Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann

WS 10/11

Probeklausur zur Mathematik für Physiker III

Die Klausur wird aus zwei Teilen bestehen:

- Im Teil A, den es in der Probeklausur nicht gibt, wird das theoretische Verständnis der behandelten Themen abgefragt.
- Teil B besteht aus Aufgaben, die mit denen der Probeklausur vergleichbar sind. Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.

Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig, handgeschrieben oder per Computer) mit Notizen.

Teil B

Aufgabe 1. Es sei $y(x)$ die durch $x^2 + 4x + \mathrm{e}^y + xy = 1$ implizit in einer Umgebung von $x_0 = 0$ definierte Funktion. Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung von $y(x)$ im Punkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Koordinaten und den Wert des Maximums der Funktion $F(x,y,z) = z^2 - xy$ auf der Menge $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + z^2 = 4 \ , \ x + y = 2\}$.

Aufgabe 3. Durch $c(t) = (t, t^2)$ werde eine differenzierbare Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert.
a) Berechnen Sie die Bogenlänge $L(c)$.
b) Berechnen Sie das Integral der Differentialform $\omega(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2)^3 dx_1 + (\xi_1)^3 dx_2$ längs c.

Aufgabe 4. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen (in einer Umgebung ihrer Anfangsdaten):
a) $y'(x) = \dfrac{(1 + y(x))^2}{x}$ mit $y(2) = 3$.
b) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) + e^x = 0$ mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

Aufgabe 5. a) Bestimmen Sie alle Funktionen $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so daß die Funktion $f(x,y) = x^2 - x - y^2 + e^x \cos y + \mathrm{i}v(x,y)$ holomorph auf $\mathbb{C}$ ist.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\cos x}{(1 + x^2)^2}$.

Aufgabe 6. Für $d, h > 0$ sei $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq h \ , \ \max(|x|,|y|) \leq d(1 - \frac{z}{h})$ eine Pyramide, die als homogener Körper der konstanten Dichte $\mu > 0$ angenommen wird. Berechnen Sie
a) die Masse der Pyramide,
b) die Koordinaten des Schwerpunktes der Pyramide,
c) das Trägheitsmoment der Pyramide bezüglich der z-Achse als Drehachse.