $[0,\frac{\pi}{2}[$. Wegen $\tan(-x) = -\tan x$ ist tan streng monoton wachsend in $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Wegen $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist tan nach oben unbeschränkt in $[0,\frac{\pi}{2}[$, so daß tan das Intervall $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet. □

Satz 23.7 *Es gilt* $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ *für* $x \in\ ]-1,1[$.

Beweis. Zunächst ist $\tan x = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}} = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{e^{2\mathrm{i}x}-1}{e^{2\mathrm{i}x}+1}$. Auflösen nach $e^{2\mathrm{i}x}$ ergibt

$$e^{2\mathrm{i}x} = \frac{1+\mathrm{i}\tan x}{1-\mathrm{i}\tan x} \qquad \overset{x=\arctan y}{\Rightarrow} \qquad e^{2\mathrm{i}\arctan y} = \frac{1+\mathrm{i}y}{1-\mathrm{i}y}\ .$$

Im Beweis von Satz 23.2 hatten wir $(1+z) = \exp(L(z))$ für $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|<1$ gezeigt, wobei $L(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$. Somit gilt $\dfrac{1+\mathrm{i}y}{1-\mathrm{i}y} = \exp(L(\mathrm{i}y)-L(-\mathrm{i}y))$.

Für gerades $n = 2k$ ist $(\mathrm{i}y)^{2k} = (-\mathrm{i}y)^{2k}$, deshalb heben sich in $L(\mathrm{i}y) - L(-\mathrm{i}y)$ die geraden Potenzen von y auf und die ungeraden verdoppeln sich:

$$L(\mathrm{i}y) - L(-\mathrm{i}y) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}(\mathrm{i}y)^{2n+1} = 2\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1} .$$

Aus $\exp(2\mathrm{i}\arctan y) = \exp(L(\mathrm{i}y) - L(-\mathrm{i}y))$ und Satz 23.5 folgt

$$\arctan y + 2k\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1} , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Einsetzen von $y = 0$ liefert $k = 0$. □

Interessant ist der Punkt $x = 1$, denn $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1$, also $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$. Die Arcustangensreihe ist für $x = 1$ nicht mehr absolut konvergent, jedoch konvergent nach dem Leibniz-Kriterium. Da $\Big|\tan x - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}\Big|$ stetig ist und durch den nachfolgenden Term $\frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$ abgeschätzt werden kann, konvergiert die Reihe für $x = 1$ gegen $\arctan 1$, also $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Über das Additionstheorem des Tangens kann $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ gezeigt werden, was eine sehr viel schneller konvergierende Reihendarstellung liefert.

Aus der Exponentialfunktion werden auch die folgenden hyperbolischen Funktionen Cosinus hyperbolicus, Sinus hyperbolicus, Tangens hyperbolicus, Cotangens hyperbolicus erhalten:

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) , \qquad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) , \qquad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} ,$$

Alle diese Funktionen sind stetig in $\mathbb{R}$, und $\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}$ ist stetig in $\mathbb{R}^\times$. Es gelten $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y , \\ \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y , \end{aligned}$$

die Potenzreihendarstellungen

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} , \qquad \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sowie der Grenzwert $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$. Weiter gilt:

i) cosh wächst streng monoton auf $\mathbb{R}_+$ mit Bild $\cosh(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \;:\; y \geq 1\}$, die Umkehrfunktion ist $\operatorname{arcosh} : \{y \in \mathbb{R} \;:\; y \geq 1\} \to \mathbb{R}_+$

ii) sinh wächst streng monoton auf $\mathbb{R}$ mit Bild $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, die Umkehrfunktion ist $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

iii) tanh wächst streng monoton auf $\mathbb{R}$ mit Bild $\tanh(\mathbb{R}) =]-1, 1[$, die Umkehrfunktion ist $\operatorname{artanh} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$.

Diese Umkehrfunktionen lassen sich durch den Logarithmus darstellen:

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) , \qquad \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) ,$$
$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} .$$

24 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

Definition 24.1 Sei A Teilmenge eines metrischen Raumes X. Unter einer *offenen Überdeckung* von A versteht man eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von offenen Teilmengen $U_i \subset X$ mit $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, d.h. zu jedem Punkt $x \in A$ gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$.

i) Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heißt *überdeckungskompakt* oder kurz *kompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$ gibt, so daß $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. (Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft)

ii) Eine Teilmenge K eines metrischen Raums X heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge von Punkten aus K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in K liegt. (Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft)

Es wird in i) also nicht gefordert, daß man A durch endlich viele offene Teilmengen von X überdecken kann. Das geht immer, denn A läßt sich durch X selbst überdecken, und X ist offen. Die Forderung ist, daß man jede exotische unendliche Überdeckung von A auf eine endliche Überdeckung reduzieren kann. Insbesondere wird durch Definition 24.1 für $A = X$ die Kompaktheit und Folgenkompaktheit metrischer Räume erklärt.

Satz 24.2 *Es sei X ein metrischer Raum.*

i) *Jede kompakte Teilmenge $A \subset X$ ist auch folgenkompakt.*

ii) *Jede folgenkompakte Teilmenge $K \subset X$ ist beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis. i) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus A und $K = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Ist K endlich, so hat (a_k) eine konstante Teilfolge. Sei K also unendlich. Angenommen, K hat keinen Häufungspunkt in A. Dann besitzt jeder Punkt $x \in A$ eine offene Umgebung $U(x) \subset X$, die nur endlich viele Punkte aus K enthält. Die offenen Umgebungen $U(x)$ bilden eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, genügen bereits endlich viele $U(x_1), \dots, U(x_n)$ zur Überdeckung, und A enthielte nur endlich viele Punkte aus K, Widerspruch. Sei $a \in A$ Häufungspunkt von K. Dann enthält jede offene Kugel um a mit Radius $\frac{1}{l+1}$ unendlich viele Punkte aus

K. Setze $k_l := \min(k \ : d(a_k, a) < \frac{1}{l+1})$. Dann ist $(a_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_k), die gegen a konvergiert.

ii) Angenommen, K wäre unbeschränkt. Dann gäbe es zu beliebigem $y \in K$ eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $d(x_k, y) > k$, welche keine konvergente Teilfolge besitzt, Widerspruch. Wäre K nicht abgeschlossen, dann gäbe es eine konvergente Folge von Punkten aus K mit Grenzwert außerhalb K, Widerspruch. □

Satz 24.2.i) besagt also:

Satz 24.3 (Bolzano-Weierstraß) *Sei $A \subset X$ kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes X und $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus A. Dann gibt es einen Punkt $a \in A$ und eine Teilfolge $\{y_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ von $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.* □

Eine wichtige Klasse folgenkompakter Mengen ist durch konvergente Folgen einschließlich ihres Grenzwertes gegeben. Wir zeigen, daß solche Mengen sogar kompakt sind:

Satz 24.4 *Sei X ein metrischer Raum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus X, die gegen einen Grenzwert $a \in X$ konvergiert. Dann ist die Teilmenge*

$$A := \{x_k \ : \ k \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$$

kompakt in X.

Beweis. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von A. Dann gibt es einen Index $m \in I$ mit $a \in U_m$. Die Teilmenge $U_m \subset X$ ist offen, enthält also die offene Kugel $K_\epsilon(a)$ für ein $\epsilon > 0$. Da $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, gibt es einen Index $n \in \mathbb{N}$, so daß $x_k \in K_\epsilon(a)$ für alle $k \geq n$. Jeder Punkt x_k mit $0 \leq k < n$ liegt in irgendeiner Umgebung U_{i_k} mit $i_k \in I$. Damit gilt

$$A \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_{n-1}} \cup U_m ,$$

so daß A kompakt ist. □

Ganz entscheidend im Beweis ist die Tatsache, daß der Grenzwert a zu A gehört: Es sei z.B. $A := \{\frac{1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Dann ist A nicht folgenkompakt (der Grenzwert gehört nicht zu A) und damit auch nicht kompakt.

Satz 24.5 *Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist beschränkt.*

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. Nach Satz 24.4 ist $\{x_k \ : \ k \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ kompakt, damit nach Satz 24.2.ii) beschränkt. Die durch Weglassen von $\{a\}$ entstehende Menge bleibt beschränkt. □

Es läßt sich (mit größerem Schreibaufwand) zeigen, daß in beliebigen metrischen Räumen kompakt und folgenkompakt äquivalente Eigenschaften sind. In allgemeinen topologischen Räumen gilt zwar Satz 24.2.i), nicht jedoch die Umkehrung. Wir beschränken uns hier auf den Beweis, daß in endlich-dimensionalen normierten Räumen die Umkehrung gilt, indem wir zeigen:

Satz 24.6 *Für eine Teilmenge K eines endlich-dimensionalen normierten Vektorraums V sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) *K ist beschränkt und abgeschlossen.*

ii) *K ist kompakt (Heine-Borel).*

iii) *K ist folgenkompakt (Bolzano-Weierstraß).*

Wegen Satz 24.2 ist nur i)$\Rightarrow$ii) zu zeigen. Wir formulieren zunächst einen Zwischenschritt als eigenen Satz:

Satz 24.7 *Sei X ein metrischer Raum, $Y \subset X$ eine kompakte Teilmenge und $A \subset Y$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist A kompakt.*

Beweis. $X \setminus A$ ist offen. Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A, dann ist $Y \subset X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i\in I} U_i$. Da Y kompakt, genügen endlich viele U_i mit $X \setminus A$ zur Überdeckung von Y und damit auch von A. □

Beweis von Satz 24.2. Sei zunächst $V = \mathbb{R}^n$. Wegen Satz 24.7 genügt es zu zeigen, daß der abgeschlossene Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;:\; a_\nu \leq x_\nu \leq b_\nu\} \subset \mathbb{R}^n$$

kompakt ist, denn jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ liegt in einem abgeschlossenen Quader.

Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine unendliche offene Überdeckung von $Q_0 = Q$, die nicht auf eine endliche reduziert werden kann. Durch Halbierung aller Kanten zerlegen wir Q in 2^n gleich große Teilquader der halben Größe. Es gibt dann mindestens einen abgeschlossenen Teilquader, den wir mit Q_1 bezeichnen, der nicht durch endlich viele U_i überdeckt werden kann. Durch Wiederholung des Verfahrens finden wir eine Folge

$$Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots$$

von abgeschlossenen Quadern mit $\operatorname{diam}(Q_k) = \frac{1}{2^k} \operatorname{diam}(Q)$, so daß jeder von ihnen nicht durch endlich viele U_i überdeckt werden kann.

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es einen Punkt $x \in Q_k$ für alle k. Dieser Punkt x liegt in irgendeiner Umgebung U_j mit $j \in I$. Da U_j offen, gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß $K_\epsilon(x) \subset U_i$. Dann finden wir aber auch ein $p \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{diam}(Q_p) = \frac{1}{2^p} \operatorname{diam}(Q) < \epsilon$. Somit gilt $Q_p \subset U_j$, d.h. die Quader lassen sich im Widerspruch zur Annahme durch endlich viele U_i überdecken. Also ist Q kompakt.

Sei nun V beliebiger n-dimensionaler reeller normierter Vektorraum[2]. Wähle eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren $v_j \in V$ und setze

$$K' = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \ : \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \in K\} \subset \mathbb{R}^n \ .$$

Ist K beschränkt und abgeschlossen, so auch K', und K' ist kompakt. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von $K \subset V$. Jede Teilmenge $U_i \subset V$ definiert eine Teilmenge

$$U_i' = \{(\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{in}) \ : \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} v_j \in U_i\} \subset \mathbb{R}^n \ .$$

Dann ist $(U_i')_{i \in I}$ eine Überdeckung von K', und es gibt endlich viele Indizes $i_1, \ldots, i_p$ mit $K' \subset U_{i_1}' \cup \cdots \cup U_{i_p}'$. Dann ist auch $K \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_p}$, d.h. K ist kompakt. □

Daraus ergibt sich folgende Formulierung des Satzes von Bolzano-Weierstraß:

Satz 24.8 *Jede beschränkte Folge in einem endlich-dimensionalen normierten Vektorraum V besitzt eine konvergente Teilfolge.* □

Satz 24.9 *Es sei $(V^n, \| \ \|)$ ein n-dimensionaler normierter Vektorraum. Dann gilt: Die Vollkugel $B^n := \{x \in V^n \ : \ \|x - a\| \leq r\} \subset V^n$ um $a \in V^n$ mit Radius r und die Sphäre $S^{n-1} := \{x \in V^n \ : \ \|x - a\| = r\} \subset V^n$ sind kompakt.*

Beweis. Die Norm ist nach Satz 20.5 Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1, also sind B^n und S^{n-1} abgeschlossen nach Satz 21.3, außerdem beschränkt (klar) und damit kompakt nach Satz 24.6. □

Die Umkehrung von Satz 24.2.ii) gilt nicht in beliebigen metrischen Räumen. Es läßt sich z.B. zeigen, daß die Einheitsvollkugel in einem normierten Vektorraum V genau dann kompakt ist, wenn V endlich-dimensional ist.

Nach diesen Vorbereitungen können wir eine wichtige Eigenschaft stetiger Abbildungen beweisen:

Satz 24.10 *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen X, Y. Ist $A \subset X$ kompakt, dann ist auch $f(A) \subset Y$ kompakt.*

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von $f(A)$. Aus der Stetigkeit von f folgt, daß $V_i := f^{-1}(U_i)$ offen ist. Dann ist $A \subset \bigcup_{i \in I} V_i$, aber tatsächlich genügen endlich viele V_i zur Überdeckung: $A \subset V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n}$, also $f(A) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. □

Daraus ergibt sich der Satz vom Minimum/Maximum:

[2]Für komplexe Vektorräume identifiziere $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$.

