

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 7.1.10, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen

Blatt 10

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \text{b)} \quad & f(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp(x^2) - \exp(y^2)}{x^2 - y^2} & \text{für } |x| \neq |y| \\ \exp(y^2) & \text{für } x = y \text{ und } x = -y \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Es sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$.
Zeigen Sie: Es gibt ein $\zeta \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(\zeta) = f(\zeta + \frac{1}{2})$.**Aufgabe 3.** Zwei Punkte der Erdoberfläche (die Meeresoberfläche eingeschlossen) heißen *antipodal*, wenn Ihre Verbindungsgerade den Erdmittelpunkt enthält.

Beweisen Sie, daß es zu jedem Zeitpunkt unendlich viele Paare antipodaler Punkte der Erdoberfläche gibt, die die gleiche Lufttemperatur haben.

(Die Lufttemperatur wird dabei als stetige Funktion $T : \text{Erdoberfläche} \rightarrow \mathbb{R}$ aufgefaßt, und die Erdoberfläche als metrischer Raum.)**Aufgabe 4** Überprüfen Sie, ob folgende Funktionsgrenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1}, \quad p, q \in \mathbb{N}^\times \\ \text{b)} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3} \\ \text{c)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp((1+x)^2) - \exp(1)}{x} \\ \text{d)} \quad & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \left(\frac{3}{x^2+5} + \frac{x}{x^2+1} \right) \end{aligned}$$