Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 09/10**

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 22.10.09, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen Blatt 1

Seien X, Y Mengen, dann versteht man unter einer *Abbildung von* X *nach* Y eine Vorschrift f, die jedem $x \in X$ eindeutig ein $f(x) \in Y$ zuordnet. Wir schreiben $f : X \to Y$ für die Abbildung zwischen Mengen und $f : x \mapsto f(x)$ für die Zuordnung der Elemente.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

- *injektiv*, falls für $x, x' \in X$ aus $f(x) = f(x')$ stets $x = x'$ folgt
- *surjektiv*, falls es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $y = f(x)$
- *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist

Aufgabe 1. Man prüfe folgende Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf Injektivität und Surjektivität (Begründung oder Gegenbeispiel):

a) $f : (x, y) \mapsto (y + 2, x - 1)$

b) $f : (x, y) \mapsto (xy, x + y)$

Aufgabe 2. Man zeige: Ist X eine *endliche* Menge (d.h. X besteht aus endlich vielen Elementen), dann gilt für eine Abbildung $f : X \to X$:

$$f \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjektiv}$$

Bemerkung: Das Beispiel $f(n) := n+1$ einer injektiven, aber nicht surjektiven, Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zeigt, daß das für unendliche Mengen nicht gilt!

Aufgabe 3. Es sei M eine nichtleere Menge mit n unterscheidbaren Elementen. Zeigen Sie:

a) Die Anzahl aller Anordnungen der n Elemente von M ist $n!$.
Bemerkung: Diese Anordnungen nennt man *Permutationen* der Menge M.

b) Für $k \in \{0, \dots, n\}$ gibt es genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen von M.

c) M besitzt 2^n Teilmengen.

Aufgabe 4 Es sei p eine Primzahl. Man beweise: Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ ist $n^p - n$ durch p teilbar.