Satz 24.11 *Sei $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes X und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Einschränkung $f|_A$ auf A beschränkt (d.h. $|f(y)| < \infty$ für alle $y \in A$) und nimmt ihr Supremum und Infimum auf A an, d.h. es gibt $p, q \in A$ mit*

$$f(p) = \sup\{f(y) \ : \ y \in A\} \qquad \text{und} \qquad f(q) = \inf\{f(y) \ : \ y \in A\} .$$

Beweis. Nach Satz 24.10 ist $f(A) \subset \mathbb{R}$ kompakt und nach Satz 24.2 beschränkt (und abgeschlossen), besitzt also ein Supremum M und Infimum m. Wegen der Abgeschlossenheit von $f(A)$ gilt $m, M \in f(A)$. □

Der Satz vom Minimum/Maximum ist ein mächtiges Hilfsmittel in Beweisen. Wir können hier einen Beweis angeben für den

Satz 24.12 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 mit komplexen Koeffizienten besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle.*

Beweis. Es genügt, das Polynom $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0$ zu betrachten.

i) Wir zeigen: $|P|$ *nimmt auf* $\mathbb{C}$ *ein Minimum an.* Für $|z| \geq 1$ gilt:

$$P(z) = z^n(1 + r(z)) , \qquad r(z) := \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} ,$$
$$|r(z)| \leq \frac{A}{|z|} \text{ mit } A := |a_{n-1}| + \cdots + |a_0| .$$

Damit gilt $|r(z)| \leq \frac{1}{2}$ für $|z| \geq R := \max(1, 2A)$ und weiter $|P(z)| \geq \frac{|z|}{2} \geq A$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$. Auf der kompakten Kreisscheibe $\overline{K_0(R)}$ um 0 mit Radius R nimmt die stetige Funktion $|P(z)|$ ein Minimum an, wegen $|P(0)| = |a_0| \leq A$ ist dieses dann das Minimum in ganz $\mathbb{C}$.

ii) Wir zeigen: *Ist $P(z_0) \neq 0$, dann hat $|P(z)|$ in z_0 kein Minimum.* (Also wird das Minimum $|P(z_0)| = 0$ in einem Punkt $z_0 \in \overline{K_0(R)}$ angenommen.)
Dazu betrachten wir das Polynom $Q(w) := \frac{P(w+z_0)}{P(z_0)}$. Wegen $Q(0) = 1$ gilt $Q(w) = 1 + b_1 w^1 + \cdots + b_n w^n$. Da P nicht konstant ist, verschwinden nicht alle b_i. Sei $1 \leq k \leq n$ der kleinste Index mit $b_k \neq 0$. Durch Skalieren[3] $w \mapsto \beta w$ mit $\beta^k = -\frac{1}{b_k}$ erreicht man $Q(\beta w) = 1 - w^k + w^{k+1}Q'(w)$ für ein neues Polynom $Q'(w)$. Dieses ist auf $\overline{K_0(R)}$ beschränkt: $|Q'(w)| \leq c$ mit $c > 0$. Somit gilt $|w^{k+1}Q'(w)| < |w|^k$ für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $0 < |w| < \min(1, \frac{1}{c}, R)$. Wählt man $w_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < w_0 < \min(1, \frac{1}{c}, R)$, so ergibt sich

$$|P(\beta w_0)| \leq 1 - w_0^k + |w_0^{k+1}Q'(w_0)| < 1 ,$$

also $|P(z + \beta w_0)| < |P(z_0)|$. □

[3] Eine komplexe Zahl $b \neq 0$ schreibt sich als $b = |b|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$, dann gilt $\beta^k = b$ für $\beta := \sqrt[k]{|b|}(\cos\frac{\alpha}{k} + \mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{k})$.

Definition 24.13 Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt ***gleichmäßig stetig***, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß

$$d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \epsilon \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in X \text{ mit } d_X(x_1, x_2) < \delta\ .$$

Der Unterschied zur bisher betrachteten Stetigkeit (Definition 20.1) ist, daß δ nur von ϵ, nicht aber von einem Punkt aus X abhängt. In den Beispielen 20.2 und 20.3 hatten wir jeweils eine z_0-Abhängigkeit von δ erhalten. Die Beispiele 20.6 und 20.7 sind gleichmäßig stetig.

Satz 24.14 *Seien X, Y metrische Räume und sei X kompakt. Dann ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ auch gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ global vorgegeben. Wegen der Stetigkeit von f gibt es zu jedem Punkt $a \in X$ ein $\delta(a) > 0$, so daß $d_Y\big(f(x), f(a)\big) < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $x \in K_{2\delta(a)}(a)$. Zunächst ist $X = \bigcup_{a\in X} K_{\delta(a)}(a)$. Da X aber kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $a_1, \dots, a_k$ mit $X = K_{\delta(a_1)}(a_1) \cup \dots \cup K_{\delta(a_k)}(a_k)$. Wir setzen $\delta := \min(\delta(a_1), \dots, \delta(a_k))$.

Seien nun zwei Punkte $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) < \delta$ gegeben. Der Punkt x_1 liege in der j-ten Umgebung, d.h. $x_1 \in K_{\delta(a_j)}(a_j)$. Dann ist $d_X(x_1, a_j) < \delta(a_j)$ und $d_X(x_2, a_j) \le d_X(x_2, x_1) + d_X(x_1, a_j) < \delta(a_j) + \delta < 2\delta(a_j)$. Aus der Stetigkeit im Punkt a_j folgt:

$$d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) \le d_Y\big(f(x_1), f(a_j)\big) + d_Y\big(f(x_2), f(a_j)\big) < \epsilon$$

für alle x_1, x_2 mit $d_X(x_1, x_2) < \delta$. □

Beispiel 24.15 Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig in jedem Punkt $x \in \,]0, 1]$, aber nicht gleichmäßig stetig: Zu $\epsilon = 1$ und $\delta_n = \frac{1}{n+1}$ gilt für $x_n = \frac{\delta}{2}$ und $x'_n = \delta$ einerseits $|x - x'| < \frac{1}{n+1}$ und andererseits $|f(x_n) - f(x'_n)| = n + 1 \ge 1$.

25 Wiederholung

- Metrik, metrische Räume, offene und abgeschlossene Teilmengen, Umgebungen
- Konvergenz von Folgen, Cauchy-Folgen, Vollständigkeit
- Charakterisierungen stetiger Abbildungen: Definition 20.1, Satz 20.8, Satz 21.1, Satz 21.2
- Eigenschaften stetiger Abbildungen:
  - Bild zusammenhängender Mengen ist zusammenhängend
  - Urbild offener Mengen ist offen
  - Urbild abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen

    - Bild kompakter Mengen ist kompakt

- Grenzwerte von Funktionen
- Expontentialfunktion, Logarithmus, komplexe Potenzen, trigonometrische Funktionen, hyperbolische Funktionen
- endlich-dimensionale normierte Vektorräume:
    - alle Normen sind äquivalent
    - sind vollständig
    - beschränkte und abgeschlossene Teilmengen sind kompakt

Teil V
Differentialrechnung

26 Die Ableitung

Wir behandeln hier die Differentiation von Funktionen, die auf Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ definiert sind. Die Funktionen dürfen aber komplexwertig sein, z.B. $f(x) = x^s$ für $s \in \mathbb{C}$ und $f(x) = e^{\mathrm{i}x}$, jeweils mit $x \in I \subset \mathbb{R}$.

Definition 26.1 Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt *differenzierbar* im Punkt $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt *Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$, $(Df)(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet. Die Funktion f heißt differenzierbar in I, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierar ist.

Äquivalent dazu ist $f'(x) = (Df)(x_0) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))$. Dabei ist h so zu wählen, daß $x_0 + h \in I$ gilt. Zur Vereinfachung der Schreibweise werde vereinbart, daß $\lim_{h\to 0}$ und $\lim_{x \to x_0}$ stets $h \neq 0$ und $x \neq x_0$ bedeuten. Für reellwertige Funktionen ist $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ die Steigung der Sekante des Graphen von f durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$. Im Grenzübergang $x \to x_0$ geht die Sekante in die Tangente an den Graphen im Punkt x_0 über.

Beispiel 26.2 Es sei $a < 0$ und $b > 0$. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0 \in [a, b]$. Denn $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$
Zu jedem $c \in \mathbb{C}$ und $\epsilon = \frac{1}{2}$ gibt es für alle $\delta > 0$ ein $x \in [a, b]$ mit $|x - 0| < \delta$ und $|\frac{|x|}{x} - c| \geq \frac{1}{2}$. Dagegen wäre $f(x) = |x|$ differenzierbar in $[a, 0]$ und in $[0, b]$ mit Ableitung $f'(x) = -1$ bzw. $f'(x) = 1$.

Satz 26.3 i) *$f(x) = x^n$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $f'(x) = nx^{n-1}$ (und $f'(x) = 0$ für $n = 0$)*

ii) *$f(x) = e^{cx}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{C}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $f'(x) = ce^{cx}$ (insbesondere $f(x) = a^x \quad\Rightarrow\quad f'(x) = a^x \ln a$)*

iii) *$f(x) = \ln x$ für $x \in \mathbb{R}^\times_+$ $\quad\Rightarrow\quad$ $f'(x) = \frac{1}{x}$*

Beweis. i) $\frac{\xi^n - x^n}{\xi - x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \xi^{n-1-k}$. Die rechte Seite konvergiert für $\xi \to x$ gegen nx^{n-1}.

ii) $\frac{e^{c(x+h)} - e^{cx}}{h} = e^{cx} \frac{e^{ch}-1}{h}$. Nach Beispiel 22.3 ist $\lim_{h\to 0} \frac{e^{ch}-1}{h} = c$.

iii) $\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}$. Nach Satz 23.1 ist $\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$. □

Satz 26.4 (Lineare Approximierbarkeit) *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ ist genau dann differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ gibt, so daß für die Funktion $\phi : I \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$ gilt $\lim_{x\to x_0} \frac{\phi(x)}{x-x_0} = 0$. In diesem Fall ist $f'(x_0) = c$.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei f differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = c$. Für $x \neq x_0$ gilt $\frac{\phi(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$. Der Grenzwert der rechten Seite für $x \to x_0$ ist 0.

($\Leftarrow$) Es gelte $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$ mit $\lim_{x\to x_0} \frac{\phi(x)}{x-x_0} = 0$. Dann ist $0 = \lim_{x\to x_0} \big(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - c\big)$, d.h. der Grenzwert $c = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. $\square$

Für reellwertige Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ ist der Graph der Funktion $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ die Tangente an den Graphen von f im Punkt x_0.

Satz 26.5 *Ist $f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, dann ist f in x_0 auch stetig.*

Beweis. Nach Satz 26.4 gilt insbesondere $\lim_{x\to x_0} \phi(x) = 0$, also $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \big(f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)\big) = f(x_0)$. $\square$

Satz 26.6 *Die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{C}$ seien in $x \in I$ differenzierbar. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$ und für $g(x) \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x, und es gilt*

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\
(f\cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) && \textit{(Produktregel bzw. Leibniz-Regel)} \\
(\tfrac{f}{g})'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} && \textit{(Quotientenregel)}
\end{aligned}$$

Beweis. Man schreibt die Differenzenquotienten wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\,, \\
\frac{(f\cdot g)(x+h) - (f\cdot g)(x)}{h} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\,, \\
\frac{(\frac{f}{g})(x+h) - (\frac{f}{g})(x)}{h} &= \frac{1}{g(x)g(x+h)}\Big(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\Big).
\end{aligned}$$

Da g nach Satz 26.5 in x stetig ist, ist in der letzten Gleichung nach Satz 20.10.ii) $g(x + h) \neq 0$ für $\delta > h > 0$. Nach Satz 22.4 haben die Grenzwerte für $h \to 0$ die behaupteten Eigenschaften. $\square$

Beispiel 26.7 i) Polynome $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind differenzierbar in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$, und es gilt $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

ii) Rationale Funktionen $f(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{l=0}^{m} b_l x^l}$ sind differenzierbar außerhalb der Nullstellen des Nennerpolynoms, und es gilt $f'(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}(k-l)a_k b_l x^{k+l-1}}{\left(\sum_{l=0}^{m} b_l x^l\right)^2}$. Insbesondere gilt für die in der Partialbruchzerlegung (Satz 19.7) entstehenden elementaren Funktionen $g(x) = \frac{1}{(x-a)^k}$, daß $g'(x) = \frac{-k}{(x-a)^{k+1}}$.

iii) cos, sin sind als Summen von Exponentialfunktionen differenzierbar in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$, und es gilt $\cos'(x) = -\sin(x)$ und $\sin'(x) = \cos(x)$. (Verwende $\frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x})' = \frac{1}{2}(\mathrm{i}e^{\mathrm{i}x} - \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}x})$ und analog für sin).

iv) tan und cot sind als Quotienten der differenzierbaren Funktionen sin und cos differenzierbar in jedem Punkt des Definitionsbereiches, und es gilt $\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x)-\sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ und $\cot'(x) = \frac{\cos'(x)\sin(x)-\cos(x)\sin'(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

Satz 26.8 (Kettenregel) *Die Funktion $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $x_0 \in I$, und die Funktion $g : J \to \mathbb{C}$ sei differenzierbar in $f(x_0) \in J$. Dann ist auch die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar in x_0, und es gilt $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.*

Beweis. Sei $y_0 := f(x_0)$. Durch $\gamma(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{für } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{für } y = y_0 \end{cases}$ werde eine Funktion $\gamma : J \to \mathbb{C}$ definiert. Da g in y_0 differenzierbar ist, ist γ in y_0 stetig, und es gilt $g(y) - g(y_0) = (y - y_0)\gamma(y)$ für alle $y \in J$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\gamma(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \gamma(f(x)) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \gamma(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0) \cdot f'(x_0) \;. \end{aligned}$$

□

Beispiel 26.9 i) Für $f(x) = x^z$ mit $z \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}_+^\times$ gilt $f'(x) = zx^{z-1}$: Setze $g(y) = e^{zy}$ und $\tilde{g}(x) = \ln x$, dann ist $f(x) = (g \circ \tilde{g})(x) = e^{z \ln x}$ und $f'(x) = ze^{z \ln x} \cdot \frac{1}{x}$.

ii) Für $f(x) = \sqrt{1+x}$ mit $x > -1$ gilt $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$: Setze $g(y) = y^{\frac{1}{2}}$ mit $g'(y) = \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1}$ und $\tilde{g}(x) = 1 + x$.

