Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 19.11.09, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen Blatt 5

Aufgabe 1. Begründen Sie, weshalb die in a)–d) definierten Reihen konvergent bzw. divergent sind:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\, 2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{2}}{\sqrt{n^2+n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\sqrt[n]{n}-1)(-n)^n}{(n+1)^n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

Aufgabe 2. Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\sqrt{1+x^2})^n}\,, \qquad x \in \mathbb{R}$

d) die rationale Zahl $\frac{p}{q}$, mit $p, q \in \mathbb{N}^\times$ teilerfremd, welche dem periodischen Dezimalbruch $0,\overline{293706}$ entspricht.

Aufgabe 3. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge.

a) Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty\,.$$

b) Beweisen Sie unter Verwendung von a) die bereits bekannte Eigenschaft

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty \quad \text{mit } s \in \mathbb{Q}_+^\times \qquad \Leftrightarrow \qquad s > 1\,.$$

Aufgabe 1. Berechnen Sie unter Verwendung von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ die folgenden Reihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$