**Prof. Dr. R. Wulkenhaar**
**Dr. T. Timmermann**

**WS 10/11**

# Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 19.10.2010, vor der Vorlesung in den Briefkästen — Blatt 1

---

**Aufgabe 1.** Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeige, dass für $f$ im Punkt $(0,0)$ jede Richtungsableitung existiert.

(b) Zeige, dass $f$ im Punkt $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

**Aufgabe 2.** Zeige, dass die Abbildung

$$P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\theta,\phi) \mapsto (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta),$$

total differenzierbar ist, und berechne ihre Jacobi-Matrix sowie deren Determinante in jedem Punkt.

**Aufgabe 3.** Seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}, \qquad g(x,y) = \begin{pmatrix} \sin xy \\ \mathrm{e}^{x+y} \\ \ln(1+x^2) \end{pmatrix}, \qquad h(x,y,z) = xy^2 z.$$

Berechne die Ableitungen $Df, Dg, Dh$ und unter Verwendung der Kettenregel $D(g\circ f)$ sowie $D(h \circ g)$

**Aufgabe 4.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir identifizieren $M(n\times n,\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ mit Hilfe der Abbildung $(a_{ij})_{i,j} \mapsto (a_{11},\ldots,a_{1n},\ldots,a_{n1},\ldots,a_{nn})$. Zeige:

(a) Die Abbildung $f\colon M(n\times n,\mathbb{R}) \to M(n\times n,\mathbb{R})$, $A \mapsto A^T A$, ist differenzierbar und für alle $A, B \in M(n\times n,\mathbb{R})$ gilt $(Df)(A)B = A^T B + B^T A$.

(b) Die Matrix-Exponentialfunktion $\exp\colon M(n\times n,\mathbb{R}) \to M(n\times n,\mathbb{R})$, $A \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$, ist differenzierbar und für alle $A, B \in M(n\times n,\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}(D\exp)(A)B &= \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{(k+l+1)!} A^k B A^l \\ &= \exp(A)B, \quad \text{falls } AB = BA.\end{aligned}$$

(c) Ist $X \in M(n\times n,\mathbb{R})$ schief-symmetrisch ($X^T = -X$), so ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to M(n\times n,\mathbb{R}), t \mapsto \exp(tX)^T \exp(tX)$, konstant und $\exp(tX)$ orthogonal für jedes $t \in \mathbb{R}$.