Satz 26.10 (Differentiation der Umkehrfunktion) *Es sei $g = f^{-1}$ die Umkehrfunktion einer streng monotonen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Ist f differenzierbar in $y_0 \in I$ mit $f'(y_0) \neq 0$, dann ist g differenzierbar in $x_0 := f(y_0)$, und es gilt $g'(x_0) = \dfrac{1}{f'(y_0)} = \dfrac{1}{f'(g(x_0))}$.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 26.8 ist $\phi(y) := \begin{cases} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} & \text{für } y \neq y_0 \\ f'(y_0) & \text{für } y = y_0 \end{cases}$ eine in y_0 stetige Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}$ mit $f(y) - f(y_0) = (y - y_0)\phi(y)$ für alle $y \in I$ und $f'(y_0) = \phi(y_0)$. Wegen der strengen Monotonie von f und $\phi(y_0) \neq 0$ ist $\phi(y) \neq 0$ für alle $y \in I$. Dann folgt mit $y := g(x)$ und $x = f(y)$

$$\frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\phi(g(x))} .$$

Für $x \to x_0$ folgt aus der Stetigkeit von g in x_0 und der Stetigkeit von ϕ in $y_0 = g(x_0)$ die Behauptung. □

Beispiel 26.11 i) $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Sei $y := \arctan x$, so gilt $\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(y)} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$.

ii) $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in]-1, 1[$. Mit $y = \arcsin x$ und $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ gilt $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Satz 26.12 *Es seien $f_n : I \to \mathbb{C}$ differenzierbare und Lipschitz-stetige Funktionen mit $0 \leq \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|} \leq L_n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in I$. Wenn*

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *konvergent ist in jedem Punkt $x \in I$ und*

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x_0)$ *und* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} L_n$ *konvergent sind,*

dann ist die Funktion $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ in x_0 differenzierbar, und es gilt $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$.

Insbesondere ist jede Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ in jedem Punkt $x \in]-R, R[$ differenzierbar, und es gilt $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Beweis. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß gleichzeitig gilt $\sum_{n=N+1}^{\infty} L_n < \frac{\epsilon}{3}$ und $\big|\sum_{n=N+1}^{\infty} f'(x_0)\big| < \frac{\epsilon}{3}$. Dann gilt für beliebige $x \in I \setminus \{x_0\}$

$$\Big|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x_0)\Big|$$
$$\leq \sum_{n=0}^{N} \Big|\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - f_n'(x_0)\Big| + \sum_{n=N+1}^{\infty} L_n + \Big|\sum_{n=N+1}^{\infty} f'(x_0)\Big| .$$

Wegen der Differenzierbarkeit der f_n mit $0 \leq n \leq N$ gibt es ein gemeinsames $\delta > 0$, so daß $\sum_{n=0}^{N} \Big|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - f_n'(x_0)\Big| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $x \in I \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta$. Somit ist $\Big|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x_0)\Big| < \epsilon$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Für Potenzreihen ist $f_n = a_n x^n$, und für $x, y \in]-r, r[$ mit $0 < r < R$ gilt $\left|\frac{a_n x^n - a_n y^n}{x-y}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_n x^k y^{n-1-k}\right| \leq n|a_n| r^{n-1} =: L_n$. Nach dem Wurzelkriterium und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ den gleichen Konvergenzradius R, so daß die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x_0^{n-1}$ mit $|x_0| < r$ und $\sum_{n=1}^{\infty} L_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1}$ konvergieren. Dann folgt die Behauptung aus dem allgemeinen Teil mit $I =]-r, r[$, denn jeder Punkt $-R < x_0 < R$ liegt in I für $r = \frac{|x_0|+R}{2} < R$. □

Beispiel 26.13 Die Funktionen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^s}$ und $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^s}$ sind für alle $s > 2$ differenzierbar in $\mathbb{R}$ mit $f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{s-1}}$ und $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{s-1}}$.

Zum Beweis der Lipschitz-Bedingung verwende man $\left|\frac{\cos(nx)-\cos(ny)}{x-y}\right| = \frac{2}{|x-y|}\left|\sin\frac{n(x+y)}{2}\right|\left|\sin\frac{n(x-y)}{2}\right| \leq n \sup_{r\in\mathbb{R}_+^\times} \left|\frac{\sin r}{r}\right| \leq n \sup_{r\in]0,\frac{\pi}{2}]} \left|\frac{\sin r}{r}\right| = n$. Der letzte Schritt folgt aus $\lim_{r\to 0} \frac{\sin r}{r} = 1$ und $1 > \frac{\sin r}{r} > 1 - \frac{r^2}{6}$ für $r \in]0, \frac{\pi}{2}]$ nach dem Leibniz-Kriterium. Analog für g.

27 Lokale Extrema, Mittelwertsatz

Extrama von Funktionen lassen sich zunächst für beliebige Definitionsbereiche definieren; für Intervalle liefert dann die Differenzierbarkeit ein wichtiges Kriterium.

Definition 27.1 Sei X metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in X$

i) ein *globales Maximum* bzw. *globales Minimum*, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in X$,

ii) ein *lokales Maximum* bzw. *lokales Minimum*, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt mit $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in U \cap X$.

Ein lokales/globales Extremum ist ein lokales/globales Minimum oder Maximum. Gilt in i) und ii) das Gleichheitszeichen nur für den Punkt $x = x_0$, so hat f in x_0 ein *strenges* Extremum.

Satz 27.2 *Eine Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ besitze in $x_0 \in]a, b[$ ein lokales Extremum und sei differenzierbar in x_0. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. (für lokales Maximum) Es gibt eine Umgebung U von x mit $f(x) - f(x_0) \leq 0$ für alle $x \in U$, und U enthält Punkte $x > x_0$ und Punkte $y < x_0$. Somit gilt

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in U \text{ mit } x > x_0$$
$$\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \geq 0 \qquad \text{für alle } y \in U \text{ mit } y < x_0$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, folgt aus beiden Ungleichungen $f'(x_0) = 0$. $\square$

Bemerkungen:

i) Stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nehmen ihr globales Maximum und Minimum an. Als Kandidaten dieser Extremalpunkte kommen die Randpunkte a, b und, falls f differenzierbar ist, die Lösungen von $f'(x) = 0$ in Frage. Für ein globales Extremum an Randpunkten a oder b muß $f'(a) = 0$ bzw. $f'(b) = 0$ nicht gelten.

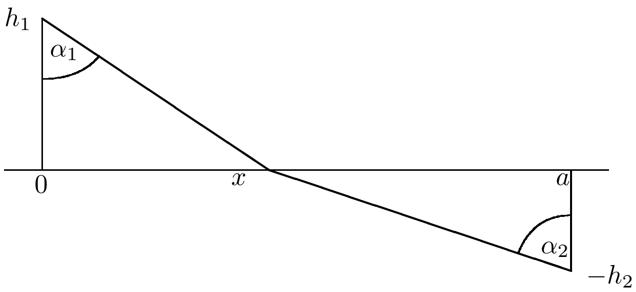
ii) $f'(x) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für das Vorliegen eines lokalen Extremums im Punkt x. Z.B. gilt für $f(x) = x^3$ zwar $f'(0) = 0$, aber f besitzt als streng monoton wachsende Funktion kein lokales Extremum.

Beispiel 27.3 (Fermatsches Prinzip und Brechungsgesetz) Gesucht ist der schnellste Weg zwischen einem Punkt $(0, h_1)$ und einem Punkt $(a, -h_2)$, wenn der Betrag der Geschwindigkeit v_1 ist in $M_1 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times_+$ und v_2 in $M_2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times_-$, und die Bewegung in M_1 und M_2 geradlinig verläuft.

Die Zeit für einen Weg durch $(x, 0)$ ist $t(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{h_1^2 + (a-x)^2}$. Diese Funktion ist in $]0, a[$ differenzierbar. Liegt ein lokales Extremum in $x \in]0, a[$ vor, so gilt dort

$$0 = t'(x) = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{a-x}{\sqrt{h_1^2 + (a-x)^2}}\ ,$$

also die geometrische Bedingung $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$



Satz 27.4 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall $]a, b[$. Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.*

Ein wichtiger Spezialfall ist der **Satz von Rolle***: Gilt zusätzlich $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. i) für den Satz von Rolle. Ist f konstant auf $[a, b]$, so ist $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in]a, b[$. Ansonsten nimmt f als stetige Funktion nach dem Satz vom

Maximum/Minimum ein Maximum und ein Minimum an, und zumindest eines ist von $f(a) = f(b)$ verschieden. Damit wird dieses Extremum in einem Punkt $\xi \in]a,b[$ angenommen, und wegen der Differenzierbarkeit von f in ξ gilt $f'(\xi) = 0$.

ii) Man betrachte die Funktion $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Diese ist wie f stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $]a,b[$, außerdem gilt $F(a) = F(b) = f(a)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es $\xi \in]a,b[$ mit $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Satz 27.5 (Schrankensatz) *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und differenzierbar auf $]a,b[$ mit beschränkter Ableitung $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in]a,b[$. Dann ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten L, d.h. $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$ für alle $x,y \in [a,b]$.*

Für reellwertige differenzierbare Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt unter sonst gleichen Voraussetzungen: Ist $m \leq f'(x) \leq M$ für alle $x \in]a,b[$, so gilt $m(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq M(x_2 - x_1)$ für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 \leq x_2$.

Beweis. ii) Die Aussage für reelle Funktionen ist eine Umformulierung des Mittelwertsatzes, insbesondere werden für m, M nur innere Punkte $\xi \in]a,b[$ benötigt.

i) Sei $f(x) \neq f(y)$, insbesondere $x \neq y$, sonst ist nichts zu zeigen. Setze $c := \frac{|f(x)-f(y)|}{f(x)-f(y)} \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ und $\phi := \mathrm{Re}(cf)$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es zu $x,y \in [a,b]$ ein $\xi \in]x,y[$ mit $\phi(x) - \phi(y) = (x-y)\phi'(\xi)$. Somit gilt

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= cf(x) - cf(y) = \phi(x) - \phi(y) = (x-y)\phi'(\xi) \\ &\leq |x-y| \sup_{\xi \in]x,y[} |\phi'(x)| \leq L|x-y|\end{aligned}$$

wegen $|\mathrm{Re}(cf')(x)| \leq |f'(x)| \leq L$. □

Satz 27.6 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und differenzierbar in $]a,b[$ mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a,b[$. Dann ist f konstant.*

Insbesondere gilt: Zwei differenzierbare Funktionen $f,g : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in]a,b[$ unterscheiden sich nur um eine Konstante, $f - g = const.$

Beweis. Nach dem Schrankensatz ist $f(x) = f(y)$ für alle $x,y \in [a,b]$. Der zweite Teil folgt aus dem ersten für die Funktion $f - g$. □

Als Anwendung geben wir eine weitere Charakterisierung der Exponentialfunktion als eindeutige Lösung einer *Differentialgleichung* zu gegebener *Anfangsbedingung*:

Satz 27.7 *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion, und es gelte $f'(x) = cf(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein $c \in \mathbb{C}$. Ist $f(0) =: A \in \mathbb{C}$, so gilt $f(x) = A\,e^{cx}$.*

Beweis. Für $F(x) := f(x)e^{-cx}$ gilt nach Produktregel $F'(x) = f'(x)e^{-cx} - cf(x)e^{-cx} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist F nach Satz 27.6 eine konstante Funktion, also $F(x) = F(0) = f(0) = A$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also gilt $f(x) = A\, e^{cx}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Satz 27.8 *Für alle $x \in \,]-1,1[$ gilt*

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \; .$$

Beweis: Die Funktionen $f(x) = \arcsin x$ und $g(x) = \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ sind auf $]-1,1[$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k = g'(x) \; .$$

Damit ist $f(x) - g(x) = f(0) - g(0) = 0$ eine Konstante. $\square$

Satz 27.9 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) *Die Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $]a,b[$, und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in \,]a,b[$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$, und es gibt ein $\xi \in \,]a,b[$ mit $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.*

Beweis. Wäre $g(b) = g(a)$, so gäbe es nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in \,]a,b[$ mit $g'(\xi) = 0$, Widerspruch. Wir können deshalb den Satz von Rolle auf die Funktion $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$ anwenden. Es gilt $F(a) = F(b) = f(a)$, also gibt es ein $\xi \in \,]a,b[$ mit $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$. $\square$

Die folgende Rechenregel erlaubt in vielen Fällen eine einfache Berechnung von Grenzwerten:

Satz 27.10 (Regel von de l'Hospital) *Die Funktionen $f, g : \,]a,b[\to \mathbb{R}$ seien differenzierbar, und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in \,]a,b[$. In beiden Fällen*

i) $\lim_{x \searrow a} f(x) = 0$ *und* $\lim_{x \searrow a} g(x) = 0$

ii) *sowie* $\lim_{x \searrow a} f(x) = \infty$ *und* $\lim_{x \searrow a} g(x) = \infty$

gilt: Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt $\lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Analog für $x \nearrow a$ sowie $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

Beweis. i) Definieren wir $f(a) := 0$ und $g(a) := 0$, so sind die Funktionen f, g stetig in a. Damit sind zu jedem $x \in \,]a,b[$ die Voraussetzungen des verallgemeinerten Mittelwertsatzes für $f, g : [a,x] \to \mathbb{R}$ erfüllt, und es existiert ein $\xi \in \,]a,x[$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Nach Voraussetzung existiert der Limes $x \searrow a$ und hat die behauptete Eigenschaft.

ii) Nach Existenz des rechtsseitigen Grenzwertes $A := \lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in \,]a, a+\delta[$ gilt $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \epsilon$. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt dann auch $\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - A\right| < \epsilon$ für alle $x, y \in \,]a, a+\delta[$ mit $x \neq y$. Wir betrachten

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\left(\frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}} - 1\right) .$$

Wir halten y fest und lassen x gegen a gehen. Wegen $\lim_{x\searrow a} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\searrow a} g(x) = \infty$ gibt es ein δ' mit $0 < \delta' < y-a < \delta$, so daß $\left|\frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}} - 1\right| < \frac{\epsilon}{|A|+\epsilon}$ für alle $x \in \,]a, a+\delta'[$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| &\leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| + \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - A\right| \\ &< \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right|\left|\frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}} - 1\right| + \epsilon < 2\epsilon\end{aligned}$$

für alle $x \in \,]a, a+\delta'[$. □

Beispiel 27.11 Für $\alpha > 0$ untersuchen wir Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{x\searrow 0} x^\alpha \ln x$. Die Regel von de l'Hospital ist anwendbar für die Funktionen $f(x) = -\ln x$ und $g(x) = x^{-\alpha}$ mit $\lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\searrow 0} g(x) = \infty$, und es gilt

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\searrow 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x^\alpha}{\alpha} = 0 .$$

Somit erhalten wir $\lim\limits_{x\searrow 0} x^\alpha \ln x = 0$ für alle $\alpha > 0$.

28 Monotonie, höhere Ableitungen, Konvexität

Satz 28.1 (Monotoniekriterium) *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}&f' > 0 \textit{ in }]a,b[\Rightarrow f \textit{ wächst in }]a,b[\textit{ streng monoton,}\\ &f' < 0 \textit{ in }]a,b[\Rightarrow f \textit{ fällt in }]a,b[\textit{ streng monoton,}\\ &f' \geq 0 \textit{ in }]a,b[\Leftrightarrow f \textit{ wächst in }]a,b[\textit{ monoton,}\\ &f' \leq 0 \textit{ in }]a,b[\Leftrightarrow f \textit{ fällt in }]a,b[\textit{ monoton.}\end{aligned}$$

Beweis. (⇒) folgt jeweils aus dem Mittelwertsatz bzw. Schrankensatz. (⇐) folgt aus Definition des Grenzwertes. □

Das Beispiel der streng monoton wachsenden Funktion $f(x) = x^3$ mit $f'(0) = 0$ zeigt, daß in den ersten beiden Implikationen in Satz 28.1 die Umkehrungen (⇐) nicht gelten.

Die Ableitung $f' : I \to \mathbb{C}$ einer auf $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ kann erneut auf Differenzierbarkeit in $x_0 \in I$ untersucht werden, und gegebenenfalls heißt die Ableitung von f' in x_0 die *zweite Ableitung* von f in x_0. Man schreibt $f''(x_0) = (f')'(x_0)$ oder auch $(DDf)(x_0)$ oder $\frac{d^2f}{dx}(x_0)$. Die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f wird dann rekursiv definiert als $f^{(n)}(x_0) := (f^{(n-1)})'(x_0)$, falls $f^{(n-1)}$ in x_0 differenzierbar ist. Dabei ist $f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$ und $f^{(1)}(x_0) := f'(x_0)$. Ist die n-te Ableitung $f^{(n)}$ stetig, so heißt f n-mal stetig differenzierbar.

Existiert $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt f *beliebig oft differenzierbar* (Stetigkeit ist automatisch). Nach Satz 26.12 ist jede Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ beliebig oft differenzierbar im Inneren ihres Konvergenzkreises, und dort gilt $f^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$. Die Menge der beliebig oft differenzierbare Funktionen ist "größer" als die Menge der durch Potenzreihen darstellbaren Funktionen. Eine nützliche beliebig oft auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion ist die Einschaltfunktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Satz 28.2 *Eine in $]a, b[$ differenzierbare Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in]a, b[$ zweimal differenzierbar, und es gelte $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) \neq 0$. Dann besitzt f in x_0 ein strenges lokales Extremum, und zwar ein strenges lokales Minimum für $f''(x_0) > 0$ bzw. ein strenges lokales Maximum für $f''(x_0) < 0$.*

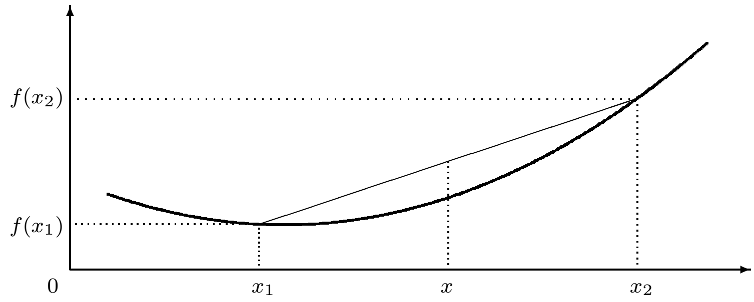
Beweis. (für $f''(x_0) > 0$). Wegen $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß unter Verwendung von $f'(x_0) = 0$ gilt $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ für alle $x \in]a, b[$ mit $0 < |x - x_0| < \epsilon$. Nach Satz 28.1 ist f' in $]x_0 - \epsilon, x_0[$ streng monoton fallend und in $]x_0, x_0 + \epsilon[$ streng monoton wachsend, besitzt also in x_0 ein strenges lokales Minimum. □

Definition 28.3 Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex* auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, wenn für alle $x_1 < x_2 \in I$ und alle $\lambda \in]0, 1[$ gilt

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \;.$$

Gilt sogar die Relation '$<$', so heißt f *streng konvex*. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *(streng) konkav*, wenn $-f$ (streng) konvex ist.

Setzen wir $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, dann ist $x_1 < x < x_2$ und $\lambda = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}$. Somit ist $x \mapsto \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = f(x_2) + \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x-x_2)$ die Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$. Folglich bedeutet Konvexität, daß $(x, f(x))$ unterhalb der Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ liegt, und zwar für beliebige $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x < x_2$.



Die Definition von Konvexität erfordert keine Differenzierbarkeit: Z.B: ist $f(x) = |x|$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ konvex. Für differenzierbare Funktionen haben wir

Satz 28.4 (Konvexitätskriterium) *Eine in $[a,b]$ stetige und in $]a,b[$ differenzierbare Funktion f ist genau dann konvex in $[a,b]$, wenn f' in $]a,b[$ monoton wächst.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei f konvex und $x_1 < x_2$ Punkte aus $]a,b[$. Dann gilt $f(x) \leq f(x_2) + \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x-x_2) = f(x_1) + \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x-x_1)$ für alle $x \in]x_1, x_2[$, also

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} .$$

Für $x \searrow x_1$ einerseits und $x \nearrow x_2$ andererseits folgt aus der Differenzierbarkeit in x_1, x_2 die Relation $f'(x_1) \leq \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2)$. Da $x_1 < x_2$ beliebig sind, wächst f' monoton.

($\Leftarrow$) Sei f' monoton wachsend und $x_1 < x < x_2$ Punkte aus $[a,b]$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es Punkte $\xi_1 \in]x_1, x[$ und $\xi_2 \in]x, x_2[$ mit

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1) \qquad \text{und} \qquad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2) .$$

Es ist $\xi_1 < \xi_2$ und damit $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, also $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ für alle $x \in]x_1, x_2[$. Dann ist $x - x_1 = (1-\lambda)(x_2-x_1)$ und $x_2 - x = \lambda(x_2-x_1)$ für $\lambda \in]0,1[$, also $\lambda(f(x)-f(x_1)) \leq (1-\lambda)(f(x_2)-f(x))$ und dann $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. $\square$

Satz 28.5 *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und zweimal differenzierbar in $]a,b[$. Dann gilt:*

i) $f'' \geq 0$ *in* $]a,b[\quad \Leftrightarrow \quad f$ *ist konvex in* $[a,b]$.

ii) $f'' > 0$ *in* $]a,b[\quad \Rightarrow \quad f$ *ist streng konvex in* $[a,b]$.

Beweis. i) ist Satz 28.1 für f' zusammen mit Satz 28.4.

ii) f ist zumindest konvex. Wäre f nicht streng konvex, so gibt es $x_1 < x < x_2 \in [a,b]$ mit $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es dann Punkte $\xi_1 \in]x_1,x[$ und $\xi_2 \in]x,x_2[$ mit

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2) ,$$

im Widerspruch zur strengen Monotonie von f' nach Satz 28.1 für f'. □

Beispiel 28.6 Die Funktionen $f(x) = x^{2n}$ mit $n \in \mathbb{N}^\times$ sind streng konvex auf $\mathbb{R}$ wegen $f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2} > 0$. Ebenso ist $f(x) = e^x$ streng konvex auf $\mathbb{R}$ wegen $f''(x) = e^x > 0$. Schließlich ist $f(x) = \ln x$ streng konkav auf $\mathbb{R}^\times_+$, da $(-\ln x)'' = \frac{1}{x^2} > 0$.

Definition 28.7 Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in]a,b[$ einen *Wendepunkt*, wenn es Intervalle $]\alpha,x_0[$, $]x_0,\beta[\subset [a,b]$ gibt, so daß eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

i) f ist in $]\alpha,x_0[$ konvex und in $]x_0,\beta[$ konkav, oder

ii) f ist in $]\alpha,x_0[$ konkav und in $]x_0,\beta[$ konvex.

Ist f zweimal differenzierbar in $]a,b[$, so sind die Bedingungen i) und ii) äquivalent zu

i') $f'' \geq 0$ in $]\alpha,x_0[$ und $f'' \leq 0$ in $]x_0,\beta[$, oder

ii') $f'' \leq 0$ in $]\alpha,x_0[$ und $f'' \geq 0$ in $]x_0,\beta[$.

In diesem Fall ist $f''(x_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für einen Wendepunkt in x_0.

Beispiel 28.8 Die Funktionen $f(x) = x^{2n+1}$ mit $n \in \mathbb{N}^\times$ haben in $x_0 = 0$ einen Wendepunkt.

Satz 28.9 (Höldersche Ungleichung) *Es sei* $V = \mathbb{K}^n$ *für* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Für* $p \in]1,\infty[$ *werde eine Abbildung* $\| \ \|_p : V \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{k=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} , \qquad x = (x_1,\dots,x_n) \in V .$$

Dann gilt für beliebige $p,q \in]1,\infty[$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *und beliebige* $x,y \in V$ *die Höldersche Ungleichung*

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q .$$

Beweis. i) Wir zeigen zunächst: *Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}_+^\times$ und p, q wie oben gilt*

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} . \tag{*}$$

Die Funktion $f(x) = -\ln x$ ist konvex auf $\mathbb{R}_+^\times$, also gilt mit $\lambda = \frac{1}{p}$ und $(1-\lambda) = \frac{1}{q}$

$$-\ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right) \leq -\frac{1}{p}\ln a - \frac{1}{q}\ln b = -\ln\left(a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}}\right) .$$

Durch Exponentieren folgt die Behauptung.

ii) Für $x = 0$ oder $y = 0$ ist im Satz nichts zu zeigen. Ansonsten sei $\xi_k := \dfrac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p}$ und $\eta_k := \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}$. Es gilt

$$\xi_k^{\frac{1}{p}} \cdot \eta_k^{\frac{1}{q}} \leq \frac{\xi_k}{p} + \frac{\eta_k}{q}$$

nach (*) für $\xi_k, \eta_k \neq 0$ bzw. trivialerweise für $\xi_k = 0$ oder $\eta_k = 0$. Wegen $\sum_{k=1}^p \xi_k = 1$ und $\sum_{k=1}^p \eta_k = 1$ folgt

$$\sum_{k=1}^n \frac{|x_k| \cdot |y_k|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} = \sum_{k=1}^n \xi_k^{\frac{1}{p}} \cdot \eta_k^{\frac{1}{q}} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{\xi_k}{p} + \frac{\eta_k}{q}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 . \qquad \square$$

Für $p = q = 2$ ist das die Ungleichung von Cauchy-Schwarz. Allgemein ergibt sich

Satz 28.10 (Minkowskische Ungleichung) *Für beliebige $x, y \in V = \mathbb{K}^n$ und $p > 1$ gilt die Minkowskische Ungleichung $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, d.h. $(V, \| \ \|_p)$ ist für alle $p > 1$ ein normierter Vektorraum.*

Beweis. Setze $z_k := |x_k + y_k|^{p-1}$, dann gilt $|z_k|^q = |x_k + y_k|^{pq-q} = |x_k + y_k|^p$, also $\|z\|_q^q = \|x + y\|_p^p$, und $|x_k + y_k||z_k| = |x_k + y_k|^{1+\frac{p}{q}} = |x_k + y_k|^p$. Nach Dreiecksungleichung und Hölderscher Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^p = \sum_{k=1}^p |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k||z_k| &\leq \sum_{k=1}^n |x_k z_k| + \sum_{k=1}^n |y_k z_k| \\ &\leq \big(\|x\|_p + \|y\|_p\big)\|z\|_q .\end{aligned}$$

Für $\|x+y\|_p = 0$ ist nichts zu zeigen; ansonsten ist $\frac{\|x+y\|_p^p}{\|z\|_q} = \|x+y\|_p^{p-\frac{p}{q}} = \|x+y\|_p$. $\square$

Eine weitere wichtige Anwendung der Konvexität ist das Newtonsche Iterationsverfahren zur numerischen Berechnung von Nullstellen.

Satz 28.11 (Newtonsches Iterationsverfahren) *Eine stetige und konvexe Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sei zweimal stetig differenzierbar in $]a,b[$. Dann gilt:*

i) *Es gibt genau ein $\xi \in]a,b[$ mit $f(\xi) = 0$.*

ii) *Ist $x_0 \in]a,b[$ ein beliebiger Punkt mit $f(x_0) \geq 0$, dann ist die durch*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ.

Bemerkung: Analoge Aussagen gelten für konkave Funktionen und/oder für $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$. Man kann zeigen, daß das Verfahren quadratisch konvergiert, d.h. x_n approximiert ξ für große n auf $2n$ Dezimalstellen genau.

Beweis. i) Nach dem Zwischenwertsatz gibt es zumindest eine Nullstelle ξ von f in $]a,b[$. Außerdem gibt es nach dem Satz vom Minimum in $q \in [a,b]$ ein globales Minimum mit $f(q) \leq f(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Damit ist $f(q) < 0$. Ist $q \neq a$, so hat f in q ein lokales Minimum, d.h. es gilt $f'(q) = 0$. Nach Satz 28.4 und Satz 28.5 ist f' monoton wachsend in $]a,b[$, also gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,q]$. Somit liegen alle Nullstellen von f in $]q,b[$.

Angenommen, es gäbe zwei Nullstellen $\xi_1 < \xi_2$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $t \in]q,\xi_1[$ mit $f'(t) = \frac{f(\xi_1)-f(q)}{\xi_1-q} = \frac{-f(q)}{\xi_1-q} > 0$. Daraus folgt $f'(x) > 0$ für alle $x \in [t,b[$, insbesondere ist f in $[\xi_1,b]$ streng monoton wachsend und kann keine zweite Nullstelle besitzen.

ii) Für den Anfangspunkt der Folge gilt $x_0 \geq \xi$. Wir zeigen durch vollständige Induktion $f(x_n) \geq 0$ und $\xi \leq x_n \leq x_{n-1}$ für alle $n \geq 1$.

a) Aus $x_n \geq \xi$ folgt $f'(x_n) \geq f'(\xi) > 0$, also $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geq 0$ und somit $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n$.

b) Die Funktion $\phi_n(x) := f(x)-f(x_n)-f'(x_n)(x-x_n)$ beschreibt die Differenz von $f(x)$ zur ihrer Tangenten in x_n. Es gilt $\phi_n'(x) = f'(x)-f'(x_n)$, also $\phi_n'(x) \leq 0$ für $x \leq x_n$. Aus $\phi_n(x_n) = 0$ folgt dann $\phi_n(x) \geq 0$ für $x \leq x_n$, insbesondere

$$0 \leq \phi_n(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = f(x_{n+1}) \; .$$

Damit ist $x_{n+1} \geq \xi$, so daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende und durch ξ nach unten beschränkte Folge ist. Sei $x^* := \lim_{n\to\infty} x_n$ ihr Grenzwert, dann folgt aus der Stetigkeit von f und f' in $]a,b[$ die Gleichung $x^* = x^* - \dfrac{f(x^*)}{f'(x^*)}$, also $f(x^*) = 0$ und damit $x^* = \xi$. □

Beispiel 28.12 Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ und $a \in \mathbb{R}_+^\times$ betrachten wir die durch $f(x) = x^k - a$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Diese ist konvex auf $\mathbb{R}_+$ mit $f(0) = -a < 0$ und $f(1+a) > 0$. Das Newtonsche Iterationsverfahren zur Berechnung der Nullstellen ist damit anwendbar und liefert die Folge

$$x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}} = \frac{1}{k}\Big((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\Big) ,$$

die für einen beliebigen Startwert x_0 mit $x_0^k \geq a$ monoton fallend gegen $\sqrt[k]{a}$ konvergiert. (Wählt man $0 < x_0^k < a$, dann ist $x_1^k > a$, und das Verfahren konvergiert ebenfalls. Siehe Satz 6.13)

29 Taylor-Polynome und Taylor-Reihen

Nach Satz 26.4 liefern Funktionswert $f(x_0)$ und Ableitung $f'(x_0)$ einer differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ eine lineare Approximation der Funktion in der Nähe des Punktes x_0 mit Kontrolle des Fehlers. Die Taylorsche Formel beschreibt eine polynomiale Approximation der Funktion:

Satz 29.1 (Taylorsche Formel) *Es sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ ein $\xi \in \,]a, x[$ bzw. $\xi \in \,]x, a[$, so daß*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x) ,$$
$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} .$$

Beweis. Nach Zerlegung in Real- und Imaginärteil können wir uns auf reellwertige Funktionen beschränken. Für $n = 0$ handelt es sich um den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Sei also $n \geq 1$ und z.B. $x > a$ fest gewählt. Wir definieren eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ durch

$$g(t) = f(t) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k - M(t-a)^{n+1} .$$

Wählen wir

$$M = \frac{1}{(x-a)^{n+1}}\Big(f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\Big) ,$$

dann gilt $g(x) = 0$. Nach Voraussetzung ist g eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion auf I, und es gilt $g(a) = 0$ und $g^{(k)}(a) = 0$ für alle $k = 1, \dots, n$.

Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $\xi_1 \in\,]x,a[$ mit $g'(\xi_1) = 0$. Im nächsten Schritt gibt es wieder nach Rolle wegen $g'(a) = 0$ ein $\xi_2 \in\,]\xi_1, a[$ mit $g''(\xi_2) = 0$. Schließlich gibt es ein $\xi = \xi_{n+1} \in\,]\xi_n, a[\, \subset\,]x,a[$ mit

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!M$$

Also ist $M = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ für ein $\xi \in\,]x,a[$. □

Für eine mindestens $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion f heißt

$$(T_n f)(x;a) := f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

das Taylor-Polynom n-ter Ordnung von f mit Entwicklungspunkt a, und $R_{n+1}(x)$ heißt das Restglied $(n+1)$-ter Ordnung. Für Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ stimmt wegen $f^{(k)}(0) = k!a_k$ das Taylor-Polynom N-ter Ordnung von f mit der bei N abgebrochenen Potenzreihe überein, d.h. $(T_N f)(x;0) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ für $|x| < R$.

Damit liefert die Taylorsche Formel Fehlerabschätzungen der folgenden Art:

Beispiel 29.2 Für $f(x) = \sin x$ gilt $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$ und $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$, d.h. $|f^{(n)}(\xi)| \leq 1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Unter Verwendung der Sinus-Reihe gilt somit für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\Big|\sin x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\ .$$

Satz 29.3 (hinreichendes Kriterium für lokale Extrema) *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. In einem inneren Punkt $a \in I$ gelte $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$, aber $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Dann hat f im Punkt a*

i) *ein strenges lokales Minimum, falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(a) > 0$;*

ii) *ein strenges lokales Maximum, falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(a) < 0$;*

iii) *kein lokales Extremum, falls n gerade ist.*

Beweis. Einsetzen der Voraussetzungen in die Taylorsche Formel mit ergibt $f(x) = f(a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ für ein ξ zwischen x und a. Wegen der Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ gibt es nach Satz 20.10.ii) eine Umgebung $U \subset I$ von a, in der $f^{(n+1)}(\xi)$ das gleiche Vorzeichen wie $f^{(n+1)}(a)$ hat. Ist $n+1$ gerade und $f^{(n+1)}(a) > 0$, so folgt $f(x) > f(a)$ für alle $x \in U \setminus \{a\}$, d.h. f hat in a ein strenges lokales Minimum. Analog für ii). Ist dagegen $n+1$ ungerade und z.B. $f^{(n+1)}(a) > 0$, so folgt $f(x) < f(a)$ für $x < a$ und $f(x) > f(a)$ für $x > a$, d.h. f hat in a kein lokales Extremum. □

Satz 29.4 *Es sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann gibt es eine stetige Funktion $r : I \to \mathbb{C}$ mit $r(a) = 0$ und $f(x) = (T_n f)(x; a) + (x-a)^n r(x)$.*

Beweis. Stetigkeit von r in $x \neq a$ folgt aus der Definition, so daß nur $\lim_{x\to a} r(x) = 0$ zu zeigen ist. Nach Zerlegung in Real- und Imaginärteil genügt der Beweis für reellwertige Funktionen. Mit der Taylorschen Formel gilt

$$\big(f(x) - (T_{n-1}f)(x;a)\big) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

für ein ξ zwischen x und a, d.h. $r(x) = \dfrac{f^{(n)}(\xi) - f^n(a)}{n!}$ für $x \neq a$. Mit $x \to a$ geht auch $\xi \to a$, so daß aus der Stetigkeit von $f^{(n)}$ folgt $\lim_{x\to a} r(x) = 0$. □

Für diese Eigenschaft ist das Landau-Symbol "o" gebräuchlich, $f(x) = (T_n f)(x;a) + o\big((x-a)^n\big)$. Darunter versteht man

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{für } x \to a \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \;.$$

Definition 29.5 Es sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Die Potenzreihe $(Tf)(x;a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ heißt die *Taylor-Reihe* von f im Punkt $a \in I$. Konvergiert $(Tf)(x;a)$ gegen $f(x)$ für alle x aus einer Umgebung $U \subset I$ von a, so sagt man: f besitzt in U eine *Taylor-Entwicklung* um a.

Warnung: Die Taylor-Reihe ist ein formaler Ausdruck! Während die Taylorsche Formel mit Restglied exakt gilt, muß die Taylor-Reihe für $x \neq a$ nicht konvergieren (der Konvergenzradius ist dann 0), und selbst wenn die Taylor-Reihe konvergiert, muß $(Tf)(x;a)$ nicht gleich $f(x)$ sein!

Beispiel 29.6 Wir erinnern an die schon in Abschnitt 28 eingeführte Einschaltfunktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Die Ableitungen in $x > 0$ sind von der Form $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}})$ für ein Polynom P_n vom Grad $2n$ in $\frac{1}{x}$, denn nach Produkt- und Kettenregel ist

$$f^{(n+1)}(x) = \Big(P_n(\tfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}\Big)' = \Big(-P_n'(\tfrac{1}{x})\frac{1}{x^2} + P_n(\tfrac{1}{x})\frac{1}{x^2}\Big)e^{-\frac{1}{x}} \;.$$

Dabei ist die Ableitung P' des Polynoms ein Polynom $(2n-1)$-ter Ordnung. Somit ist $\lim_{x\searrow 0} f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und folglich $(Tf)(x;0) = 0 \neq f(x)$.

Ist eine Funktion f durch eine Potenzreihe darstellbar, so stimmt die Taylor-Reihe (innerhalb des Konvergenzkreises) mit f überein. Insbesondere lassen sich die im Laufe des Semesters hergeleiteten Potenzreihen reproduzieren:

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\\
\cosh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\\
\sinh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k\,, \qquad x \in \mathbb{R} \text{ für } \alpha \in \mathbb{N}\,, \quad x \in]-1,1[\text{ für } \alpha \in \mathbb{C}\,,\\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}\,, \qquad x \in]-1,1]\,,\\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k+1}}{2k+1}\,, \qquad x \in [-1,1]\,,\\
\arcsin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,, \qquad x \in]-1,1[\,.
\end{aligned}
$$

Zu beachten ist, daß einige dieser Potenzreihen sogar für komplexe Zahlen $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gelten, während wir die Differentiation nur im Reellen eingeführt hatten.

30 Partielle Ableitungen

Wir betrachten Funktionen mehrerer Veränderlicher, also Abbildungen $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$. Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$. Partielle Ableitungen von f sind gewöhnliche Ableitungen, die man erhält, wenn alle Komponenten von x bis auf eine festgehalten werden.

Dazu betrachten wir folgende in U eingebettete Intervalle:

$$I_j = \{(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, x_n) \in U \;:\; t \in \tilde{I}_j \subset \mathbb{R} \text{ mit } x_j \in \tilde{I}_j\}\,.$$

Die Einschränkung der Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ auf I_j wird dann zu einer gewöhnlichen Funktion $f\big|_{I_j} : \tilde{I}_j \to \mathbb{R}$ einer Veränderlicher mit $f\big|_{I_j}(t) =$

$f(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, x_n)$. Für diese Funktion können wir die Differenzierbarkeit im Punkt x_j betrachten. Das Ergebnis ist die partielle Ableitung von f in der j-ten Koordinatenrichtung:

Definition 30.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x \in U$ *partiell differenzierbar* in der j-ten Koordinatenrichtung, falls der Grenzwert

$$(\partial_j f)(x) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h}\big(f(x + he_j) - f(x)\big)$$

existiert. Dabei ist $e_j \in \mathbb{R}^n$ der j-te Einheitsvektor und h ist so zu wählen, daß $x + he_j \in U$. Der Grenzwert $(\partial_j f)(x)$ heißt die *j-te partielle Ableitung* von f in x.

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt *partiell differenzierbar*, falls $(\partial_j f)(x)$ für alle $x \in U$ und alle $1 \leq j \leq n$ existiert, und *stetig partiell differenzierbar*, falls alle Funktionen $\partial_j f : U \to \mathbb{R}$ stetig sind.

Oft schreibt man auch $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ an Stelle von $\partial_j f$. Zur Existenz des Grenzwertes muß U nicht notwendig offen sein.

Die partielle Ableitung erfüllt die Leibniz-Regel: Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbare Funktionen auf U, dann gilt

$$(\partial_j(f \cdot g))(x) = (\partial_j f)(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot (\partial_j g)(x) \;, \qquad x \in U \;.$$

Beispiel 30.2 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2} \sin x_1$. Dann ist $(\partial_1 f)(x_1, x_2) = (2x_1 \sin x_1 + \cos x_1)e^{x_1^2 + x_2^2}$ und $(\partial_2 f)(x_1, x_2) = 2x_2 \sin x_1 e^{x_1^2 + x_2^2}$.

Beispiel 30.3 Die partielle Ableitung des Radius $r(x) := \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ in der j-ten Koordinatenrichtung ist nach der Kettenregel

$$\frac{\partial r}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} \cdot 2x_j = \frac{x_j}{r} \;.$$

Damit ist $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar mit $(\partial_j r)(x) = \frac{x_j}{r}$.

Entsprechend ist nach der Kettenregel jede differenzierbare Funktion $f(r)$ des Radius, aufgefaßt als Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, partiell differenzierbar mit $(\partial_i f)(x) = x_j \frac{f'(r)}{r}$. Zum Beispiel sind für $f(r) = \mathrm{e}^{-ar^2}$ die partiellen Ableitungen gegeben durch $(\partial_j f)(x) = -2ax_j f(r)$.

Das folgende Beispiel zeigt, daß aus der partiellen Differenzierbarkeit einer Funktion nicht die Stetigkeit folgt.

Beispiel 30.4 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Dann ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ partiell differenzierbar mit

$$(\partial_1 f)(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2x_1^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

und analog

$$(\partial_2 f)(x_1, x_2) = \frac{x_1(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} .$$

Im Nullpunkt haben wir

$$(\partial_1 f)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 , \quad (\partial_1 f)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0 ,$$

so daß f auf dem gesamten $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar ist. Jedoch ist f nicht stetig in $(0,0)$. Die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $y_k = (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1})$ konvergiert gegen $(0,0)$, aber

$$f(y_k) = \frac{\frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k+1}}{(\frac{1}{k+1})^2 + (\frac{1}{k+1})^2} = \frac{1}{2}$$

konvergiert nicht gegen $f(0) = 0$.

Eine Verallgemeinerung der partiellen Ableitung ist die Richtungsableitung:

Definition 30.5 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Dann heißt der Differentialquotient

$$(D_v f)(x) := \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

die *Richtungsableitung* der Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ im Punkt x in Richtung v.

Insbesondere sind die partiellen Ableitungen die Richtungsableitungen in Richtung der Standardbasisvektoren, $(D_{e_i} f)(x) = (\partial_i f)(x)$. Damit folgt aus der Existenz aller Richtungsableitungen die partielle Differenzierbarkeit. Die Umkehrung gilt nicht. Wir werden nun sehen, daß Stetigkeit der partiellen Ableitungen die Existenz aller Richtungsableitungen impliziert.

Satz 30.6 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar auf U. Sei $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann ist*

$$f(x+\xi) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k (\partial_k f)(x) = o(\|\xi\|) ,$$

d.h. für die durch $\phi(\xi) := f(x+\xi) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\partial_k f)(x)$ auf einer Umgebung $V \in \mathbb{R}^n$ von 0 erklärte Funktion gilt $\lim_{\xi\to 0} \frac{\phi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$. Insbesondere existieren alle Richtungsableitungen von f, mit $(D_v f)(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k (\partial_k f)(x)$.

Beweis. Da U offen, gibt es ein $\delta > 0$ mit $K_\delta(x) \subset U$. Wir wählen ein $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \delta$ und betrachten die Punkte $z^{(k)} := x + \sum_{j=1}^k \xi_j e_j$. Es gilt $z^{(0)} = x$ und $z^{(n)} = x + \xi$. Da sich benachbarte $z^{(k-1)}$ und $z^{(k)}$ nur in der k-ten Koordinate unterscheiden, können wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden: Es gibt also ein $\eta^{(k)} \in \mathbb{R}$ mit $|\eta^{(k)}| < |\xi_k|$, so daß

$$f(z^{(k)}) - f(z^{(k-1)}) = \xi_k \cdot (\partial_k f)(y^{(k)}) \,, \qquad y^{(k)} := z^{(k-1)} + \eta^{(k)} e_k \,.$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} f(x+\xi) &= f(x) + \sum_{k=1}^n \xi_k \cdot (\partial_k f)(y^{(k)}) \\ &= f(x) + \sum_{k=1}^n (\partial_k f)(x) \cdot \xi_k + \underbrace{\sum_{k=1}^n \big((\partial_k f)(y^{(k)}) - (\partial_k f)(x)\big) \cdot \xi_k}_{\phi(\xi)} \,. \end{aligned}$$

Für $\xi \to 0$ strebt y_k gegen x. Aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen folgt $\lim\limits_{\xi \to 0} (\partial_k f)(y^{(k)}) = (\partial_k f)(x)$ und damit $\lim\limits_{\substack{\xi \to 0 \in \mathbb{R}^n \\ \xi \neq 0}} \dfrac{\phi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$. □

Die partielle Ableitung einer partiell differenzierbaren Funktion kann nochmals partiell differenziert werden, usw. Induktiv definieren wir:

Definition 30.7 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}^\times$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt $(k+1)$-*mal partiell differenzierbar*, wenn sie k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen $\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f$ partiell differenzierbar sind. Sind die partiellen Ableitungen $\partial_{i_{k+1}} \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f$ stetig, so heißt f eine $(k+1)$-*mal stetig partiell differenzierbare Funktion*.

Satz 30.8 (Schwarz) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann vertauschen die zweiten partiellen Ableitungen, d.h. für alle $a \in U$ und alle $i, j = 1, \dots, n$ gilt*

$$(\partial_i \partial_j f)(a) = (\partial_j \partial_i f)(a) \,.$$

Beweis. Der Übersichtlichkeit wegen sei $i = 1, j = 2$ (kann durch Umnumerieren der Koordinaten immer erreicht werden) und dann $n = 2$ (die weiteren Komponenten sind festgehalten und spielen keine Rolle).

Für gegebenes $\delta > 0$ sei $W_\delta(a) \subset U \subset \mathbb{R}^2$ der offene Würfel mit Kantenlänge 2δ und Mittelpunkt $a = (x_0, y_0)$. Es sei (x, y) ein beliebiger Punkt von W_δ, d.h. $|x - x_0| < \delta$ und $|y - y_0| < \delta$. Für festgehaltenes y sei $F_y(x) = f(x, y) - f(x, y_0)$. Nach dem Mittelwersatz der Differentialrechnung gibt es einen Punkt $\xi \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, so daß

$$F_y(x) - F_y(x_0) = F_y'(\xi) \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y)-f(x,y_0)-f(x_0,y)+f(x_0,y_0) = \big((\partial_1 f)(\xi,y) - (\partial_1 f)(\xi,y_0)\big)\cdot(x-x_0) \;.$$

Wir nutzen den Mittelwertsatz nochmals für die Funktion $G_\xi(y) := (\partial_1 f)(\xi, y)$. Es gibt also ein $\eta \in]y_0-\delta, y_0+\delta[$, so daß

$$\begin{aligned} G_\xi(y) - G_\xi(y_0) &= G'_\xi(\eta)\cdot(y-y_0) \\ \Rightarrow \quad (\partial_1 f)(\xi,y) - (\partial_1 f)(\xi,y_0) &= (\partial_2\partial_1 f)(\xi,\eta)\cdot(y-y_0) \;. \end{aligned}$$

Insgesamt gibt es somit ein $(\xi,\eta)\in W_\delta$ mit

$$f(x,y)-f(x,y_0)-f(x_0,y)+f(x_0,y_0) = (\partial_2\partial_1 f)(\xi,\eta)\cdot(x-x_0)(y-y_0) \;.$$

Wir können aber auch erst x festhalten und den Mittelwertsatz in y anwenden, und als letztes den Mittelwertwsatz in x. Im Ergebnis gibt es einen neuen Punkt $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\in W_\delta$ mit

$$f(x,y)-f(x,y_0)-f(x_0,y)+f(x_0,y_0) = (\partial_1\partial_2 f)(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\cdot(x-x_0)(y-y_0) \;.$$

Somit gilt $(\partial_2\partial_1 f)(\xi,\eta) = (\partial_1\partial_2 f)(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$. Lassen wir δ gegen 0 streben, so konvergieren (ξ,η) und $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ gegen (x,y), und aus der vorausgesetzten Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen folgt $(\partial_2\partial_1 f)(x,y) = (\partial_1\partial_2 f)(x,y)$. □

Entsprechend können bei k-mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen die partiellen Ableitungen in beliebiger Reihenfolge geschrieben werden:

$$\partial_{i_1}\dots\partial_{i_k} f = \partial_{\pi(i_1)}\dots\partial_{\pi(i_k)} f$$

für eine beliebige Permutation π der Indizes $i_1,\dots,i_k$, denn jede Permutation läßt sich durch Vertauschen benachbarter Elemente darstellen. Es ist deshalb auch üblich, die mehrfachen partiellen Ableitungen zu schreiben als

$$\partial_{i_1}\dots\partial_{i_k} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}} \;.$$

31 Vektorfelder, Gradient und Divergenz

Definition 31.1 Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen und $f: U\to\mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Dann heißt der Vektor

$$(\operatorname{grad} f)(x) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big)\in\mathbb{R}^n$$

der *Gradient* von f im Punkt $x\in U$.

Der Gradient ist linear und erfüllt die Leibniz-Regel: Sind $f, g : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so gilt

$$(\operatorname{grad}(f+g))(x) = (\operatorname{grad} f)(x) + (\operatorname{grad} g)(x) ,$$
$$(\operatorname{grad}(f \cdot g))(x) = (\operatorname{grad} f)(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot (\operatorname{grad} g)(x) .$$

Ist $f : U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, dann gilt nach Satz 30.6 für jeden Punkt $x \in U$ und jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$

$$(D_v f)(x) = \langle v, (\operatorname{grad} f)(x) \rangle .$$

Wählen wir v als Einheitsvektor, $\|v\| = 1$, dann ist nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz $|D_v f| \leq \|\operatorname{grad} f\|$, mit Gleichheit genau dann, wenn v und $\operatorname{grad} f$ linear abhängig sind. Damit ist der Gradient in Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion gerichtet, und die Norm $\|(\operatorname{grad} f)(x)\|$ ist ein Maß für die Stärke des Anstiegs.

Beispiel 31.2 Für $f(x) = r$ gilt $\operatorname{grad} r = \frac{x}{r}$, der steilste Anstieg ist also radial nach außen gerichtet und vom Betrag her überall (außer im Nullpunkt) konstant.

Für $f(x) = \frac{1}{r}$ ist $\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{x}{r^3}$. Der steilste Anstieg ist radial nach innen gerichtet und wächst zum Nullpunkt quadratisch. ◁

Definition 31.3 Unter einer (stetigen) *Kurve* im $\mathbb{R}^n$ versteht man eine (stetige) Abbildung $c : I \to \mathbb{R}^n$ (wobei $I \subset \mathbb{R}^n$ aus mehr als einem Punkt besteht). Eine Kurve $c = (c_1, \dots, c_n) : I \to \mathbb{R}^n$ heißt *(stetig) differenzierbar* in $t \in I$, wenn jede Komponentenfunktion $c_i : I \to \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar in $t \in I$ ist. In diesem Fall heißt

$$c'(t) := \big(c_1'(t), \dots, c_n'(t)\big) \in \mathbb{R}^n$$

der *Tangentialvektor* an c im Punkt $c(t)$.

Satz 31.4 (Ableitung entlang einer Kurve) *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $c = (c_1, \dots, c_n) : I \to U$ eine in $t \in I$ differenzierbare Kurve und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann ist die Funktion $f \circ c : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in t mit*

$$(f \circ c)'(t) = \big\langle (\operatorname{grad} f)(c(t)), c'(t) \big\rangle = \big(D_{c'(t)} f\big)(c(t)) .$$

Beweis. Sei $c(t) = x \in U$. Da U offen, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $K_\epsilon(x) \subset U$. Da $c : I \to U$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $c(]t-\delta, t+\delta[) \subset K_\epsilon(x)$. Nach Differenzierbarkeit der Kurve gibt es Funktionen $\phi_k :]t-\delta, t+\delta[\to \mathbb{R}$ mit

$$c_k(t+h) = c_k(t) + h\, c_k'(t) + \phi_k(t) , \qquad |h| < \delta , \quad \lim_{h \to 0} \frac{\phi_k(t)}{h} = 0 .$$

Wegen der stetigen partiellen Differenzierbarkeit von f gibt es eine auf $K_\epsilon(x)$ definierte Funktion ϕ mit

$$\begin{aligned} f(c(t+h)) - f(c(t)) &= f\Big(x + \sum_{k=1}^{n} e_k\big(h\, c_k'(t) + \phi_k(t)\big)\Big) - f(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\partial_k f)(x) \cdot \big(hc_k'(t) + \phi_k(t)\big) + \phi(x) \end{aligned}$$

mit $\lim_{c(t+h)\to c(t)} \frac{\phi(x)}{\|c(t+h)-c(t)\|} = 0$. Wegen

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(x)}{h} = \pm \lim_{h\to 0} \frac{\phi(x)}{\|c(t+h)-c(t)\|} \Big\| \frac{c(t+h)-c(t)}{h} \Big\| = 0$$

existiert der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(c(t+h)) - f(c(t))\big)$ und hat den angegebenen Wert. $\square$

Folglich ist die Ableitung einer stetig partiell differenzierbaren Funktion längs einer Kurve gegeben als die Richtungsableitung der Funktion in Richtung des Tangentialvektors der Kurve.

Beispiel 31.5 Die Ableitung der Funktion $f(x;y;z) := x^2 + y^2 - z^2$ entlang der Schraubenline $c(t) = (ht; \sin t; \cos t)$ ist

$$(f \circ c)'(t) = \left\langle \begin{pmatrix} 2ht \\ 2\sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \right\rangle = 2h^2 t + 4 \sin t \cos t\ .$$

Über eine differenzierbare Kurve läßt sich der Mittelwertsatz auf den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern:

Satz 31.6 (Mittelwertsatz) *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion. Für zwei Punkte $a, b \in U$ gelte $c(t) := a + (b-a)t \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gibt es einen Zwischenpunkt $\xi = a + (b-a)t_0$, mit $t_0 \in\,]0,1[$, so daß $f(b) - f(a) = \big\langle (\mathrm{grad}\, f)(\xi), (b-a)\big\rangle$.*

Beweis. Für $F = f \circ c$ mit der differenzierbaren Kurve $c : [0,1] \to U$ gilt nach Satz 31.4 $F'(t) = \big\langle (\mathrm{grad}\, f)(c(t)), c'(t)\big\rangle$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein $t_0 \in\,]0,1[$, so daß für $F(1) = f(b)$, $F(0) = f(a)$ gilt $f(b) - f(a) = F(1) - F(0) = F'(t_0) = \big\langle (\mathrm{grad}\, f)(c(t_0)), c'(t_0)\big\rangle$, mit $\xi = c(t_0) = a + (b-a)t_0$ und $c'(t_0) = b - a$. $\square$

Der Gradient $(\mathrm{grad}\, f)(x)$ ordnet jedem Punkt $x \in U$ einen Vektor zu. So etwas nennt man ein Vektorfeld:

Definition 31.7 Unter einem *Vektorfeld* auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ versteht man eine Abbildung $v : U \to \mathbb{R}^n$. Das Vektorfeld heißt stetig/partiell differenzierbar/..., wenn alle Komponenten von v stetig/partiell differenzierbar/... sind.

Die Vorstellung ist, daß an jedem Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ ein Vektor $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$ angeheftet ist. Eine nützliche Konstruktion besteht darin, diese Vektoren als Tangentialvektoren an Kurven $c : I \to \mathbb{R}^n$ durch $x = c(t_0)$ zu betrachten. Ist $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))$, dann ist also

$$c_i'(t) = v_i(c(t)) \ , \quad c_i(t_0) = x_i \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n \text{ und } t, t_0 \in I$$

Die Kurve selbst ist dann durch Lösen (Integration) dieser $2n$ Gleichungen zu erhalten und heißt *Integralkurve* des Vektorfeldes durch x. In der Physik werden die Bilder der Integralkurven auch *Feldlinien* bzw. *Stromlinien* des Vektorfelds genannt. Unter recht schwachen Voraussetzungen an das Vektorfeld (Lipschitz-stetig) kann man in einer genügend kleinen Umgebung von x die Integralkurven immer finden, aber nicht unbedingt auf ganz U, weil das an Singularitäten des Vektorfeldes scheitern kann. Eine Art von Singularität ist die Divergenz:

Definition 31.8 Sei $v = (v_1, \ldots, v_n) : U \to \mathbb{R}^n$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt die Funktion

$$\mathrm{div}(v) := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

die *Divergenz* des Vektorfeldes v.

Die Divergenz ist linear, $\mathrm{div}(v + w) = \mathrm{div}(v) + \mathrm{div}(w)$, und erfüllt folgendes Analogon zur Leibniz-Regel: Sei v ein partiell differenzierbares Vektorfeld und f eine partiell differenzierbare Funktion auf $U \subset \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\mathrm{div}(f \cdot v) = \langle \mathrm{grad}(f), v \rangle + f \cdot \mathrm{div}(v) \ .$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein Maß für die Gesamtbeschleunigung der Integralkurven. Das kann einerseits dadurch erreicht werden, daß die Feldlinien von der Parallelität abweichen (was wahrscheinlich den Namen motiviert hat), oder durch Geschwindigkeitszunahme entlang der Feldlinien.

Beispiel 31.9 Für $v(x) = x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mathrm{div}\, x = n$. Hier sind die Feldlinien radial vom Nullpunkt nach außen gerichtet und gerade durch den Radius parametrisiert.

Für $v(x) = \frac{x}{\|x\|}$ gilt mit $\|x\| = r$

$$\mathrm{div}\frac{x}{r} = \left\langle \mathrm{grad}\frac{1}{r}, x \right\rangle + \frac{1}{r} \cdot \mathrm{div}\, x = -\frac{1}{r^3}\langle x, x \rangle + \frac{n}{r} = \frac{n-1}{r} \qquad \text{für } x \neq 0 \ .$$

Die Vektoren $v(x) = \frac{x}{\|x\|}$ haben in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Länge 1, aber die Feldlinien sind wieder radial nach außen gerichtet und damit nicht parallel.

Gradient und Divergenz sind wichtige Hilfsmittel der Theoretischen Physik. In der Mechanik läßt sich ein konservatives Kraftfeld als (negativer) Gradient eines Potentials schreiben, $F = -\mathrm{grad}\, V$. In der Elektrodynamik wird die Divergenz von Vektorfeldern zur Formulierung der Maxwellschen Gleichungen gebraucht. Dort gibt es noch eine weitere Konstruktion mit partiellen Ableitungen, die *Rotation*. Die Rotation und das *Vektorprodukt* beruhen auf einer nur im $\mathbb{R}^3$ möglichen Identifikation von sogenannten *Differentialformen*, auf die wir hier nicht eingehen.

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist $\mathrm{grad}\, f$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U, dessen Divergenz die Funktion $\mathrm{div} \mathrm{grad}\, f$ ist. Die Abbildung $\Delta : f \mapsto \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f)$ heißt *Laplace-Operator*, und es gilt

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \,.$$

Der Laplace-Operator tritt in wichtigen partiellen Differentialgleichungen auf, z.B. der Poisson-Gleichung

$$\Delta f = -\rho \,, \qquad \rho : U \to \mathbb{R} \,.$$

32 Die mehrdimensionale Taylorsche Formel

Um die im folgenden auftretenden vielen Indizes übersichtlicher zu gestalten, hat sich eine abkürzende Schreibweise eingebürgert. Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex, d.h. ein n-Tupel von Indizes $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Dann setzt man

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \,, \qquad \alpha! := \alpha_1!\, \alpha_2! \cdots \alpha_n! \,.$$

Für eine $|\alpha|$-mal stetig partiell differenzierare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ schreibt sich eine mehrfache partielle Ableitung wie folgt:

$$(\partial^\alpha f)(x) := (\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f)(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \,.$$

Dabei ist $\partial_i^{\alpha_i} f = \underbrace{\partial_i \dots \partial_i}_{\alpha_i \mathrm{mal}} f$. Ebenso setzt man $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Satz 32.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Zu $x \in U$ sei ein Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, daß $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann ist die Funktion einer Veränderlichen*

$$g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R} \,, \qquad g(t) := f(x + t\xi)$$

k-mal stetig differenzierbar auf $[0, 1]$, und es gilt

$$g^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \xi^\alpha \, (\partial^\alpha f)(x + t\xi) \,.$$

Dabei läuft die Summe über alle Multiindizes α mit $|\alpha| = k$.

Beweis. Es gilt $g = f \circ c$ mit $c(t) = x + t\xi$. Nach Satz 31.4 ist

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (\partial_i f)(x + t\xi) \ .$$

Durch wiederholte Ableitung längs c jeder Funktion $(\partial_i f)(x + t\xi) = (g_i \circ c)(t)$, u.s.w., berechnen wir die höheren Ableitungen, wobei wir zunächst nicht den Satz von Schwarz verwenden, d.h. wir betrachten $\partial_i \partial_j$ und $\partial_j \partial_i$ als verschieden. Es ergibt sich

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k = 1}^{n} \xi_{i_k} \cdots \xi_{i_2} \xi_{i_1} (\partial_{i_k} \dots \partial_{i_2} \partial_{i_1} f)(x + t\xi) \ .$$

Nach dem Satz von Schwarz können wir die partiellen Ableitungen ordnen und zu ∂^α zusammenfassen mit $|\alpha| = k$. Ebenso fassen sich die Produkte der ξ_i zu ξ^α zusammen. Es gibt $\frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$ verschiedene $\partial_{i_k} \dots \partial_{i_2} \partial_{i_1}$, die nach Umordnung das gleiche ∂^α ergeben. $\square$

Satz 32.2 (Taylor) *Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine $(k+1)$-mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Zu $x \in U$ sei ein Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, daß $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gibt es ein $\theta \in [0, 1]$, so daß*

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x) + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x + \theta\xi) \ .$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion einer Veränderlichen $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die durch $g[t] := f(x + t\xi)$ gegeben ist. Nach Satz 32.1 ist g eine $(k + 1)$ mal stetig differenzierbare Funktion, auf die wir die eindimensionale Taylorsche Formel (Satz 29.1) anwenden können: Es gibt also ein $\theta \in [0, 1]$ mit

$$g(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} \ .$$

Einsetzen von $g(t) = f(x + t\xi)$ und Verwenden von Satz 32.1 liefert die Behauptung. $\square$

Der Satz von Taylor ist wichtig bei Abschätzungen der folgenden Art:

Satz 32.3 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann gilt für jedes $x \in U$*

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x) + o(\|\xi\|^k) \qquad \textit{für } \xi \to 0 \ .$$

Beweis. Da U offen, gibt es ein $\delta > 0$, so daß $K_\delta(x) \subset U$. Dann gibt es zu jedem $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \delta$ ein $\theta \in [0,1]$ mit

$$\begin{aligned} f(x+\xi) &= \sum_{|\alpha|\le k-1} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(x) + \sum_{|\alpha|=k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(x+\theta\xi) \\ &= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!}(\partial^\alpha f)(x) + \sum_{|\alpha|=k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\big((\partial^\alpha f)(x+\theta\xi) - (\partial^\alpha f)(x)\big) \;. \end{aligned}$$

Es gilt $|\xi^\alpha| = |\xi_1|^{\alpha_1}\cdots|\xi_n|^{\alpha_n} \le \|\xi\|^{\alpha_1}\cdots\|\xi\|^{\alpha_n} = \|\xi\|^{|\alpha|}$. Da $\partial^\alpha f$ stetig ist, gilt

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{1}{\|\xi\|^k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!}\big((\partial^\alpha f)(x+\theta\xi) - (\partial^\alpha f)(x)\big) = 0 \;.$$

Das ist genau die Behauptung. □

Für $k = 1$ ist die Menge aller Multiindizes α mit $|\alpha| = 1$ gerade die Menge der Standardbasisvektoren (e_i). Somit erhalten wir die Formel aus Satz 30.6

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle \xi, (\mathrm{grad} f)(x)\rangle + o(\|\xi\|) \;.$$

Für $k = 2$ ergibt sich

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle \xi, (\mathrm{grad} f)(x)\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \xi_i\xi_j(\partial_i\partial_j f)(x) + o(\|\xi\|^2) \;.$$

Dabei gibt es die Möglichkeiten $\alpha = (0,\dots,0,2,0,\dots,0)$ mit $\alpha! = 2$ und $\alpha = (0,\dots,0,1,0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ mit $\alpha! = 1$, wobei die Einsen an der i-ten und j-ten Stelle stehen mit $i < j$. Da eine in i,j symmetrische Funktion summiert wird, kann die Summe mit $i < j$ durch die halbe Summe mit $i \neq j$ ersetzt werden. Zusammen mit der Summe über $i = j$ von $\alpha = (0,\dots,0,2,0,\dots,0)$ ergibt sich die Beziehung.

Definition 32.4 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion. Dann heißt die symmetrische $n \times n$-Matrix

$$(\mathrm{Hess}\, f)(x) := \big((\partial_i\partial_j f)(x)\big)_{1\le i,j\le n}$$

die *Hessesche Matrix* von f im Punkt x.

Dabei heißt eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ symmetrisch, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ ist. Somit gilt

$$\begin{gathered} f(x+\xi) = f(x) + \langle a, \xi\rangle + \frac{1}{2}\langle \xi, A\xi\rangle + o(\|\xi\|^2) \\ \text{mit } a = (\mathrm{grad}\, f)(x)\;,\; A = (\mathrm{Hess}\, f)(x) \;. \end{gathered}$$

Die Hessesche Matrix ist wichtig bei der Untersuchung von lokalen Extrema einer Funktion. Zunächst gilt in Verallgemeinerung von Satz 27.2

Satz 32.5 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Besitzt f in $x \in U$ ein lokales Extremum, so gilt* $(\operatorname{grad} f)(x) = 0$.

Beweis. Es genügt, die n Funktionen einer Veränderlichen $g_i(t) := f(x + te_i)$ zu betrachten, wobei e_i der i-te Standardbasisvektor ist und $t \in [-\epsilon, \epsilon]$. Hat f ein lokales Extremum in x, so hat g_i ein lokales Extremum in 0. Dann gilt $0 = g_i'(0) = (\partial_i f)(x)$. Da das für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt, folgt die Behauptung. □

Wir beweisen eine hinreichende Bedingung für lokale Extrema unter Verwendung der Hesseschen Matrix. Dazu benötigen wir:

Definition 32.6 Eine symmetrische Matrix $A \in M(n, \mathbb{R})$ heißt

- *positiv definit*, falls $\langle \xi, A\xi \rangle > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- *positiv semidefinit*, falls $\langle \xi, A\xi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- *negativ (semi)definit*, falls $-A$ positiv (semi)definit ist,
- *indefinit*, falls es $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $\langle \xi, A\xi \rangle > 0$ und $\langle \eta, A\eta \rangle < 0$.

Ist eine symmetrische Matrix $A \in M(n, \mathbb{R})$ positiv definit, dann definiert $\langle x, y \rangle_A := \langle x, Ax \rangle$ ein neues Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle_A$ auf $\mathbb{R}^n$, siehe Definition 16.1. Dabei folgt (S2), die Symmetrie $\langle x, y \rangle_A = \langle y, x \rangle_A$, aus der Symmetrie der Matrix und (S3) aus der positiven Definitheit. Die Linearität (S1) ist klar.

Satz 32.7 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. In einem Punkt $x \in U$ gelte* $(\operatorname{grad} f)(x) = 0$.

i) *Ist* $(\operatorname{Hess} f)(x)$ *positiv definit, so besitzt f in x ein striktes lokales Minimum.*

ii) *Ist* $(\operatorname{Hess} f)(x)$ *negativ definit, so besitzt f in x ein striktes lokales Maximum.*

iii) *Ist* $(\operatorname{Hess} f)(x)$ *indefinit, so besitzt f in x kein lokales Extremum.*

Beweis. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei $A := (\operatorname{Hess} f)(x)$. In einer Umgebung V von x gilt

$$f(x + \xi) = f(x) + \frac{1}{2}\langle \xi, A\xi \rangle + \phi(\xi) \qquad \text{mit } \phi(\xi) = o(\|\xi\|^2) \,.$$

Es gibt also zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $|\phi(\xi)| < \epsilon\|\xi\|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \delta$.

i) Die $(n-1)$-Sphäre $S^{n-1} := \{\eta \in \mathbb{R}^n \ :\ \|\eta\| = 1\}$ ist kompakt. Nach Satz 24.11 nimmt die stetige Funktion $g : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ mit $g(\eta) := \langle \eta, A\eta \rangle$ auf S^{n-1} ihr Supremum und ihr Infimum an. Es gibt also ein $\mu > 0$ (wegen der positiven Definitheit) mit

$$\mu := \min_{\eta \in S^{n-1}} \{\langle \eta, A\eta \rangle\} \,.$$

Da für beliebiges $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $\frac{1}{\|\xi\|}\xi \in S^{n-1}$, folgt $\langle \xi, A\xi\rangle \geq \mu\|\xi\|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ (für $\xi = 0$ trivialerweise). Wählen wir δ so klein, daß $|\phi(\xi)| \leq \frac{\mu}{4}\|\xi\|^2$, so gilt $\frac{1}{2}\langle \xi, A\xi\rangle + \phi(\xi) \geq \frac{\mu}{4}\|\xi\|^2$. Folglich haben wir

$$f(x+\xi) \geq f(x) + \frac{\mu}{4}\|\xi\|^2 \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|\xi\| < \delta\,.$$

Also hat f in x ein striktes lokales Minimum. Analog beweist man ii).

iii) Wir zeigen, daß es $y_1, y_2 \in U$ gibt mit $f(y_1) < f(x) < f(y_2)$. Nach Voraussetzung gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle \xi, A\xi\rangle := \mu > 0$. Dann gilt für hinreichend kleine $t > 0$

$$f(x+t\xi) = f(x) + \frac{\mu}{2}t^2 + \phi(t\xi)\,.$$

Wie zuvor finden wir ein $\delta > 0$, so daß $|\phi(t\xi)| \leq \frac{\mu}{4}t^2$ gilt für alle $0 < t < \delta$. Dann ist $f(x+t\xi) > f(x)$ für alle $0 < t < \delta$. Ebenso folgt aus der Existenz eines $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle \eta, A\eta\rangle := -\mu' < 0$, daß $f(x+t'\eta) < f(x)$ für alle $0 < t' < \delta'$. $\square$

Ist die Hessesche Matrix im Punkt x positiv oder negativ semidefinit, so muß man höhere Ordnungen in der Taylorsche Formel betrachten, um Aussagen über Extrema von f mit $(\operatorname{grad} f)(x) = 0$ zu gewinnen.

Beispiel 32.8 i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$.
Es gilt $(\operatorname{grad} f)(x,y) = (2x, 2y)$, folglich kann f nur in $(0,0)$ ein lokales Extremum haben. Wir testen $(\operatorname{Hess} f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Da $(\operatorname{Hess} f)(0,0)$ positiv definit, hat f im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$.
Es gilt $(\operatorname{grad} f)(x,y) = (2x, -2y)$, folglich kann f nur in $(0,0)$ ein lokales Extremum haben. Wir testen $(\operatorname{Hess} f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Damit ist $(\operatorname{Hess} f)(0,0)$ indefinit, so daß f im Punkt $(0,0)$ kein Extremum hat.

Wir werden später mit Hilfe der Determinante ein einfaches Kriterium zur Bestimmung der Definitheit einer Matrix herleiten.

33 Potenzreihenansatz zur Lösung von Differentialgleichungen

Unter einer gewönlichen Differentialgleichung versteht man eine Gleichung zwischen einer Funktion y, ihren Ableitungen $y', y'', \dots y^{(n)}$ und der Variablen x. Viele Probleme der Physik lassen sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben. Beispiele sind eindimensionale Bewegungen in der Mechanik, die durch das Newtonsche Gesetz

$$y''(x) = F(x, y(x), y'(x))$$

beschrieben werden. Dabei ist x die Zeit, $y(x)$ der Ort, $y'(x)$ die Geschwindigkeit, $y''(x)$ die Beschleunigung und F die Kraft. Gesucht ist die *Bahnkurve* $y(x)$. Man möchte wissen, unter welchen Bedingungen die Bahnkurve existiert und durch welche Bedingungen die Bahnkurve eindeutig bestimmt ist. Ein weiteres Beispiel einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist der radioaktive Zerfall, beschrieben durch $y'(x) = -\lambda y(x)$. Dabei ist wieder x die Zeit, y die Zahl der Teilchen und y' die Zerfallsrate. Ein ähnliches Gesetz $y'(x) = \lambda y$ beschreibt auch das anfängliche Wachstum von Bakterienpopulationen.

Je nach Typ der Differentialgleichung gibt es verschiedene Lösungsstrategien. Wir geben hier einen kurzen Einblick in die Methode des Potenzreihenansatzes.

Beispiel 33.1 (Schwingungs-DGL) Gegeben sei die Differentialgleichung $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$ mit $\omega \in \mathbb{R}$. Ist $\omega = 0$, so ist $y(a) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Ansonsten versuchen wir den Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+2)(n+1)a_{n+2} + \omega^2 a_n\Big)x^n = 0 \;.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen führt das auf das System von Gleichungen $(n+2)(n+1)a_{n+2} + \omega^2 a_n = 0$. Gibt man $a_0 = a$ und $a_1 = b$ vor, so findet man

$$a_2 = -\frac{\omega^2}{1\cdot 2}a\;, \quad a_4 = -\frac{\omega^2}{3\cdot 4}a_2 = \frac{\omega^4}{4!}a\;, \quad a_6 = -\frac{\omega^2}{5\cdot 6}a_4 = -\frac{\omega^6}{6!}a\;,$$

allgemein $a_{2n} = (-1)^n \dfrac{\omega^{2n}}{(2n)!}a$ und

$$a_3 = -\frac{\omega^2}{2\cdot 3}b\;, \quad a_5 = -\frac{\omega^2}{4\cdot 5}a_3 = \frac{\omega^4}{5!}b\;, \quad a_7 = -\frac{\omega^2}{6\cdot 7}a_5 = -\frac{\omega^6}{7!}b\;,$$

allgemein $a_{2n+1} = (-1)^n \dfrac{\omega^{2n+1}}{(2n+1)!}\dfrac{b}{\omega}$. Wir erkennen die Koeffizienten der Kosinus- und Sinusreihe:

$$y(x) = a\cos(\omega x) + \frac{b}{\omega}\sin(\omega x)\;.$$

Wir werden später sehen, daß das tatsächlich die allgemeinste Lösung der Schwingungs-Differentialgleichung $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$ ist. Die zunächst beliebigen Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ werden z.B. durch Anfangsbedingungen festgelegt. Z.B. ist $y(0) = a$ der Anfangsort und $y'(0) = b$ die Anfangsgeschwindigkeit.

Eine andere Problemstellung sind Randbedingungen. Fordert man z.B. $y(0) = 0$ und $y(L) = 0$, was einer eingespannten (unendlich dünnen) Saite der Länge L entspricht, dann ist $a = 0$ und $\omega = \frac{k\pi}{L}$ für ein $k \in \mathbb{N}^\times$. Die Frequenz der eingespannten Saite kann nur ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz $\frac{\pi}{L}$ betragen.

Beispiel 33.2 Die *Besselsche Differentialgleichung* zum Parameter $p \in \mathbb{N}$ ist

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \Big(1 - \frac{p^2}{x^2}\Big)y = 0 \; .$$

Dabei ist zunächst $x \in \mathbb{R}^*_+$, jedoch kann man die Gleichung auf $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ausdehnen. Die Besselsche Differentialgleichung tritt auf bei zweidimensionalen Schwingungen und Wellen in Radialkoordinaten. Die Gleichung $\Delta u = -u$ auf $U \subset \mathbb{R}^2$ liefert mit dem Ansatz $u(r,\phi) = f(r)e^{ip\phi}$ die Besselsche Differentialgleichung für $y(x) \mapsto f(r)$. Die Gleichung $\Delta u = -u$ entsteht z.B. aus der Wellengleichung $\big(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\big)\psi = 0$ mit dem Ansatz $\psi(r,\phi,t) = u(r,\psi)e^{it}$.

Die Lösungen der Besselschen Differentialgleichung heißen *Zylinderfunktionen*. Die einfachste wird durch den Potenzreihenansatz $y = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gewonnen. Nach Indexverschiebung entsteht

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+p+2)(n+p+1)a_{n+2} + (n+p+2)a_{n+2} + a_n - p^2 a_{n+2}\Big)x^{n+p} \; ,$$

also $a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+2p+2)}$. Startend mit $n = 0$ erhalten wir:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2\cdot(2+2p)} \; , \quad a_4 = -\frac{a_2}{4\cdot(4+2p)} = \frac{p!a_0}{4^2\cdot 2!\cdot(p+2)!} \; ,$$
$$a_6 = -\frac{a_4}{6\cdot(6+2p)} = -\frac{p!a_0}{4^3\cdot 3!\cdot(p+3)!} \; , \quad a_{2n} = (-1)^n \frac{p!a_0}{4^n\cdot n!\cdot(p+n)!} \; ,$$

somit mit der willkürlichen Konvention $a_0 = \frac{1}{p!2^p}$ die Lösung $y(x) = J_p(x)$ mit

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n\cdot n!\cdot(p+n)!} \; .$$

Die Potenzreihe $J_p(x)$ heißt *Besselfunktion* zum Parameter $p \in \mathbb{N}$. Sie läßt sich mit Hilfe der später einzuführenden Γ-Funktion, welche die Fakultät interpoliert, auf $p \in \mathbb{R}$ verallgemeinern. Die Bedeutung der Bessel-Funktion ist vergleichbar mit Sinus und Kosinus bzw. Exponentialfunktion. Die Nullstellen der Besselfunktion sind wichtig bei zweidimensionalen *Randwertproblemen*, z.B. bei Schwingungen einer am Rand eingespannten Membran.

Eine weitere Lösung der Besselschen Differentialgleichung ist die Neumannsche Funktion $N_p(x)$. Für $x \in \mathbb{C}$ sind die komplexen Linearkombinationen $H_p(x) = J_p(x) \pm iN_p(x)$ (Hankel-Funktionen) nützlich.

Beispiel 33.3 Die Schrödinger-Gleichung für den eindimensionalen harmonischen Oszillator lautet nach Skalierung

$$\psi'' + (E - x^2)\psi = 0 \; .$$

Für große $|x|$ kann $E\psi$ vernachlässigt werden, und $\psi_0 = e^{-x^2/2}$ wäre Lösung von $\psi_0'' + (1-x^2)\psi_0 = 0$. Man setzt also $\psi(x) = y(x)e^{-x^2/2}$ und erhält

$$y'' - 2xy' + (E-1)y = 0 \; .$$

Mit dem Potenzreihenansatz $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ergibt sich die Rekursionsformel

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (E-2n-1)a_n = 0$$

Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, z.B. $N > E^2$, so daß für alle $n \geq N$ gilt $a_{2(k+1)} > (1-\frac{1}{N})\frac{a_{2k}}{k+1}$ und damit $y > e^{(1-\frac{1}{N})x^2}a_0 + P_N(x)$ für ein Polynom P_N vom Grad $\leq N$. Damit wächst die Gesamtlösung $\psi = ye^{-x^2/2}$ wie $e^{+(1-2/N)x^2/2}$ für $|x| \to \infty$ und erlaubt keine Wahrscheinlichkeitsinterpretation mehr. Der Ausweg besteht in der Abbruchbedingung $E = 2n+1$, die dann $a_{n+2} = 0$ und somit $a_k = 0$ für alle $k > n$ erzwingt. Somit sind nur diskrete bzw. quatisierte Energieniveaus möglich. Es entsteht die *Hermitesche Differentialgleichung* zum Parameter $n \in \mathbb{N}$

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \; , \qquad x \in \mathbb{R} \; , \; n \in \mathbb{N} \; .$$

Man kann nachrechnen, daß eine Lösung $y = H_n$ gegeben ist durch das *Hermitesche Polynom* n-ter Ordnung

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n e^{-x^2} \; .$$

Beispiel 33.4 Die *Legendresche Differentialgleichung* auf dem Intervall $I =]-1,1[$ ist gegeben durch

$$(1-x^2)y'' - 2xy + n(n+1)y = 0 \; , \qquad n \in \mathbb{N} \; .$$

Sie entsteht bei der Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$\Delta\psi + U(r)\psi = 0$$

in Kugelkoordinaten (r,θ,ϕ). Dabei ist Δ der Laplace-Operator. Der Ansatz $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ mit anschließendem Potenzreihenansatz für $R(r)$ läßt nur dann eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation zu, wenn wieder eine durch $n \in \mathbb{N}$ parametrisierte Abbruchbedingung gestellt wird (Quantisierung der Energieniveaus). Eine Lösung der Legendresche Differentialgleichung ist gegeben durch das *Legendresche Polynom n-ter Ordnung*

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n (x^2-1)^n \; .$$

Zum Beweis rechnet man $z^{(n+1)}$ für die Funktion $z(x) := (x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2-1)^n = 2nx(x^2-1)^n$ über die mehrfache Leibniz-Regel $(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} f^{(j)}\, g^{(n-j)}$ aus.

Man findet (bis auf Vorfaktoren) $\Theta_{l0}(\theta) = P_l(\cos\theta)$.

Sehr ähnlich entsteht:

Beispiel 33.5 Die *Laguerresche Differentialgleichung* zum Parameter $n \in \mathbb{N}$ ist

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0\ , \qquad x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ n \in \mathbb{N}\ .$$

Eine Lösung ist das *Laguerresche Polynom* n-ter Ordnung

$$L_n(x) := \frac{1}{n!}e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(x^n e^{-x}\right)\ .$$

Es tritt auf als Lösung der zweidimensionalen Schrödinger-Gleichung in Radialkoordinaten für das Potential $U(x) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2$ eines harmonischen Oszillators.